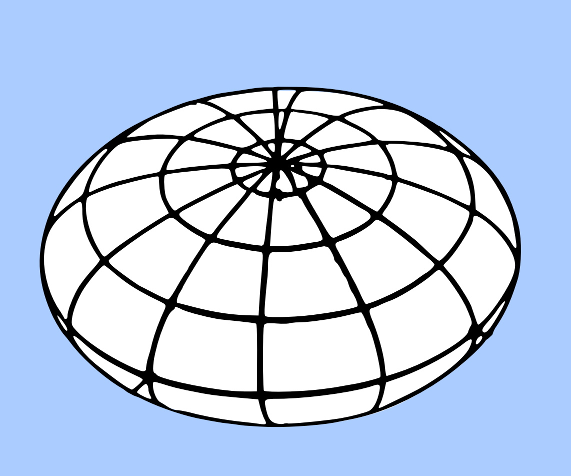
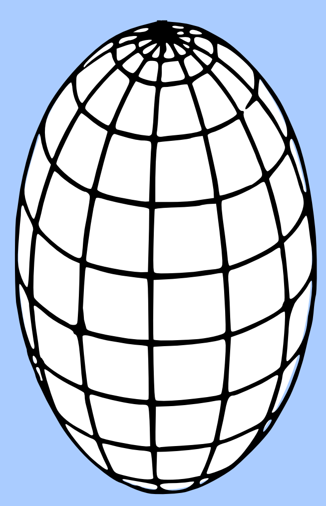
M. Vygodski

Aide-mémoire de mathématiques supérieures

Éditions Mir Moscou

М. Я. ВЫГОДСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Издательство
«Наука» Москва

Aide-mémoire de mathématiques supérieures

par MARC VYGODSKI

docteur ès sciences physico-mathématiques

A l'usage

des élèves de l'Enseignement supérieur

scientifique et technique,

des élèves de Mathématiques

supérieures et spéciales

Editions Mir • Moscou

Traduit du russe par
G. Der-Mégréditchian

Première édition 1973
Réimpression 1975
Deuxième réimpression 1980
Troisième réimpression 1984

на французском языке

Table des matières

Deuxième partie. Géométrie analytique à trois dimensions

Troisième partie. Notions fondamentales de l'analyse

Quatrième partie. Calcul différentiel

Cinquième partie. Calcul intégral

Sixième partie. Notions fondamentales sur les courbes planes et gauches

Septième partie. Séries

Huitième partie. Dérivation et intégration des fonctions de plusieurs variables

Neuvième partie. Equations différentielles

Dixième partie. Quelques courbes remarquables

Tables

Avertissement

Ce livre englobe tout le programme du cours fondamental de mathématiques supérieures des Instituts de constructions mécaniques, du bâtiment, du transport, d'aviation, d'électrotechnique, d'énergétique et des mines.

Le livre a une double destination.

En premier lieu, il donne des indications concrètes: qu'est-ce que le produit vectoriel, comment trouver l'aire d'un corps de révolution, comment développer une fonction en série trigonométrique, etc. Les définitions, les formules, les règles et les théorèmes correspondants accompagnés d'exemples et d'indications pratiques peuvent être rapidement consultés; on a effectué à cette fin une partition détaillée des divers sujets et composé un index alphabétique bien fourni.

En second lieu, ce livre est destiné à une lecture systématique. Il ne prétend pas jouer le rôle d'un manuel, et c'est pourquoi les démonstrations ne sont reproduites intégralement que dans des cas exceptionnels. Il peut toutefois servir à une première prise de connaissance avec la matière. A cette fin on explique en détail les notions fondamentales telles que la notion de produit scalaire (§ 104), de limite (§§ 203-206), de différentielle (§§ 228-235), de série infinie (§§ 270, 366-370), et on illustre toutes les règles par un grand nombre d'exemples, qui constituent une partie intégrante de ce livre (cf. §§ 50-62, 134, 149, 264-266, 369, 422, 498, etc.). A la lumière de ces exemples on voit comment doivent être appliquées les règles, quand elles sont inapplicables, quelles erreurs doit-on éviter (§§ 290, 339, 340, 379, etc.).

Les théorèmes et les règles sont accompagnés d'explications des plus diverses. Il s'agit parfois de mettre en lumière le *contenu concret* du théorème, pour que les élèves puissent assimiler parfaitement la démonstration. Parfois l'explication est accompagnée d'un exemple particulier et contient un raisonnement qui représente la démonstration complète du théorème si on l'applique au cas général (cf. §§ 148, 149, 369, 374). Pour toute explication on se borne parfois à citer les paragraphes à la base de la démonstration. Le matériel que l'on peut omettre

en première lecture a été imprimé en petits caractères, ce qui ne signifie nullement qu'il est de peu d'importance.

L'assimilation des idées mathématiques est grandement facilitée par la connaissance des circonstances ayant préludé à leur apparition et leur développement. C'est pourquoi nous avons accordé une grande importance aux données historiques. Ainsi, les §§ 270, 366 en relation avec les §§ 271, 383, 399, 400 permettront, nous l'espérons, de mieux comprendre la théorie de la série de Taylor que ne le permet l'exposé formel habituel.

Il n'est pas nécessaire de préciser les autres particularités du livre: les étudiants s'en rendront compte au fur et à mesure, quant aux professeurs, il suffit de citer à leur intention certains paragraphes caractéristiques: §§ 28, 60-62, 92, 184-190, 203-206, 228-234, 237, 258-260, 271, 343-347, 430-438, 459.

PREMIÈRE PARTIE

Géométrie analytique à deux dimensions

§ 1. Objet de la géométrie analytique

En géométrie *élémentaire* on étudie les propriétés des figures rectilignes et du cercle. Les constructions jouent ici le rôle principal et les calculs, bien que leur importance pratique soit grande, un rôle secondaire. Le choix de telle ou telle construction exige habituellement une certaine perspicacité. C'est là l'obstacle majeur qui surgit lorsqu'on veut résoudre les problèmes par les méthodes de la géométrie élémentaire.

La *géométrie analytique* fut justement appelée à créer des procédés uniformes pour résoudre les problèmes géométriques, afin de les appliquer à l'étude de différentes courbes importantes pour la pratique.

Ce but fut atteint avec la création de la *méthode des coordonnées* (cf. plus bas §§ 2-4). Le rôle principal appartient ici aux calculs, alors que les constructions n'ont qu'une importance auxiliaire. Aussi la résolution des problèmes par la méthode analytique exige-t-elle une perspicacité bien moindre.

La création de la méthode des coordonnées aurait été impossible sans les travaux des mathématiciens de la Grèce antique, en particulier d'Apollonios de Perga. La méthode connut un développement systématique durant la première moitié du XVII[e] siècle dans les travaux de Fermat et de Descartes qui n'ont considéré d'ailleurs que des courbes planes. Euler fut le premier à appliquer la méthode des coordonnées à l'étude systématique des courbes et des surfaces gauches.

§ 2. Coordonnées

On appelle coordonnées du point les grandeurs qui déterminent la position de ce point (dans l'espace, sur une surface plane ou gauche, sur une droite ou une courbe). Si, par exemple, le point M doit être situé quelque part sur la droite $X'X$ (fig. 1), on peut définir sa position à l'aide d'un

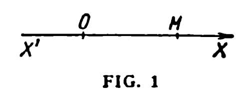


FIG. 1

seul nombre, par exemple de la manière suivante: choisissons sur $X'X$ un point origine O et mesurons le segment OM, disons, en centimètres. Nous obtenons un nombre x, positif ou négatif suivant l'orientation du segment OM (vers la gauche ou la droite si la droite est horizontale). Le nombre x est la coordonnée du point M.

La valeur de la coordonnée x dépend du choix de l'origine O, du sens positif de la droite et du segment que l'on adopte comme unité graphique.

§ 3. Système rectangulaire de coordonnées

La position d'un point dans un plan est déterminée par deux coordonnées. La manière la plus simple de le faire est la suivante.

On trace deux droites perpendiculaires $X'X$, $Y'Y$ (fig. 2), appelées *axes de coordonnées*. La droite $X'X$, menée habituellement horizontalement, est appelée *axe des abscisses*, la droite $Y'Y$ *axe des ordonnées*. Le point O de leur intersection est appelé *origine des coordonnées* ou simplement *origine*. Pour mesurer les segments sur les axes de coordonnées on choisit une unité arbitraire qui est la même pour les deux axes.

Sur chaque axe on choisit un sens positif (désigné par une flèche). Sur la fig. 2 OX donne le sens positif de l'axe des abscisses et OY le sens positif de l'axe des ordonnées.

Il est admis de choisir le sens positif de manière qu'après une rotation de 90° dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre OX coïncide avec OY (fig. 3).

Les axes de coordonnées $X'X$, $Y'Y$ (avec le sens positif établi et l'échelle adoptée) constituent un *système rectangulaire de coordonnées*.

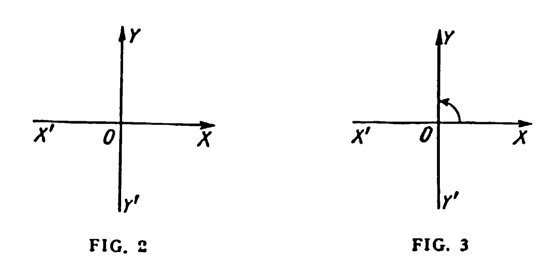


FIG. 2 FIG. 3

§ 4. Coordonnées rectangulaires

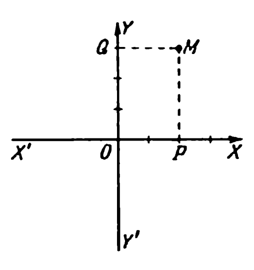


FIG. 4

La position du point M sur le plan dans un système rectangulaire de coordonnées (§ 3) est déterminée de la maniere suivante. On mène MP parallèlement à $Y'Y$ jusqu'à l'intersection avec l'axe $X'X$ au point P (fig. 4) et MQ parallèlement à $X'X$ jusqu'à l'intersection avec l'axe $Y'Y$ au point Q. Les nombres x et y mesurant les segments OP et OQ à l'échelle adoptée (et parfois ces segments eux-mêmes) sont appelés *coordonnées rectangulaires* (ou simplement *coordonnées*) du point M. Ces nombres sont positifs ou négatifs suivant l'orientation des segments OP, OQ. Le nombre x est appelé *abscisse* du point M, le nombre y son *ordonnée*.

Sur la fig. 4 le point M a une abscisse $x = 2$ et une ordonnée $y = 3$ (pour une unité graphique égale à 0,4 cm). On l'écrit ainsi: M (2, 3). En général l'écriture M (a, b) signifie que le point M possède une abscisse

$$x = a$$

et une ordonnée

$$y = b.$$

Exemples. Les points de la fig. 5 sont notés ainsi: $A_1(+2, +4)$, $A_2(-2, +4)$, $A_3(+2, -4)$, $A_4(-2, -4)$, $B_1(+5, 0)$, $B_2(0, -6)$, $O(0, 0)$.

Remarque. Les coordonnées d'un point donné M seront différentes dans un autre système de coordonnées rectangulaires.

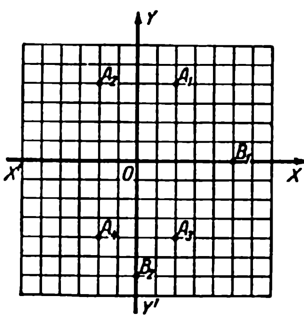


FIG. 5

§ 5. Quadrants

Les quatre angles formés par les axes de coordonnées sont appelés *quadrants*. Ils sont numérotés comme l'indique la fig. 6. La table suivante montre les signes des coordonnées d'un point dans chaque quadrant:

Quadrant / Coordonnée	I	II	III	IV
Abscisse	+	—	—	+
Ordonnée	+	+	—	—

Sur la fig. 5 le point A_1 est situé dans le premier quadrant, le point A_2 dans le second, le point A_4 dans le troisième et le point A_3 dans le quatrième.

Si le point est situé sur l'axe des abscisses (par exemple le point B_1 sur la fig. 5), son ordonnée est nulle. Si le point est situé sur l'axe des ordonnées (par exemple le point B_2 sur la fig. 5), son abscisse est nulle.

§ 6. Système oblique de coordonnées

On utilise des systèmes de coordonnées autres que le système rectangulaire. Le système oblique (il est le plus proche du système rectangulaire) est construit ainsi: on trace (fig. 7) deux droites non perpendiculaires $X'X$ et $Y'Y$ *(axes de coordonnées)* et l'on procède ensuite comme pour la

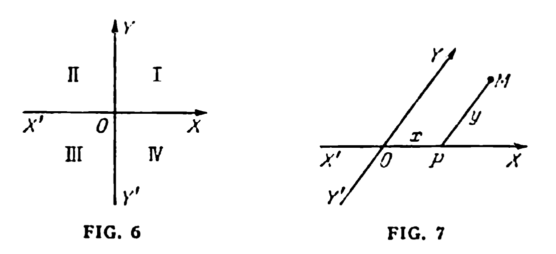


FIG. 6 FIG. 7

construction du système rectangulaire (§ 3). Les coordonnées $x = OP$ *(abscisse)* et $y = PM$ *(ordonnée)* sont définies comme expliqué au § 4.

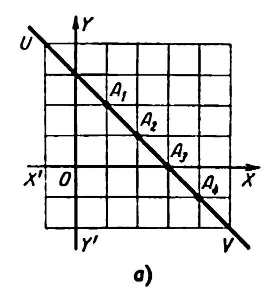
Les systèmes de coordonnées rectangulaires et obliques forment ce qu'on appelle les systèmes de coordonnées cartésiennes.

Parmi les autres systèmes de coordonnées, le plus usité est le système de coordonnées polaires (cf. § 73).

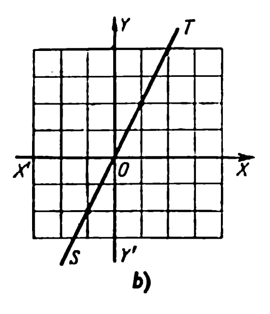
§ 7. Equation d'une courbe

Considérons l'équation $x + y = 3$ liant l'abscisse x et l'ordonnée y. Une infinité de couples de valeurs x, y satisfait à cette équation, par exemple $x = 1$ et $y = 2$, $x = 2$ et $y = 1$, $x = 3$ et $y = 0$, $x = 4$ et $y = -1$, etc. A chaque couple de coordonnées (dans le système donné de coordonnées) correspond un seul point (§ 4). On a représenté sur la fig. 8, *a* les points $A_1(1, 2)$, $A_2(2, 1)$, $A_3(3, 0)$, $A_4(4, -1)$. Ils sont situés sur une même droite UV. Tout autre point dont les coordonnées vérifient cette équation $x + y = 3$ est situé sur cette droite. Inversement les coordonnées x, y de tout point situé sur la droite UV satisfont à l'équation $x + y = 3$.

On dit alors que *l'équation* $x + y = 3$ *est l'équation de la droite* UV. On dit encore que *l'équation* $x + y = 3$ *représente la droite* UV. On doit comprendre dans un sens analogue les expressions: « l'équation de la droite ST (fig. 8, *b*) est $y = 2x$ », l'équation $x^2 + y^2 = 49$ représente



a)



b)

FIG. 8

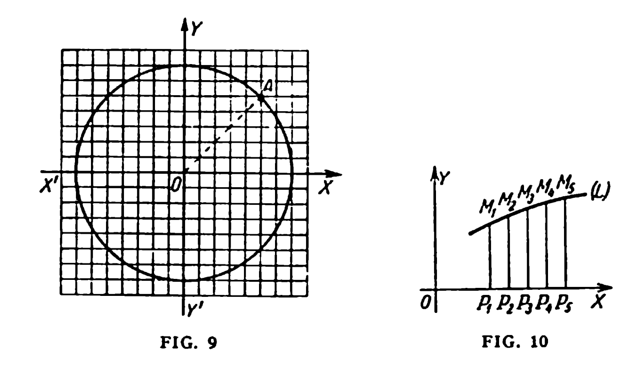


FIG. 9 FIG. 10

une circonférence (fig. 9) dont le rayon est égal à 7 unités graphiques et dont le centre coïncide avec l'origine des coordonnées (cf. § 38).

En général *l'équation reliant les coordonnées x, y est appelée équation de la courbe L* si les deux conditions suivantes sont vérifiées: 1) *les coordonnées x, y de tout point M de la courbe L vérifient cette équation,* 2) *les coordonnées x, y de tout point non situé sur la courbe L ne vérifient pas cette équation.*

Les coordonnées d'un point M de la courbe L sont appelées *coordonnées courantes,* car la courbe L peut être engendrée en déplaçant le point M.

Soient M_1, M_2, M_3, ... (fig. 10) les positions successives du point M sur la courbe L. Abaissons de ces points les perpendiculaires M_1P_1, M_2P_2, M_3P_3, ... sur l'axe OX. Nous obtenons les segments successifs P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ... Ils déterminent sur l'axe OX les segments OP_1, OP_2, OP_3, ... qui sont les abscisses. Cela explique l'origine des termes «abscisse» (du lat. *abscissa*, coupée) et «ordonnée» qui est la forme abrégée de l'expression latine *ordinatim ducta*, signifiant «conduit dans l'ordre».

Représentant chaque point du plan par ses coordonnées et chaque courbe par une équation reliant les coordonnées courantes, nous ramenons le problème géométrique à un problème analytique (c'est-à-dire de calcul). Cela explique la provenance de l'expression *géométrie analytique*».

§ 8. Position relative d'une courbe et d'un point

Pour savoir si le point M est ou non situé sur une courbe L, il suffit de connaître les coordonnées du point M et l'équation de la courbe L. Si les coordonnées du point M vérifient l'équation de la courbe L, le poin

M est situé sur L; dans le cas contraire le point M n'est pas situé sur la courbe L.

EXEMPLE. Le point $M(5, 5)$ est-il situé sur la circonférence $x^2 + y^2 = 49$ (§ 7)?

SOLUTION. Portons les valeurs $x = 5$, $y = 5$ dans l'équation $x^2 + y^2 = 49$. Comme l'équation n'est pas vérifiée, le point M n'est pas situé sur la circonférence considérée.

§ 9. Position relative de deux courbes

Pour savoir si deux courbes ont ou non des points communs et si oui, combien il y en a, il suffit de connaître les équations de ces courbes. Les points communs existent si les équations sont vérifiées simultanément et ils n'existent pas dans le cas contraire. Le nombre de points communs est égal au nombre de solutions du système d'équations.

EXEMPLE 1. La droite $x + y = 3$ (§ 7) et la circonférence $x^2 + y^2 = 49$ ont deux points communs, car le système

$$x + y = 3, \quad x^2 + y^2 = 49$$

possède deux solutions:

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6{,}22, \qquad y_1 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3{,}22$$

et

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{89}}{2} \approx -3{,}22, \qquad y_2 = \frac{3 + \sqrt{89}}{2} \approx 6{,}22.$$

EXEMPLE 2. La droite $x + y = 3$ et la circonférence $x^2 + y^2 = 4$ n'ont pas de points communs, car le système

$$x + y = 3, \quad x^2 + y^2 = 4$$

ne possède pas de solutions (réelles).

§ 10. Distance de deux points

La distance d entre les points $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$ s'exprime par la formule

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$

EXEMPLE. La distance entre les points $M(-2,3,\ 4,0)$ et $N(8,5,\ 0,7)$ est

$$d = \sqrt{(8,5 + 2,3)^2 + (0,7 - 4)^2} = \sqrt{10,8^2 + 3,3^2} \approx 11,3$$

(unités).

REMARQUE 1. L'ordre des points M et N ne joue aucun rôle; on peut supposer que N est le premier point, M le second.

REMARQUE 2. On admet que la distance d est positive; c'est pourquoi dans la formule (1) la racine est affectée d'un seul signe (plus).

§ 11. Division d'un segment dans un rapport donné

Etant donnés les points $A_1(x_1,\ y_1)$, $A_2(x_2,\ y_2)$ (fig. 11). on demande de trouver les coordonnées x, y du point K, divisant le segment A_1A_2 dans le rapport

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2.$$

La solution est donnée par les formules:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \\ y &= \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si l'on désigne le rapport $m_1 : m_2$ par la lettre λ, les relations (1) prennent une forme non symétrique

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

EXEMPLE 1. Etant donnés le point $B(6,\ -4)$ et le point O coïncidant avec l'origine, trouver le point K divisant BO dans le rapport $2:3$.

SOLUTION. Il faut porter dans les formules (1)

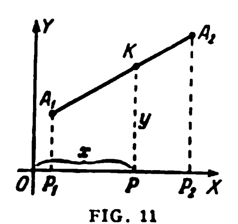


FIG. 11

$$m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ x_1 = 6,\ y_1 = -4,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0.$$

Nous obtenons

$$x = \frac{18}{5} = 3,6; \quad y = -\frac{12}{5} = -2,4.$$

Ce sont les coordonnées du point cherché K.

REMARQUE 1. L'expression «le point K divise le segment A_1A_2 dans le rapport $m_1 : m_2$» signifie que le rapport $m_1 : m_2$ est égal au rap-

port des segments $A_1K : KA_2$ pris ***précisément dans cet ordre*** (et non dans l'ordre inverse). Dans l'exemple 1 le point K (3,6, —2,4) divise le segment BO dans le rapport 2 : 3 et le segment OB dans le rapport 3 : 2.

REMARQUE 2. Supposons que le point K divise le segment A_1A_2 *extérieurement*, c'est-à-dire que K est situé sur le prolongement du segment A_1A_2; alors les formules (1), (2) restent valables si l'on affecte le rapport $m_1 : m_2 = \lambda$ du signe moins.

EXEMPLE 2. Étant donnés les points $A_1(1, 2)$ et $A_2(3, 3)$, trouver sur le prolongement du segment A_1A_2 un point deux fois plus éloigné de A_1 que de A_2.

SOLUTION. Nous avons $\lambda = m_1 : m_2 = -2$ (de sorte que l'on peut poser $m_1 = -2$, $m_2 = 1$ ou $m_1 = 2$, $m_2 = -1$). Nous trouvons d'après les formules (1):

$$x = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 5, \quad y = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{-2 + 1} = 4.$$

§ 11a. Division d'un segment en deux parties égales

Les coordonnées du point médian d'un segment A_1A_2 sont égales à la demi-somme des coordonnées correspondantes de ses extrémités:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Ces formules s'obtiennent des formules (1) et (2) du § 11 si l'on pose $m_1 = m_2 = 1$ ou $\lambda = 1$.

§ 12. Déterminant du second ordre(*)

On désigne par le symbole $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ l'expression $ad - bc$.

EXEMPLES.

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 7 = -11;$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot (-4) = 30.$$

L'expression $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ est appelée *déterminant du second ordre.*

(*) Pour plus de détails voir §§ 182-185.

§ 13. Aire d'un triangle

Si les points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ désignent les sommets d'un triangle, son aire s'exprime par la formule

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

dont le second membre est un déterminant du second ordre (§ 12). Nous supposons que l'aire du triangle soit positive. C'est pourquoi nous prenons le signe plus devant le déterminant si la valeur du déterminant est positive, et le signe moins si elle est négative.

EXEMPLE. Trouver l'aire du triangle dont les sommets sont $A(1, 3)$, $B(2, -5)$ et $C(-8, 4)$.

SOLUTION. Choisissons A pour premier sommet, B pour second et C pour troisième, nous trouvons:

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + 8 & 3 - 4 \\ 2 + 8 & -5 - 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 10 & -9 \end{vmatrix} = -81 + 10 = -71.$$

Nous devons prendre le signe moins dans la formule (1); nous obtenons:

$$S = -\frac{1}{2} \cdot (-71) = 35{,}5.$$

En supposant que le premier sommet soit A, le second C et le troisième B, nous avons

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - 2 & 3 + 5 \\ -8 - 2 & 4 + 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -10 & 9 \end{vmatrix} = 71.$$

Nous devons maintenant prendre le signe plus dans la formule (1); nous obtenons de nouveau $S = 35{,}5$.

REMARQUE. Si le sommet A_3 coïncide avec l'origine des coordonnées, l'aire du triangle est donnée par la formule

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \tag{2}$$

(cas particulier de la formule (1) pour $x_3 = y_3 = 0$).

§ 14. Droite; équation résolue par rapport à l'ordonnée (avec le coefficient angulaire)

On peut représenter toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées par une équation de la forme

$$y = ax + b, \tag{1}$$

où a est la tangente de l'angle α (fig. 12), formé par la droite et le sens positif de l'axe des abscisses (*) ($a = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \widehat{XLS}$), et le nombre b est égal en valeur absolue à la longueur du segment OK déterminé par cette droite sur l'axe des ordonnées; le nombre b est positif ou négatif suivant le sens du segment OK. Si la droite passe par l'origine, alors $b = 0$.

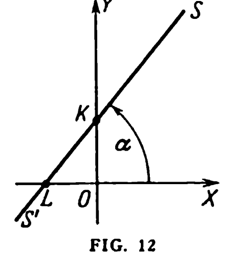


FIG. 12

La grandeur a est appelée *coefficient angulaire* ou *pente* et la grandeur b *ordonnée à l'origine.*

EXEMPLE 1. Ecrire l'équation de la droite (fig. 13) formant avec l'axe OX un angle $\alpha = -45°$ et d'ordonnée à l'origine $b = -3$.

SOLUTION. Le coefficient angulaire $\alpha = \operatorname{tg}(-45°) = -1$. L'équation cherchée est par conséquent $y = -x - 3$.

EXEMPLE 2. Quelle courbe est représentée par l'équation $3x = \sqrt{3}\,y$?

SOLUTION. Résolvant l'équation par rapport à y, nous trouvons $y = \sqrt{3}\,x$. D'après le coefficient angulaire $a = \sqrt{3}$ nous trouvons l'angle α : comme $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = 60°$ (ou $\alpha = 240°$). L'ordonnée à l'origine est $b = 0$; c'est pourquoi l'équation donnée représente la droite UV (fig. 14)

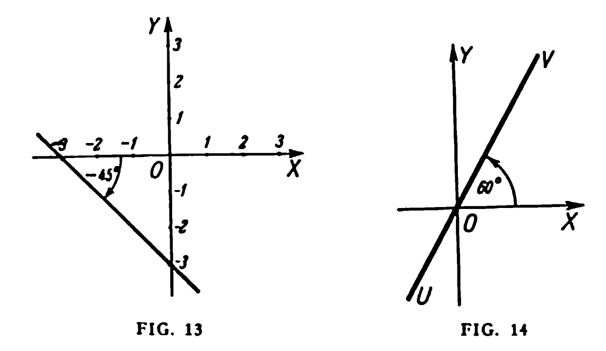


FIG. 13 FIG. 14

(*) On estime que le rayon initial de l'angle α est le rayon OX. On peut prendre sur la droite SS' n'importe lequel des rayons LS, LS'. On estime que l'angle XLS est positif si la rotation faisant coïncider le rayon LX avec le rayon LS est effectuée dans le même sens que la rotation de 90° amenant l'axe OX sur OY (c'est-à-dire, pour une disposition habituelle, dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre).

passant par l'origine et formant avec l'axe OX un angle de 60° (ou de 240°).

REMARQUE 1. A la différence des autres formes de l'équation d'une droite (cf. plus bas §§ 30, 33) l'équation (1) est dite *résolue par rapport à l'ordonnée* ou *équation avec le coefficient angulaire* (*).

REMARQUE 2. On ne peut représenter une droite parallèle à l'axe des ordonnées par une équation résolue par rapport à l'ordonnée. Cf. § 15.

§ 15. Droite parallèle à un axe

Une droite parallèle à l'axe des abscisses (fig. 15) est représentée par l'équation (**)

$$y = b, \tag{1}$$

où la grandeur b est égale en valeur absolue à la distance de cette droite à l'axe des abscisses. Si $b > 0$, la droite est située « en dessus » de l'axe des abscisses (cf. fig. 15) ; si $b < 0$, elle est située « en dessous » de cet axe. L'axe des abscisses lui-même est donné par l'équation

$$y = 0. \tag{1a}$$

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées (fig. 16) est donnée par l'équation (***)

$$x = f. \tag{2}$$

FIG. 15

FIG. 16

(*) La première appellation est préférable, car une équation de la forme $x = a'y + b'$ (résolue par rapport à l'abscisse) représente également une droite (non parallèle à l'axe des abscisses) ; comme les coordonnées x et y sont équivalentes, on serait pleinement autorisé à appeler le nombre a' lui aussi coefficient angulaire.

(**) L'équation (1) est un cas particulier de l'équation $y = ax + b$, résolue par rapport à l'ordonnée (§ 14). Le coefficient angulaire $a = 0$.

(***) L'équation (2) est un cas particulier de l'équation $x = a'y + b'$, résolue par rapport à l'abscisse (cf. § 14, renvoi). Le coefficient angulaire $a' = 0$.

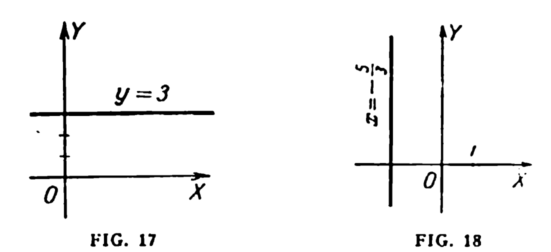


FIG. 17 FIG. 18

La valeur absolue de f donne la distance de cette droite à l'axe des ordonnées. Si $f > 0$, la droite est située « à droite » de l'axe des ordonnées (cf. fig. 16); si $f < 0$, elle est située « à gauche » de cet axe. L'axe des ordonnées lui-même est donné par l'équation

$$x = 0. \tag{2a}$$

EXEMPLE 1. Ecrire l'équation de la droite d'ordonnée à l'origine $b = 3$ et parallèle à l'axe OX (fig. 17).

RÉPONSE. $y = 3$.

EXEMPLE 2. Quelle courbe est représentée par l'équation $3x + 5 = 0$?

SOLUTION. Résolvant cette équation par rapport à x, nous obtenons $x = -\frac{5}{3}$. L'équation représente une droite parallèle à l'axe OY et située « à gauche » de celui-ci à une distance $\frac{5}{3}$ (fig. 18). On peut appeler la grandeur $f = -\frac{5}{3}$ abscisse à l'origine.

§ 16. Equation générale d'une droite

L'équation

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

(où A, B, C peuvent prendre des valeurs arbitraires si les coefficients A, B ne sont pas simultanément nuls [*]) représente une droite (cf.

[*] Si $A = B = 0$, on obtient soit l'identité $0 = 0$ (si $C = 0$), soit une expression absurde du genre $5 = 0$ (si $C \neq 0$).

§ § 14, 15). Toute droite peut être représentée par une équation de cette forme. C'est pourquoi on l'appelle *équation générale d'une droite.*

Si $A = 0$, c'est-à-dire si l'équation (1) ne contient pas x, elle représente une droite parallèle (*) à l'axe OX (§ 15).

Si $B = 0$, c'est-à-dire si l'équation (1) ne contient pas y, elle représente une droite parallèle (*) à l'axe OY.

Quand B n'est pas égal à zéro, l'équation (1) peut être résolue par rapport à l'ordonnée y; elle prend alors la forme

$$y = ax + b\left(\text{où } a = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}\right). \tag{2}$$

Ainsi l'équation $2x - 4y + 5 = 0$ ($A = 2$, $B = -4$, $C = 5$) prend la forme

$$y = 0{,}5x + 1{,}25$$

$\left(a = -\dfrac{2}{-4} = 0{,}5,\ b = \dfrac{-5}{-4} = 1{,}25\right)$, équation résolue par rapport à l'ordonnée (l'ordonnée à l'origine $b = 1{,}25$, le coefficient angulaire $a = 0{,}5$, de sorte que $\alpha \approx 26°34'$; cf. § 14).

De manière analogue, quand $A \neq 0$, l'équation (1) peut être résolue par rapport à x.

Si $C = 0$, c'est-à-dire si l'équation (1) ne contient pas de terme indépendant des coordonnées, elle représente une droite passant par l'origine (§ 8).

§ 17. Construction d'une droite d'après son équation

Pour construire une droite il suffit de porter deux de ses points. On peut, par exemple, prendre les points d'intersection avec les axes (si la droite n'est parallèle à aucun axe et ne passe pas par l'origine; dans le cas où la droite est parallèle à l'un des axes ou bien passe par l'origine nous n'avons qu'un point d'intersection). Pour plus de précision on peut porter encore un ou deux points.

EXEMPLE. Construire la droite $4x + 3y = 1$. Posant $y = 0$, nous trouvons (fig. 19) le point d'intersection de la droite avec l'axe des abs-

(*) On compte parmi les droites parallèles à l'axe OX cet axe lui-même. De même, on compte parmi les droites parallèles à l'axe OY l'axe OY lui-même.

cisses: $A_1\left(\frac{1}{4}, 0\right)$. Posant $x = 0$, nous trouvons le point d'intersection avec l'axe des ordonnées: $A_2\left(0, \frac{1}{3}\right)$. Ces points sont trop près l'un de l'autre. C'est pourquoi nous donnons encore deux valeurs à l'abscisse, par exemple $x = -3$ et $x = +3$. Nous trouvons les points $A_3\left(-3, \frac{13}{3}\right)$, $A_4\left(3, -\frac{11}{3}\right)$. Nous menons la droite $A_4A_1A_2A_3$.

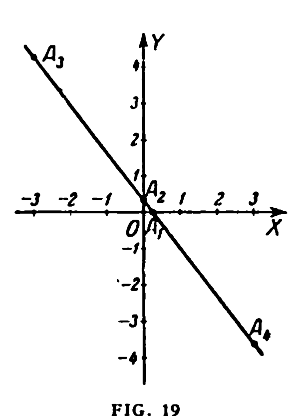


FIG. 19

§ 18. Condition de parallélisme de deux droites

La condition pour que les droites données par les équations

$$y = a_1x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x + b_2 \tag{2}$$

soient parallèles est l'égalité des coefficients angulaires

$$a_1 = a_2, \tag{3}$$

autrement dit, les droites (1) et (2) sont parallèles si leurs coefficients angulaires sont égaux, et non parallèles dans le cas contraire (*).

EXEMPLE 1. Les droites $y = 3x - 5$ et $y = 3x + 4$ sont parallèles, car leurs coefficients angulaires sont égaux ($a_1 = a_2 = 3$).

EXEMPLE 2. Les droites $y = 3x - 5$ et $y = 6x - 8$ ne sont pas parallèles, car leurs coefficients angulaires ne sont pas égaux ($a_1 = 3$, $a_2 = 6$).

EXEMPLE 3. Les droites $2y = 3x - 5$ et $4y = 6x - 8$ sont parallèles, car leurs coefficients angulaires sont égaux $\left(a_1 = \frac{3}{2},\ a_2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\right)$.

REMARQUE 1. Si l'équation de l'une des deux droites ne contient pas d'ordonnée (c'est-à-dire si la droite est parallèle à l'axe OY), cette

(*) Nous supposons ici, comme partout dans ce qui suit, que deux droites confondues sont parallèles.

droite est parallèle à l'autre si l'équation de cette dernière droite ne contient pas non plus y. Par exemple, les droites $2x + 3 = 0$ et $x = 5$ sont parallèles, et les droites $x - 3 = 0$ et $x - y = 0$ ne le sont pas.

REMARQUE 2. Si deux droites sont représentées par les équations

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

la condition de leur parallélisme est

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \tag{5}$$

ou, avec une autre notation (§ 12),

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0.$$

EXEMPLE 4. Les droites

$$2x - 7y + 12 = 0$$

et

$$x - 3{,}5y + 10 = 0$$

sont parallèles, car

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -3{,}5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3{,}5) - 1 \cdot (-7) = 0.$$

EXEMPLE 5. Les droites

$$2x - 7y + 12 = 0$$

et

$$3x + 2y - 6 = 0$$

ne sont pas parallèles, car

$$\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 25 \neq 0.$$

REMARQUE 3. On peut mettre l'égalité (5) sous la forme

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \tag{6}$$

autrement dit, la *condition de parallélisme des droites* (4) *est la proportionnalité des coefficients de leurs coordonnées courantes* (*). Comparer

---

(*) Il peut s'avérer que l'une des grandeurs A_2, B_2 (mais non toutes les deux simultanément; cf. § 16) soit nulle. On doit alors comprendre la proportion (6) dans le sens que le numérateur correspondant est aussi nul. La proportion (7) a ce même sens quand $C_2 = 0$.

les exemples 4 et 5. Si de plus les termes indépendants des coordonnées sont proportionnels, c'est-à-dire si

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

alors les droites (4) sont non seulement parallèles, mais confondues. Ainsi, les équations

$$3x + 2y - 6 = 0$$

et

$$6x + 4y - 12 = 0$$

représentent une seule et même droite.

§ 19. Intersection de deux droites

Pour trouver le point d'intersection des droites

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

et

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

on doit résoudre le système d'équations (1)-(2). Ce système admet généralement une solution unique qui nous donne le point cherché (§ 9). L'exception est constituée uniquement par le cas $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, autrement dit par le cas où les deux droites sont parallèles (cf. § 18, remarques 2 et 3).

Remarque. Si les droites données sont parallèles et non confondues, le système (1) - (2) n'a pas de solutions, et si elles coïncident, il admet une infinité de solutions.

Exemple 1. Trouver le point d'intersection des droites $y = 2x - 3$ et $y = -3x + 2$. Résolvant le système d'équations nous trouvons $x = 1$, $y = -1$. Ces droites se coupent au point (1, —1).

Exemple 2. Les droites

$$2x - 7y + 12 = 0, \quad x - 3{,}5y + 10 = 0$$

sont parallèles et non confondues, car les rapports 2 : 1 et (—7) : (—3,5) sont égaux entre eux, mais non égaux au rapport 12 : 10 (cf. exemple 4 § 18). Le système donné d'équations n'a pas de solutions.

EXEMPLE 3. Les droites $3x + 2y - 6 = 0$, $6x + 4y - 12 = 0$ sont confondues, car les rapports $3 : 6$, $2 : 4$ et $(-6) : (-12)$ sont égaux. La seconde équation s'obtient en multipliant la première par 2. Le système considéré admet une infinité de solutions.

§ 20. Condition de perpendicularité de deux droites

La condition de perpendicularité de deux droites données par les équations

$$y = a_1x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x + b_2 \tag{2}$$

est la relation

$$a_1a_2 = -1, \tag{3}$$

autrement dit, deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficients angulaires est égal à -1, et non perpendiculaires dans le cas contraire.

EXEMPLE 1. Les droites $y = 3x$ et $y = -\frac{1}{3}x$ sont perpendiculaires, car $a_1a_2 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1$.

EXEMPLE 2. Les droites $y = 3x$ et $y = \frac{1}{3}x$ ne sont pas perpendiculaires, car $a_1a_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$.

REMARQUE 1. Si l'équation de l'une des deux droites ne contient pas d'ordonnée (c'est-à-dire si cette droite est parallèle à l'axe OY), cette droite sera perpendiculaire à l'autre à condition que l'équation de cette dernière droite ne contienne pas d'abscisse (dans ce cas la seconde droite est parallèle à l'axe des abscisses). Dans le cas contraire, les droites ne sont pas perpendiculaires. Par exemple, les droites $x = 5$ et $3y + 2 = 0$ sont perpendiculaires, et les droites $x = 5$ et $y = 2x$ ne le sont pas.

REMARQUE 2. Si deux droites sont représentées par les équations

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{4}$$

leur condition de perpendicularité est

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{5}$$

EXEMPLE 3. Les droites $2x + 5y = 8$ et $5x - 2y = 3$ sont perpendiculaires; en effet, ici $A_1 = 2$, $A_2 = 5$, $B_1 = 5$, $B_2 = -2$, par conséquent, $A_1A_2 + B_1B_2 = 10 - 10 = 0$.

EXEMPLE 4. Les droites $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y = 0$ et $2x - 3y = 0$ ne sont pas perpendiculaires, car ici $A_1A_2 + B_1B_2 = 2$.

§ 21. Angle de deux droites

Soient L_1, L_2 deux droites non perpendiculaires (prises dans l'ordre donné) représentées par les équations

$$y = a_1x + b_1, \tag{1}$$

$$y = a_2x + b_2. \tag{2}$$

La formule (*)

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2} \tag{3}$$

exprime la tangente de l'angle dont on doit faire tourner la première droite pour qu'elle devienne parallèle à la seconde.

EXEMPLE 1. Trouver l'angle formé par les droites $y = 2x - 3$ et $y = -3x + 2$ (fig. 20).

Ici $a_1 = 2$, $a_2 = -3$. Nous trouvons d'après la formule (3):

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-3 - 2}{1 + 2 \cdot (-3)} = 1,$$

d'où $\theta = 45°$. Cela signifie que lorsqu'on fait tourner la droite $y = 2x - 3$ (AB sur la fig. 20) d'un angle de 45° autour du point d'intersection M $(1, -1)$ des droites données (exemple 1 § 19), elle se confond avec la droite $y = -3x + 2$ (CD sur la fig. 20). On peut prendre également $\theta = 180° + 45° = 225°$, $\theta = -180° + 45° = -135°$, etc. (Ces angles sont notés θ_1, θ_2 sur la fig. 20.)

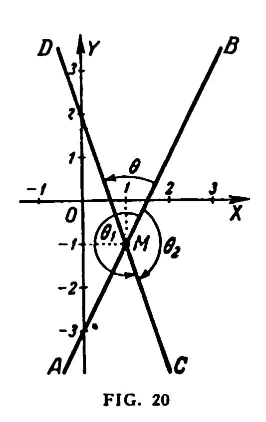


FIG. 20

(*) Pour l'applicabilité de cette formule au cas où les droites L_1 et L_2 sont perpendiculaires voir la remarque 1 de ce paragraphe.

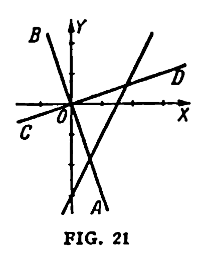


FIG. 21

EXEMPLE 2. Trouver l'angle compris entre les droites $y = -3x + 2$ et $y = 2x - 3$.

Les droites sont ici les mêmes que dans l'exemple 1, mais maintenant la droite CD (cf. fig. 20) est la première, et la droite AB la seconde. La formule (3) donne $\operatorname{tg} \theta = -1$, autrement dit $\theta = -45°$ (ou $\theta = 135°$, ou $\theta = -225°$, etc.). On doit faire tourner la droite CD de cet angle pour qu'elle soit confondue avec AB.

EXEMPLE 3. Trouver la droite passant par l'origine et coupant la droite $y = 2x - 3$ sous un angle de 45°.

SOLUTION. La droite cherchée est représentée par l'équation $y = ax$ (§ 14). On peut trouver le coefficient angulaire a à partir de (3) en prenant au lieu de a_1 le coefficient angulaire de la droite donnée (autrement dit en posant $a_1 = 2$); nous remplaçons a_2 par le coefficient angulaire a de la droite cherchée et θ par l'angle $+45°$ ou $-45°$. Nous obtenons:

$$\frac{a-2}{1+2a} = \pm 1.$$

Le problème a deux solutions: $y = -3x$ (la droite AB sur la fig. 21) et $y = \frac{1}{3}x$ (la droite CD).

REMARQUE 1. Si les droites (1) et (2) sont perpendiculaires ($\theta = \pm 90°$), l'expression $1 + a_1a_2$ figurant au dénominateur de (3) s'annule (§ 20) et le rapport $\frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}$ cesse d'exister (*). Simultanément $\operatorname{tg} \theta$ cesse d'exister (« devient infini »). La formule (3) n'a plus de sens, mais dans notre cas il faut la comprendre conventionnellement. Précisément, chaque fois que le dénominateur de (3) s'annule, on suppose que l'angle θ est égal à $\pm 90°$ (une rotation de $+90°$, comme de $-90°$ fait coïncider l'une de deux droites perpendiculaires avec l'autre).

EXEMPLE 4. Trouver l'angle compris entre les droites $y = 2x - 3$ et $y = -\frac{1}{2}x + 7$ $\left(a_1 = 2,\ a_2 = -\frac{1}{2}\right)$. Si l'on se demande au préalable si ces deux droites sont perpendiculaires, nous obtenons d'après le critère (3) § 20 une réponse affirmative, de sorte que sans même ap-

(*) Le numérateur $a_2 - a_1$ n'est pas nul, car ce n'est que pour des droites parallèles que les coefficients angulaires a_1, a_2 sont égaux (§ 18).

pliquer la formule (3) nous obtenons $\theta = \pm 90°$. La formule (3) donne le même résultat. Nous obtenons:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{-\frac{1}{2} - 2}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2} = \frac{-2\frac{1}{2}}{0}.$$

Conformément à la remarque 1, cette égalité doit être comprise dans le sens que $\theta = \pm 90°$.

REMARQUE 2. Si l'une au moins des droites L_1, L_2 (ou les deux) est parallèle à l'axe OY, la formule (3) ne peut être appliquée, car dans ce cas on ne peut représenter l'une des droites (ou les deux) (§ 15) par une équation de la forme (1). Dans ce cas on détermine l'angle θ de la manière suivante:

a) quand la droite L_2 est parallèle et L_1 n'est pas parallèle à l'axe OY, nous appliquons la formule

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{a_1};$$

b) quand la droite L_1 est parallèle et L_2 n'est pas parallèle à l'axe OY, nous appliquons la formule

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{1}{a_2};$$

c) quand les deux droites sont parallèles à l'axe OY, elles sont parallèles entre elles, de sorte que $\operatorname{tg} \theta = 0$.

REMARQUE 3. L'angle formé par deux droites données par les équations

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{4}$$

et

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{5}$$

peut être trouvé d'après la formule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \tag{6}$$

Quand $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, la formule (6) comprise conventionnellement (cf. remarque 1) donne $\theta = \pm 90°$. Cf. § 20, formule (5).

§ 22. Condition pour que trois points soient alignés

Trois points $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ sont sur une même droite si, et seulement si,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Cette formule exprime également le fait (§ 13) que l'aire du « triangle » $A_1A_2A_3$ est nulle.

EXEMPLE 1. Les points $A_1(-2, 5)$, $A_2(4, 3)$, $A_3(16, -1)$ sont sur une même droite, car

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4+2 & 3-5 \\ 16+2 & -1-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 18 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot (-6) - (-2) \cdot 18 = 0.$$

EXEMPLE 2. Les points $A_1(-2, 6)$, $A_2(2, 5)$, $A_3(5, 3)$ ne sont pas situés sur une même droite, car

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+2 & 5-6 \\ 5+2 & 3-6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5.$$

§ 23. Equation d'une droite passant par deux points

La droite passant par deux points $A_1(x_1, y_1)$ et $A_2(x_2, y_2)$ est représentée par l'équation (*)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Elle exprime le fait que les points donnés A_1, A_2 et le point « courant » $A(x, y)$ sont situés sur une même droite (§ 22).

L'équation (1) peut être mise sous la forme (cf. remarque ci-dessous)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (2)$$

(*) Le premier membre de l'équation (1) est écrit sous forme de déterminant (cf. § 12).

Cette équation exprime la proportionnalité des côtés des triangles rectangles A_1RA et A_1SA_2 représentés sur la fig. 22, où

$$x_1 = OP_1, \quad x_2 = OP_2, \quad x = OP,$$
$$x - x_1 = A_1R, \quad x_2 - x_1 = A_1S,$$
$$y_1 = P_1A_1, \quad y_2 = P_2A_2, \quad y = PA.$$
$$y - y_1 = RA, \quad y_2 - y_1 = SA_2.$$

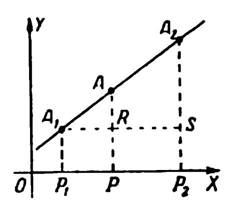


FIG. 22

EXEMPLE 1. Ecrire l'équation de la droite passant par les points (1, 5) et (3, 9).

SOLUTION. La formule (1) donne:

$$\begin{vmatrix} 3-1 & 9-5 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix} = 0, \text{ autrement dit } \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ x-1 & y-5 \end{vmatrix} = 0,$$

soit $2(y-5) - 4(x-1) = 0$ ou $2x - y + 3 = 0$.

La formule (2) donne $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-5}{4}$. Nous en tirons de nouveau $2x - y + 3 = 0$.

REMARQUE. Dans le cas où $x_2 = x_1$ (ou $y_2 = y_1$) l'un des dénominateurs dans l'égalité (2) est nul; il faut alors comprendre l'équation (2) dans ce sens que le numérateur correspondant est nul. Cf. exemple 2 (et aussi le renvoi de la page 34).

EXEMPLE 2. Ecrire l'équation de la droite passant par les points $A_1(4, -2)$ et $A_2(4, 5)$. L'équation (1) donne:

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ x-4 & y+2 \end{vmatrix} = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire $0(y+2) - 7(x-4) = 0$, c'est-à-dire $x - 4 = 0$.

L'équation (2) s'écrit sous la forme

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y+2}{7}; \tag{4}$$

ici le dénominateur du premier membre est nul. Comprenant l'équation (4) dans le sens que nous venons d'indiquer, nous posons le numérateur du premier membre égal à zéro. Nous obtenons le résultat précédent $x - 4 = 0$.

§ 24. Faisceau de droites

Une multitude de droites passant par un point $A_1(x_1, y_1)$ forment un *faisceau* (fig. 23). Le point A_1 est appelé *centre du faisceau*. Chacune des droites du faisceau (sauf celle qui est parallèle à l'axe des ordonnées, cf. remarque 1) peut être représentée par l'équation

$$y - y_1 = k(x - x_1). \tag{1}$$

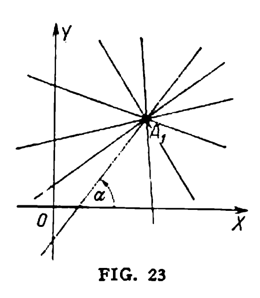


FIG. 23

Ici k est le coefficient angulaire de la droite considérée ($k = \operatorname{tg} \alpha$). L'équation (1) est appelée *équation du faisceau.* La grandeur k (le *paramètre* du faisceau) caractérise la direction de la droite; elle varie d'une droite du faisceau à l'autre.

On peut trouver la valeur du paramètre k si l'on donne encore une condition quelconque (en plus de la condition d'appartenance au faisceau) qui détermine la position de la droite; cf. exemple 2.

EXEMPLE 1. Former l'équation du faisceau de centre au point $A_1(-4, -8)$.

SOLUTION. Conformément à (1) nous avons:

$$y + 8 = k(x + 4).$$

EXEMPLE 2. Trouver l'équation de la droite passant par le point $A_1(1, 4)$ et perpendiculaire à la droite $3x - 2y = 12$.

SOLUTION. La droite cherchée appartient au faisceau de centre $(1, 4)$. L'équation de ce faisceau est $y - 4 = k(x - 1)$. Pour trouver la valeur du paramètre k, nous tenons compte du fait que la droite cherchée est perpendiculaire à la droite $3x - 2y = 12$; le coefficient angulaire de cette dernière est $\frac{3}{2}$. Nous avons (§ 20) $\frac{3}{2} k = -1$, c'est-à-dire $k = -\frac{2}{3}$. La droite cherchée est représentée par l'équation $y - 4 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ ou $y = -\frac{2}{3}x + 4\frac{2}{3}$.

REMARQUE 1. La droite appartenant au faisceau de centre $A_1(x_1, y_1)$ et parallèle à l'axe OY est représentée par l'équation $x - x_1 = 0$; cette équation ne peut être obtenue de (1) quelle que soit la valeur de k. Toutes les droites du faisceau, sans aucune exception, peuvent être représentées par l'équation

$$l(y - y_1) = m(x - x_1), \tag{2}$$

où l et m sont des nombres arbitraires (non simultanément nuls). Quand $l \neq 0$, nous pouvons diviser l'équation (2) par l. Alors en posant $\frac{m}{l} = k$ nous obtenons (1). Si par contre on pose $l = 0$, l'équation (2) prend la forme $x - x_1 = 0$.

REMARQUE 2. L'équation du faisceau auquel appartiennent deux droites concourantes L_1, L_2, données par les équations:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

est de la forme

$$m_1(A_1x + B_1y + C_1) + m_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \tag{3}$$

Ici m_1 et m_2 sont des nombres arbitraires (non simultanément nuls). En particulier, quand $m_1 = 0$, nous obtenons la droite L_2, quand $m_2 = 0$, la droite L_1. Au lieu de (3) on peut écrire l'équation

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{4}$$

ici seule λ prend des valeurs arbitraires, mais on ne peut obtenir de (4) l'équation de la droite L_2.

L'équation (1) est un cas particulier de l'équation (4) pour lequel les droites L_1 et L_2 sont données par les équations $y = y_1$, $x = x_1$ (elles sont alors parallèles aux axes de coordonnées).

EXEMPLE 3. Ecrire l'équation de la droite passant par le point d'intersection des droites $2x - 3y - 1 = 0$, $3x - y - 2 = 0$ et perpendiculaire à la droite $y = x$.

SOLUTION. La droite cherchée (elle n'est certainement pas confondue avec la droite $3x - y - 2 = 0$) appartient au faisceau

$$2x - 3y - 1 + \lambda(3x - y - 2) = 0. \tag{5}$$

Le coefficient angulaire de la droite (5) est $k = \frac{3\lambda + 2}{\lambda + 3}$. Comme la droite cherchée est perpendiculaire à la droite $y = x$, on a (§ 20) $k = -1$. Par conséquent, $\frac{3\lambda + 2}{\lambda + 3} = -1$, c'est-à-dire $\lambda = -\frac{5}{4}$. Portant $\lambda = -\frac{5}{4}$ dans (5), nous trouvons après simplifications:

$$7x + 7y - 6 = 0.$$

REMARQUE 3. Si les droites L_1 et L_2 sont parallèles (mais non confondues), l'équation (3) représente pour toutes les valeurs possibles de m_1, m_2 toutes les droites parallèles à deux droites données. Un ensemble de droites parallèles est appelé *faisceau de droites parallèles*. L'équation (3) représente donc soit un faisceau de droites concourantes, soit un faisceau de droites parallèles.

§ 25. Equation d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée

1. La droite passant par le point $M_1(x_1, y_1)$ et parallèle à la droite $y = ax + b$ est représentée par l'équation

$$y - y_1 = a(x - x_1). \tag{1}$$

Cf. § 24.

EXEMPLE 1. Ecrire l'équation de la droite passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite

$$5x - 7y - 4 = 0.$$

Solution. On peut représenter la droite donnée par l'équation $y = \frac{5}{7}x - \frac{4}{7}$ $\left(\text{ici } a = \frac{5}{7}\right)$. L'équation de la droite cherchée est $y - 5 = \frac{5}{7}[x - (-2)]$, c'est-à-dire $7(y - 5) = 5(x + 2)$ ou $5x - 7y + 45 = 0$.

2. La droite passant par le point $M_1(x_1, y_1)$ et parallèle à la droite $Ax + By + C = 0$ est représentée par l'équation

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (2)$$

Exemple 2. Résolvant l'exemple 1 ($A = 5$, $B = -7$) d'après la formule (2), nous trouvons $5(x + 2) - 7(y - 5) = 0$.

Exemple 3. Ecrire l'équation de la droite passant par le point $(-2, 5)$ et parallèle à la droite $7x + 10 = 0$.

Solution. Ici $A = 7$, $B = 0$. La formule (2) donne $7(x + 2) = 0$, c'est-à-dire $x + 2 = 0$. La formule (1) ne peut être appliquée, car on ne peut résoudre l'équation donnée par rapport à y (la droite considérée est parallèle à l'axe des ordonnées, cf. § 15).

§ 26. Equation d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à une autre droite

1. La droite passant par le point $M_1(x_1, y_1)$ et perpendiculaire à la droite $y = ax + b$ est représentée par l'équation

$$y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1). \qquad (1)$$

Cf. § 24, exemple 2.

Exemple 1. Ecrire l'équation de la droite passant par le point $(2, -1)$ et perpendiculaire à la droite

$$4x - 9y = 3.$$

Solution. On peut représenter la droite considérée par l'équation $y = \frac{4}{9}x - \frac{1}{3}$ $\left(a = \frac{4}{9}\right)$. L'équation de la droite cherchée est $y + 1 = -\frac{9}{4}(x - 2)$, c'est-à-dire $9x + 4y - 14 = 0$.

2. La droite passant par le point $M_1(x_1, y_1)$ et perpendiculaire à la droite $Ax + By + C = 0$ est représentée par l'équation

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0. \qquad (2)$$

EXEMPLE 2. Résolvant l'exemple 1 ($A = 4$, $B = -9$) à l'aide de la formule (2) nous trouvons $4(y + 1) + 9(x - 2) = 0$, c'est-à-dire $9x + 4y - 14 = 0$.

EXEMPLE 3. Ecrire l'équation de la droite passant par le point $(-3, -2)$ et perpendiculaire à la droite

$$2y + 1 = 0.$$

SOLUTION. Ici $A = 0$, $B = 2$. La formule (2) donne $-2(x + 3) = 0$, c'est-à-dire $x + 3 = 0$. La formule (1) ne peut être appliquée, car $a = 0$ (cf. § 20, remarque 1).

§ 27. Position relative d'une droite et de deux points

La position relative des points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et de la droite

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

peut être déterminée d'après les critères suivants:

a) les points M_1 et M_2 sont situés d'un même côté de la droite (1) quand les nombres $Ax_1 + By_1 + C_1$ et $Ax_2 + By_2 + C_2$ sont de même signe;

b) M_1 et M_2 sont situés de part et d'autre de la droite (1) quand ces nombres sont de signes contraires;

c) l'un des points M_1, M_2 (ou les deux) est situé sur la droite (1) si l'un de ces nombres (ou les deux) est nul.

EXEMPLE 1. Les points $(2, -6)$, $(-4, -2)$ sont situés d'un meme côté de la droite

$$3x + 5y - 1 = 0,$$

puisque les nombres $3 \cdot 2 + 5 \cdot (-6) - 1 = -25$ et $3 \cdot (-4) + 5 \cdot (-2) - 1 = -23$ sont tous deux négatifs.

EXEMPLE 2. L'origine des coordonnées $(0, 0)$ et le point $(5, 5)$ sont situés de part et d'autre de la droite $x + y - 8 = 0$, car les nombres $0 + 0 - 8 = -8$ et $5 + 5 - 8 = +2$ sont de signes différents.

§ 28. Distance d'un point à une droite

La distance d du point $M_1(x_1, y_1)$ à la droite

$$Ax + By + C = 0 \tag{1}$$

est égale à la valeur absolue de la grandeur

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \tag{2}$$

c'est-à-dire (*)

$$d = |\delta| = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|. \tag{3}$$

EXEMPLE. Trouver la distance du point $(-1, +1)$ à la droite

$$3x - 4y + 5 = 0.$$

SOLUTION.

$$\delta = \frac{3x_1 - 4y_1 + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{3 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 + 5}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{2}{5},$$

$$d = |\delta| = \left| -\frac{2}{5} \right| = \frac{2}{5}.$$

REMARQUE 1. Supposons que la droite (1) ne passe pas par l'origine O et que par conséquent $C \neq 0$ (§ 16). Si de plus les signes de δ et C sont identiques, les points M_1 et O sont situés d'un même côté de la droite (1); si les signes sont contraires, les points sont situés de part et d'autre de cette droite (cf. § 27); si $\delta = 0$ (ce qui n'est possible que si $Ax_1 + By_1 + C = 0$), alors M_1 est situé sur la droite donnée (§ 8).

La grandeur δ est la distance affectée d'un signe du point M_1 à la droite (1). Dans l'exemple considéré la distance δ est égale à $-\frac{2}{5}$, et $C = 5$. Les signes de δ et de C sont contraires, par conséquent, les points $M_1(-1, +1)$ et O sont situés de part et d'autre de la droite $3x - 4y + 5 = 0$.

REMARQUE 2. La manière la plus simple pour établir la formule (3) est la suivante.

Soit $M_2(x_2, y_2)$ (fig. 24) le pied de la perpendiculaire abaissée du point $M_1(x_1, y_1)$ sur la droite (1). On a alors

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{4}$$

Nous trouvons les coordonnées x_2, y_2 en résolvant le système

$$Ax + By + C = 0, \tag{1}$$

$$A(y - y_1) - B(x - x_1) = 0, \tag{5}$$

où la seconde équation représente la droite M_1M_2 (§ 26). Pour faciliter les calculs, transformons la première équation du système en l'écrivant sous la forme

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + Ax_1 + By_1 + C = 0. \tag{6}$$

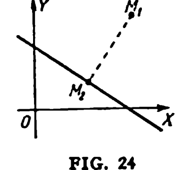


FIG. 24

Résolvant (5) et (6) par rapport à $(x - x_1)$, $(y - y_1)$ nous trouvons:

$$x - x_1 = -\frac{A}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C), \tag{7}$$

$$y - y_1 = -\frac{B}{A^2 + B^2}(Ax_1 + By_1 + C). \tag{8}$$

(*) On établit habituellement la formule (3) à l'aide d'une construction artificielle; nous indiquons plus bas (cf. remarque 2) une démonstration analytique.

Portant (7) et (8) dans (4) il vient:

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

§ 29. Paramètres polaires d'une droite [*]

On peut donner la position d'une droite dans un plan à l'aide de deux nombres que l'on appelle *paramètres* de la droite. Ainsi, les nombres b (ordonnée à l'origine) et a (coefficient angulaire) sont (cf. § 14) les paramètres de la droite. Toutefois, ces paramètres b et a ne sont pas valables pour toutes les droites; ils ne permettent pas de définir une droite parallèle à l'axe OY (§ 15). Par contre les paramètres polaires (cf. plus bas) permettent de donner la position de *n'importe quelle* droite.

On appelle *distance polaire* de la droite UV (fig. 25) la longueur p de la perpendiculaire OK abaissée de l'origine O sur cette droite. La distance polaire est positive ou nulle ($p \geqslant 0$).

On appelle *angle polaire* de la droite UV l'angle $\alpha = \widehat{XOK}$ compris entre les rayons OX et OK (pris dans cet ordre; cf. § 21). Si la droite UV ne passe pas par l'origine (comme sur la fig. 25), la direction du second rayon est bien déterminée (de O à K); si par contre UV passe par O (O et K sont confondus), alors le rayon perpendiculaire à UV est mené suivant l'une quelconque des deux directions possibles.

La distance polaire et l'angle polaire sont appelés les *paramètres polaires* de la droite.

Si la droite UV est représentée par l'équation

$$Ax + By + C = 0,$$

alors la distance polaire s'exprime par la formule

$$p = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (1)$$

et l'angle polaire α par les formules

$$\cos\alpha = \mp \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \mp \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \qquad (2)$$

où l'on prend les signes supérieurs si $C > 0$ et les signes inférieurs si $C < 0$; si $C = 0$,

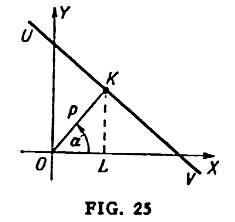


FIG. 25

[*] Ce paragraphe sert d'introduction aux §§ 30 et 31.

alors on choisit arbitrairement soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs [*].

EXEMPLE 1. Trouver les paramètres polaires de la droite

$$3x - 4y + 10 = 0.$$

SOLUTION. La formule (1) donne $p = \frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$. Les formules (2), où l'on doit prendre les signes supérieurs (car $C = +10$), donnent

$$\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}} = -\frac{3}{5}; \quad \sin\alpha = -\frac{(-4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = +\frac{4}{5}.$$

Par conséquent, $\alpha \approx 127°$ (ou $\alpha \approx 487°$, etc.).

EXEMPLE 2. Trouver les paramètres polaires de la droite

$$3x - 4y = 0.$$

La formule (1) donne $p = 0$; dans les formules (2) on peut prendre soit uniquement les signes supérieurs, soit uniquement les signes inférieurs. Dans le premier cas $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$; d'où $\alpha \approx 127°$; dans le second cas $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$, d'où $\alpha \approx -53°$.

---

[*] La formule (1) s'obtient de (3) § 28 (pour $x_1 = y_1 = 0$). Les formules (2) s'obtiennent ainsi: d'après la fig. 25

$$\cos\alpha = \frac{OL}{OK} = \frac{x}{p}, \quad \sin\alpha = \frac{LK}{OK} = \frac{y}{p}. \quad (3)$$

Conformément à (7), (8) § 28 (pour $x_1 = y_1 = 0$) nous avons:

$$x = -\frac{AC}{A^2+B^2}, \quad y = -\frac{BC}{A^2+B^2}. \quad (4)$$

Il découle de (1), (3), (4) que

$$\cos\alpha = -\frac{C}{|C|}\cdot\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = -\frac{C}{|C|}\cdot\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}. \quad (5)$$

La formule (5) est identique à (2), car $\frac{C}{|C|} = +1$ si $C > 0$ et $\frac{C}{|C|} = -1$ si $C < 0$.

§ 30. Equation normale d'une droite

Une droite dont la distance polaire est p (§ 29) et l'angle polaire α est représentée par l'équation

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \tag{1}$$

Elle est appelée *équation normale ou polaire de la droite.*

Exemple. Soient

$$OK = \sqrt{2}$$

la distance de la droite UV à l'origine (fig. 26) et $\alpha = 225°$ l'angle formé par les rayons OK et OX. L'équation normale de la droite UV est alors

$$x \cos 225° + y \sin 225° - \sqrt{2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y - \sqrt{2} = 0.$$

Multipliant par $-\sqrt{2}$ nous obtenons l'équation de la droite UV sous la forme $x + y + 2 = 0$, mais cette équation n'est déjà plus normale.

Déduction de l'équation (1). Désignons par x_1, y_1 les coordonnées du point K (fig. 27). Alors $x_1 = OL = p \cos \alpha$, $y_1 = LK = p \sin \alpha$. La droite OK passant par les points $O(0, 0)$ et $K(x_1, y_1)$ est représentée (§ 23) par l'équation $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $(\sin \alpha)\, x - (\cos \alpha)\, y = 0$. La droite UV passe par $K\ (x_1, y_1)$ et est perpendiculaire à la droite OK. Cela signifie (§ 26,2) qu'elle est représentée par l'équation $\sin \alpha (y - y_1) - (-\cos \alpha)(x - x_1) = 0$. Portant ici $x_1 = p \cos \alpha$ et $y_1 = p \sin \alpha$, nous obtenons $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

§ 31. Réduction de l'équation d'une droite à la forme normale

Pour trouver l'équation normale d'une droite donnée par l'équation $Ax + By + C = 0$, il suffit de diviser cette équation par $\mp \sqrt{A^2 + B^2}$, en prenant le signe supérieur si $C > 0$ et le signe inférieur si $C < 0$;

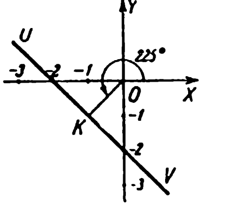


FIG. 26

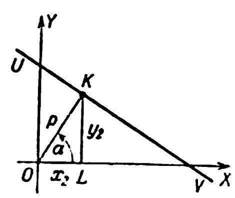


FIG. 27

si $C = 0$, on peut prendre n'importe quel signe. Nous obtenons l'équation normale [*]

$$\mp \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\, x \mp \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\, y - \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

EXEMPLE 1. Réduire l'équation $3x - 4y + 10 = 0$ à la forme normale.

Ici $A = 3$, $B = -4$ et $C = 10 > 0$. C'est pourquoi nous divisons par $-\sqrt{3^2+4^2} = -5$. Nous obtenons

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0.$$

C'est une équation de la forme $x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$. Plus précisément $p = 2$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, $\sin\alpha = +\frac{4}{5}$ (donc $\alpha \approx 127°$).

EXEMPLE 2. Réduire l'équation $3x - 4y = 0$ à la forme normale.

Etant donné que $C = 0$, on peut diviser soit par 5, soit par -5. Dans le premier cas nous obtenons

$$\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y = 0$$

($p = 0$, $\alpha \approx 307°$) et dans le second cas

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0$$

($p = 0$, $\alpha \approx 127°$). A ces deux valeurs de α correspondent deux sens positifs sur le rayon OK (cf. § 29).

§ 32. Segments sur les axes

Pour trouver le segment $OL = a$ (fig. 28) que la droite UV détermine sur l'axe des abscisses, il suffit de poser dans l'équation de la droite $y = 0$ et de résoudre l'équation par rapport à x. On cherche de même le segment $ON = b$ sur l'axe des ordonnées. Les valeurs a et b peuvent être positives comme négatives. Si la droite est parallèle à l'un des axes, le segment correspondant n'existe pas (« il devient infini »). Si la droite passe par l'origine, chaque segment dégénère en un point ($a = b = 0$).

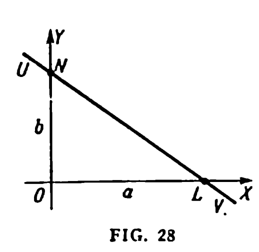


FIG. 28

EXEMPLE 1. Trouver les segments a, b déterminés par la droite $3x - 2y + 12 = 0$ sur les axes.

---

[*] En effet les coefficients de x et de y sont respectivement $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ en vertu de (2) § 29 et le terme indépendant des coordonnées est égal à $(-p)$ en vertu de (1) § 29.

SOLUTION. Nous posons $y = 0$ et de l'équation $3x + 12 = 0$ nous trouvons $x = -4$. Posant $x = 0$, nous trouvons de l'équation $-2y + 12 = 0$ que $y = 6$. Ainsi $a = -4$, $b = 6$.

EXEMPLE 2. Trouver les segments a, b déterminés sur les axes par la droite

$$5y + 15 = 0.$$

SOLUTION. Cette droite est parallèle à l'axe des abscisses (§ 15). Le segment a n'existe pas (posant $y = 0$, nous obtenons la relation contradictoire $15 = 0$). Le segment b est égal à -3.

EXEMPLE 3. Trouver les segments a, b déterminés sur les axes par la droite

$$3y - 2x = 0.$$

SOLUTION. Suivant le procédé que nous venons d'exposer nous trouvons $a = 0$, $b = 0$. L'extrémité de chacun des « segments » coïncide avec son origine, autrement dit le segment dégénère en un point. La droite passe par l'origine (cf. § 14).

§ 33. Equation d'une droite donnée par ses coordonnées à l'origine

Si une droite détermine sur les axes des segments a, b (non nuls), on peut la représenter par l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

Inversement l'équation (1) représente une droite déterminant sur les axes (à partir de l'origine O) des segments a, b.

L'équation (1) est appelée ***équation de la droite donnée par ses coordonnées à l'origine.***

EXEMPLE. Trouver l'équation de la droite

$$3x - 2y + 12 = 0 \qquad (2)$$

définie par ses coordonnées à l'origine.

SOLUTION. Nous trouvons (§ 32, exemple 1) $a = -4$, $b = 6$. L'équation est

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{6} = 1. \qquad (3)$$

Elle est équivalente à l'équation (2).

REMARQUE 1. La droite déterminant sur les axes des segments nuls (c'est-à-dire passant par l'origine; cf. exemple 3 § 32) ne peut être représentée par une équation donnée par les coordonnées à l'origine.

REMARQUE 2. Une droite parallèle à l'axe OX (§ 32, exemple 2) peut être représentée par l'équation $\frac{y}{b} = 1$, où b est le segment découpé sur l'axe OY. D'une manière analogue, on peut représenter une droite parallèle à l'axe OY par l'équation $\frac{x}{a} = 1$. On admet ou non que ces équations sont des « équations de la droite donnée par les coordonnées à l'origine » (il n'existe pas de décision universellement adoptée dans la littérature) (*).

§ 34. Transformation des coordonnées (position du problème)

Une même courbe est représentée par des équations differentes dans différents systèmes de coordonnées. On a souvent besoin, sachant l'équation d'une courbe dans un certain système de coordonnées, de trouver l'équation de cette courbe dans un autre système de coordonnées. On emploie à cette fin les *formules de transformation des coordonnées*. Elles établissent un lien entre les anciennes et les nouvelles coordonnées d'un certain point M.

Tout nouveau système de coordonnées rectangulaires $X'O'Y'$ peut être obtenu de n'importe quel ancien système XOY (fig. 29) à l'aide de deux mouvements: 1) en premier lieu nous faisons coïncider l'origine O avec le point O', tout en conservant les directions des axes; nous obtenons un système auxiliaire $\bar{X}O'\bar{Y}$ (en pointillé); 2) nous effectuons ensuite une rotation du système auxiliaire autour du point O' jusqu'à ce qu'il soit confondu avec le nouveau système $X'O'Y'$.

FIG. 29

Ces deux mouvements peuvent être effectués dans l'ordre inverse (d'abord une rotation autour du centre O, donnant un système auxiliaire $\bar{X}O\bar{Y}$, puis une trans-

(*) Il est essentiel que l'équation $\frac{x}{a} = 1$ ou $\frac{y}{b} = 1$ se déduit de l'équation $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ non comme un cas particulier, mais à l'aide d'un passage à la limite (pour b ou a infini).

lation de l'origine au point O', donnant le nouveau système $X'O'Y'$; fig. 30).

Donc il suffit de connaître les formules de transformation des coordonnées lors de la translation de l'origine (§ 35) et de la rotation des axes (§ 36).

§ 35. Translation de l'origine

NOTATIONS (fig. 31):

anciennes coordonnées du point M: $x = OP$, $y = PM$;
nouvelles coordonnées du point M: $x' = O'P'$, $y' = P'M$;
coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien système XOY:

$$x_0 = OR, \qquad y_0 = RO'.$$

Les formules de translation sont:

$$x = x' + x_0, \qquad y = y' + y_0, \tag{1}$$

ou

$$x' = x - x_0, \qquad y' = y - y_0. \tag{2}$$

Donc *l'ancienne coordonnée est égale à la nouvelle à laquelle on a ajouté la coordonnée de la nouvelle origine* (dans l'ancien système) (*).

EXEMPLE 1. L'origine des coordonnées a été transférée au point (2, — 5). Trouver les nouvelles coordonnées du point M (— 3, 4).

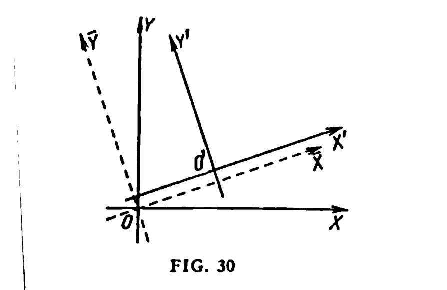


FIG. 30

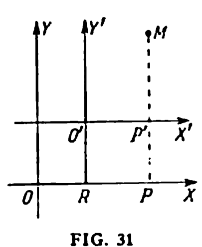


FIG. 31

(*) Pour bien retenir cette règle ne lisez pas l'expression entre parenthèses; elle est [im]portante, mais peut être aisément rétablie d'après le sens.

Solution. Nous avons:

$$x_0 = 2, \quad y_0 = -5, \quad x = -3, \quad y = 4.$$

Nous trouvons d'après les formules (2):

$$x' = -3 - 2 = -5, \quad y' = 4 + 5 = 9.$$

Exemple 2. L'équation d'une certaine courbe est

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y = 36.$$

Quelle sera l'équation de cette courbe si l'on transfère l'origine au point O' (2, — 3)?

Solution. Conformément aux formules (1) nous avons:

$$x = x' + 2 \quad \text{et} \quad y = y' - 3.$$

Portons ces expressions dans l'équation donnée. Nous obtenons:

$$(x' + 2)^2 + (y' - 3)^2 - 4(x' + 2) + 6(y' - 3) = 36,$$

ou après simplifications

$$x'^2 + y'^2 = 49.$$

C'est la nouvelle équation de notre courbe. On voit que c'est l'équation d'une circonférence (§ 38) de rayon $R = 7$ et de centre au point O'.

§ 36. Rotation des axes

Notations (fig. 32):

anciennes coordonnées du point M: $x = OP, y = PM$;

nouvelles coordonnées du point M: $x' = OP', y' = P'M$;

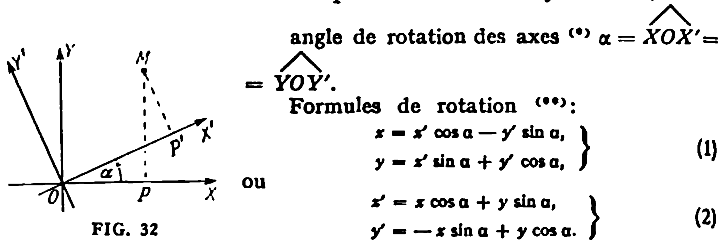


FIG. 32

angle de rotation des axes (*) $\alpha = \widehat{XOX'} = \widehat{YOY'}$.

Formules de rotation (**):

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

ou

$$\left.\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha + y \sin\alpha, \\ y' &= -x \sin\alpha + y \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(*) En ce qui concerne le signe de l'angle α cf. § 14, renvoi p. 29.

(**) Pour bien retenir les formules (1) remarquez que dans l'expression de x tout est « en désordre » (le cosinus figure avant le sinus, entre les termes du second membre figure le signe moins). Au contraire dans l'expression de y tout est « en ordre » (d'abord le sinus, puis le cosinus et entre les termes il y a le signe plus).

Les formules (2) s'obtiennent de (1) en remplaçant α par $-\alpha$ et les notations x, y respectivement par x', y' et vice versa.

EXEMPLE 1. L'équation $2xy = 49$ représente une courbe formée de deux branches LAN et $L'A'N'$ (fig. 33) (elle est appelée *hyperbole équilatère*). Trouver l'équation de cette courbe après une rotation des axes d'un angle de 45°.

SOLUTION. Les formules (1) s'écrivent pour $\alpha = 45°$

$$x = x'\frac{\sqrt{2}}{2} - y'\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$y = x'\frac{\sqrt{2}}{2} + y'\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

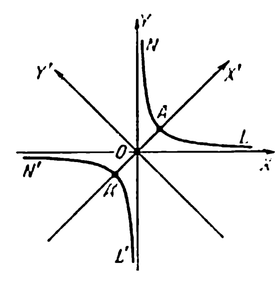


FIG. 33

Portons ces expressions dans l'équation donnée. Nous obtenons:

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (x' - y')(x' + y') = 49,$$

et après simplifications

$$x'^2 - y'^2 = 49.$$

EXEMPLE 2. Avant une rotation des axes d'un angle de $-20°$ le point M avait une abscisse $x = 6$ et une ordonnée $y = 0$. Trouver les coordonnées du point M après la rotation des axes.

SOLUTION. Nous trouvons les nouvelles coordonnées x', y' du point M en appliquant les formules (2) où l'on doit poser $x = 6$, $y = 0$, $\alpha = -20°$. Nous obtenons:

$$x' = 6 \cos(-20°) \approx 5{,}64,$$

$$y' = -6 \sin(-20°) \approx 2{,}05.$$

§ 37. Courbes algébriques et leur degré

Une équation de la forme

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

où l'une au moins des grandeurs A, B n'est pas nulle, est appelée *équation algébrique du premier degré* (à deux inconnues x, y). Elle représente toujours une droite.

On appelle *équation algébrique du second degré* toute équation de la forme

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (2)$$

où l'une au moins des grandeurs A, B, C n'est pas nulle.

Toute équation équivalente à l'équation (2) est aussi appelée équation algébrique du second degré.

EXEMPLE 1. L'équation $y = 5x^2$, équivalente à $5x^2 - y = 0$, est une équation algébrique du second degré ($A = 5$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$, $E = -1$, $F = 0$).

EXEMPLE 2. L'équation $xy = 1$, équivalente à $xy - 1 = 0$, est une équation algébrique du second degré ($A = 0$, $B = 1$, $C = 0$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -1$).

EXEMPLE 3. L'équation $(x + y + 2)^2 - (x + y + 1)^2 = 0$ est une équation du premier degré, car elle est équivalente à $2x + 2y + 3 = 0$.

On définit d'une manière analogue les équations algébriques du troisième, quatrième, cinquième, etc., degré. Les grandeurs A, B, C, D, etc. (ainsi que le terme indépendant des coordonnées) sont appelées les *coefficients* de l'équation algébrique.

Si une courbe L est représentée dans un système de coordonnées cartésiennes par une équation algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré, alors dans tout autre système cartésien elle est représentée par une équation algébrique du même degré. Toutefois les valeurs de tous les coefficients de l'équation (ou de certains d'entre eux) changent ; en particulier quelques-uns peuvent s'annuler.

La courbe L représentée (dans un système cartésien) par une équation du $n^{\text{ième}}$ degré est appelée *courbe algébrique* du $n^{\text{ième}}$ degré.

EXEMPLE 4. Une droite est représentée dans un système de coordonnées rectangulaires par une équation algébrique du premier degré de la forme $Ax + By + C = 0$ (§ 16). C'est pourquoi la droite est une courbe algébrique du premier degré. Pour une même droite les coefficients A, B, C possèdent différentes valeurs dans différents systèmes de coordonnées. Ainsi, supposons que dans l'« ancien » système la droite est représentée par l'équation $2x + 3y - 5 = 0$ ($A = 2$, $B = 3$, $C = -5$). En effectuant une rotation des axes d'un angle de 45°, on voit (§ 36) que dans le « nouveau » système cette même droite sera représentée par l'équation

$$2\left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} - y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 3\left(x' \frac{\sqrt{2}}{2} + y' \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 5 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} x' + \frac{\sqrt{2}}{2} y' - 5 = 0 \quad \left(A = \frac{5\sqrt{2}}{2},\ B = \frac{\sqrt{2}}{2},\ C = -5\right).$$

EXEMPLE 5. Si l'origine coïncide avec le centre d'une circonférence de rayon $R = 3$, alors cette circonférence est représentée par l'équation (§ 38) $x^2 + y^2 - 9 = 0$. C'est une équation algébrique du second degré ($A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = 0$, $E = 0$, $F = -9$). Cela

signifie que la circonférence est une courbe du second degré. Si l'on transfère l'origine des coordonnées au point $(-5, -2)$, alors dans le nouveau système cette circonférence sera représentée (§ 35) par l'équation $(x'-5)^2+(y'-2)^2-9=0$, c'est-à-dire $x'^2+y'^2-10x'-4y'+20=0$. C'est aussi une équation du second degré; les coefficients A, B et C sont restés inchangés, mais D, E et F sont modifiés.

Exemple 6. La courbe représentée par l'équation $y = \sin x$ (sinusoïde) n'est pas une courbe algébrique.

§ 38. Circonférence

Une circonférence de rayon R et de centre à l'origine des coordonnées est représentée par l'équation

$$x^2+y^2=R^2.$$

Cette équation signifie que le carré de la distance OA (cf. fig. 9, page 24) de l'origine à n'importe quel point A de la circonférence est égal à R^2.

Une circonférence de rayon R et de centre au point $C(a, b)$ est représentée par l'équation

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{1}$$

Celle-ci signifie que le carré de la distance MC (fig. 34) des points $M(x, y)$ et $C(a, b)$ (§ 10) est égal à R^2.

On peut mettre l'équation (1) sous la forme

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-R^2=0. \tag{2}$$

On peut multiplier l'équation (2) par un nombre arbitraire A; elle s'écrira alors

$$Ax^2+Ay^2-2Aax-2Aby+A(a^2+b^2-R^2)=0. \tag{3}$$

Exemple 1. La circonférence de rayon $R = 7$ et de centre au point $C(4, -6)$ est représentée par l'équation

$$(x-4)^2+(y+6)^2=49 \quad \text{ou} \quad x^2+y^2-8x+12y+3=0$$

ou (après multiplication par 3)

$$3x^2+3y^2-24x+36y+9=0.$$

Remarque. La circonférence est une courbe du second degré (§ 37), car elle est représentée par une équation du second degré. Pour que l'équation du second degré représente une circonférence, il faut:

1) qu'elle ne contienne pas de terme en xy;

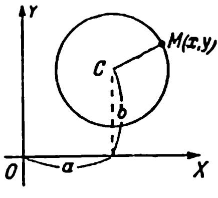


FIG. 34

2) que les coefficients de x^2 et de y^2 soient égaux (cf. équation (3)).

Ces conditions ne sont pas encore suffisantes (cf. § 39).

EXEMPLE 2. L'équation du second degré $x^2 + 3xy + y^2 = 1$ ne représente pas une circonférence, car elle contient le terme $3xy$.

EXEMPLE 3. L'équation du second degré $9x^2 + 4y^2 = 49$ ne représente pas une circonférence, car les coefficients de x^2 et de y^2 ne sont pas égaux.

EXEMPLE 4. L'équation

$$5x^2 - 10x + 5y^2 + 20y - 20 = 0$$

vérifie les conditions 1) et 2). On a montré au § 39 qu'elle représente une circonférence.

§ 39. Recherche du centre et du rayon d'une circonférence

L'équation

$$Ax^2 + Bx + Ay^2 + Cy + D = 0 \tag{1}$$

(elle vérifie les conditions 1) et 2) du § 38) représente une circonférence si les coefficients A, B, C, D vérifient l'inégalité

$$B^2 + C^2 - 4AD > 0. \tag{2}$$

Dans ce cas le centre (a, b) et le rayon R de la circonférence peuvent être trouvés d'après les formules (*)

$$a = -\frac{B}{2A}, \quad b = -\frac{C}{2A}, \quad R^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}. \tag{3}$$

REMARQUE. L'inégalité (2) signifie que le carré du rayon doit être un nombre positif; cf. la dernière formule (3). Si l'inégalité (2) n'est pas vérifiée, l'équation (1) ne représente aucune courbe (cf. plus bas, exemple 2).

EXEMPLE 1. L'équation

$$5x^2 - 10x + 5y^2 + 20y - 20 = 0 \tag{4}$$

est de la forme (1); ici

$$A = 5, \quad B = -10, \quad C = 20, \quad D = -20.$$

(*) Il est inutile de les retenir; cf. exemple 1 (second procédé).

L'inégalité (2) est vérifiée, par conséquent, l'équation (4) représente une circonférence. Nous trouvons d'après les formules (3):

$$a = 1, \quad b = -2, \quad R^2 = 9,$$

autrement dit le centre est $(1, -2)$ et le rayon $R = 3$.

SECOND PROCÉDÉ. Divisant l'équation (4) par le coefficient des termes du second degré, c'est-à-dire par 5, nous obtenons:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y - 4 = 0.$$

Complétons les sommes $x^2 - 2x$ et $y^2 + 4y$ jusqu'aux carrés. Pour cela ajoutons 1 à la première somme et 4 à la seconde et pour compenser ajoutons ces mêmes nombres au second membre de l'équation. Nous obtenons:

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) - 4 = 1 + 4,$$

c'est-à-dire

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9.$$

EXEMPLE 2. L'équation

$$x^2 - 2x + y^2 + 2 = 0 \tag{5}$$

est de la forme (1), mais l'inégalité (2) n'est pas vérifiée. Par conséquent, l'équation (5) ne représente aucune courbe.

Nous pouvions parvenir à cette conclusion en raisonnant comme suit (cf. exemple 1):

Complétons la somme $x^2 - 2x$ jusqu'au carré en ajoutant 1. Pour compenser, ajoutons 1 au second membre. Nous obtenons $(x - 1)^2 + y^2 + 2 = 1$, soit $(x - 1)^2 + y^2 = -1$. Or la somme des carrés de deux nombres (réels) ne peut évidemment être égale à un nombre négatif. C'est pourquoi il n'existe aucun point dont les coordonnées puissent vérifier l'équation donnée.

§ 40. Ellipse contraction du cercle

Menons par le centre O d'une circonférence de rayon a (fig. 35) deux diamètres perpendiculaires $A'A$, $D'D$. Portons sur les rayons OD, OD' à partir du point O des segments égaux OB, OB' de longueur b (plus petite que a). De chaque point N de la circonférence abaissons la perpendiculaire NP sur le diamètre $A'A$ et sur cette perpendiculaire portons, à partir de son pied P, un segment PM tel que

$$PM : PN = b : a. \tag{1}$$

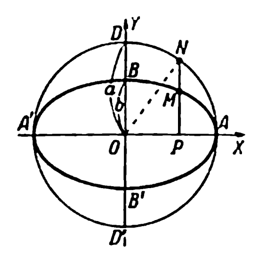


FIG. 35

Cette construction transforme chaque point N en un point correspondant M situé sur cette même perpendiculaire NP et tel que PM s'obtient de PN par une contraction de rapport constant $k = \frac{b}{a}$. Une telle transformation est appelée *contraction uniforme*. La droite $A'A$ est appelée *axe de contraction*.

La courbe $ABA'B'$ en laquelle se transforme la circonférence par contraction uniforme est appelée *ellipse* (*).

Le segment $A'A = 2a$ (et souvent la droite $A'A$, c'est-à-dire l'axe de contraction) est appelé *grand axe* de l'ellipse.

Le segment $B'B = 2b$ (et souvent la droite $B'B$) est appelé *petit axe* de l'ellipse (d'après la construction $2a > 2b$). Le point O est appelé *centre* de l'ellipse et les points A, A', B, B' *sommets* de l'ellipse.

Le rapport $k = b : a$ est le *coefficient de contraction* de l'ellipse. La grandeur $1 - k = \frac{a-b}{a}$ (c'est-à-dire le rapport $BD : OD$) est appelée *contraction* de l'ellipse et notée α.

L'ellipse est symétrique par rapport au grand et au petit axe et par conséquent au centre.

On peut considérer la circonférence comme une ellipse de coefficient de contraction $k = 1$.

ÉQUATION CANONIQUE DE L'ELLIPSE. Si l'on considère les axes de l'ellipse comme axes de coordonnées, l'ellipse sera représentée par l'équation (**)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2}$$

(*) Cf. au § 41 une autre définition de l'ellipse.

(**) Nous avons

$$OP^2 + PN^2 = ON^2 = a^2. \tag{3}$$

En vertu de (1) nous obtenons:

$$PN = \frac{a}{b} PM. \tag{4}$$

Portant dans (3) nous trouvons:

$$OP^2 + \frac{a^2}{b^2} PM^2 = a^2, \tag{5}$$

Elle est appelée *équation canonique* [*] de l'ellipse.

EXEMPLE 1. Une circonférence de rayon $a = 10$ cm est soumise à une contraction uniforme de coefficient 3 : 5. Par cette transformation on obtient une ellipse dont le grand axe $2a = 20$ cm et le petit axe $2b = 12$ cm (les demi-axes sont $a = 10$ cm et $b = 6$ cm). La contraction de cette ellipse est $\alpha = 1 - k = \frac{10-6}{10} = 0{,}4$. L'équation canonique est

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1.$$

FIG. 36

EXEMPLE 2. Quand on projette une circonférence sur un certain plan P, le diamètre A'_1A_1 (fig. 36) parallèle à ce plan est projeté tel quel, alors que toutes les cordes perpendiculaires à ce diamètre sont contractées dans un rapport égal à $\cos\varphi$, où φ est l'angle compris entre le plan P_1 de la circonférence et le plan P. C'est pourquoi la projection de la circonférence est une ellipse de grand axe $2a = A'A$ et de coefficient de contraction $k = \cos\varphi$.

EXEMPLE 3. Il est plus juste d'estimer que le méridien terrestre est non pas une circonférence, mais une ellipse. L'axe terrestre est le petit axe de cette ellipse. Sa longueur est environ 12 712 km. La longueur du grand axe est environ 12 754 km. Trouver le coefficient de contraction k et la contraction α de cette ellipse.

SOLUTION.

$$\alpha = \frac{a-b}{a} = \frac{2a-2b}{2a} = \frac{12\,754 - 12\,712}{12\,754} \approx 0{,}003,$$

$$k = 1 - \alpha \approx 0{,}997.$$

---

c'est-à-dire

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2}y^2 = a^2. \qquad (6)$$

Divisant par a^2 nous obtenons l'équation équivalente (2). Ainsi si $M(x, y)$ est situé sur l'ellipse $ABA'B'$, alors x, y vérifient l'équation (2). Si M n'est pas situé sur l'ellipse, alors l'égalité (4) et, par conséquent, l'équation (6) ne sont pas vérifiées (cf. § 7).

[*] Du grec « kanôn » , règle. Ainsi, l'appellation « canonique » est équivalente à « typique ».

§ 41. Autre définition de l'ellipse

DÉFINITION. On appelle *ellipse* le lieu géométrique des points (M) dont la somme des distances aux deux points donnés F', F (fig. 37) a une valeur constante $2a$:

$$F'M + FM = 2a. \tag{1}$$

Les points F' et F sont appelés *foyers* (*) de l'ellipse, et la distance $F'F$ *distance focale*; elle est notée $2c$:

$$F'F = 2c. \tag{2}$$

Comme $F'F < F'M + FM$, on a $2c < 2a$, c'est-à-dire

$$c < a. \tag{3}$$

La définition du présent paragraphe est équivalente à la définition du § 40 [comparez l'équation (7) et l'équation (2) § 40].

ÉQUATION CANONIQUE DE L'ELLIPSE. Considérons la droite $F'F$ (fig. 38) comme axe des abscisses et le milieu O du segment $F'F$ comme origine des coordonnées. Conformément à la définition de l'ellipse et à (1) § 10 nous avons F' $(-c, 0)$, $F(c, 0)$. En vertu du § 10

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a. \tag{4}$$

En se libérant des radicaux (**), nous obtenons l'équation équivalente

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \tag{5}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{6}$$

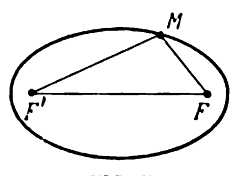


FIG. 37

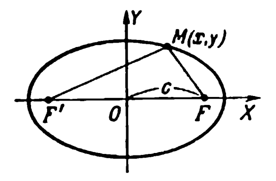


FIG. 38

(*) Si on place au point F (ou F') une source de lumière, après réflexion par l'ellipse tous les rayons se concentrent au point F' (ou F).

(**) Nous faisons passer l'un des radicaux dans le second membre et nous élevons l'équation au carré; la nouvelle équation ne contiendra qu'un seul radical. Nous l'isolons et nous élevons de nouveau au carré. Après simplifications nous obtenons (5).

En vertu de (3) *la quantité* $a^2 - c^2$ *est positive*. C'est pourquoi on peut écrire (6) sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{7}$$

où

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{8}$$

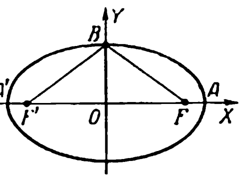


FIG. 39

L'équation (7) coïncide avec (2) § 40. Par conséquent, la courbe que nous avons appelée ellipse dans le présent paragraphe s'indentifie en effet avec la courbe que nous avons appelée ellipse au § 40. Il s'avère alors que le centre O de l'ellipse (fig. 39) coïncide avec le milieu du segment $F'F$, autrement dit $OF = c$. Conformément à l'égalité (1), le grand axe $2a = A'A$ de l'ellipse est égal à la somme constante des distances $F'M + FM$ (fig. 38). Le demi petit axe $b = OB$ (fig. 39) et le segment $c = OF$ sont les côtés du triangle rectangle BOF; l'hypoténuse BF de ce triangle est égale à a. Cela découle de l'égalité (8) et aussi de ce que la somme des segments égaux $F'B$ et FB est égale à $2a$ (d'après la définition de l'ellipse). Ainsi, la distance d'un foyer à l'extrémité du petit axe est égale à la longueur du demi grand axe.

Le rapport $\frac{F'F}{A'A}$ de la distance focale au grand axe, c'est-à-dire la quantité $\frac{c}{a}$, est appelé *excentricité* de l'ellipse. On note

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{9}$$

Il découle de (3) que l'excentricité de l'ellipse est inférieure à l'unité. L'excentricité ε et le coefficient de contraction k de l'ellipse (§ 40) sont, en vertu de (8) liés par la relation

$$k^2 = 1 - \varepsilon^2. \tag{10}$$

EXEMPLE. La distance focale de l'ellipse est $2c = 8$ cm et la somme des distances d'un point arbitraire de cette ellipse aux foyers est égale à 10 cm. Le grand axe est alors $2a = 10$ cm, l'excentricité $\varepsilon = \frac{c}{a} = 0{,}8$. Le coefficient de contraction $k = \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0{,}6$. Le petit axe est $2b = 2ak = 2\sqrt{a^2 - c^2} = 6$ cm. L'équation canonique de cette ellipse est

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

REMARQUE. Si l'on considère la circonférence comme un cas particulier de l'ellipse pour lequel $b = a$, alors $c = 0$, autrement dit on doit estimer que les foyers F' et F sont confondus. L'excentricité de la circonférence est nulle.

§ 42. Construction d'une ellipse donnée par ses axes

PREMIER PROCÉDÉ. Sur les droites perpendiculaires $X'X$ et $Y'Y$ (fig. 40) on porte les segments $OA' = OA = a$ et $OB' = OB = b$ [les valeurs des demi-axes $2a$, $2b$ $(a > b)$]. Les points A', A, B', B seront les sommets de l'ellipse.

Décrivons de B comme centre un arc uv de rayon a; il coupe le segment $A'A$ aux points F', F; ce sont les foyers de l'ellipse [conformément à (8) § 41]. Divisons arbitrairement le segment $A'A = 2a$ en deux parties: $A'K = r'$ et $KA = r$, de sorte que $r' + r = 2a$. Décrivons du point F comme centre une circonférence de rayon r et du point F' une circonférence de rayon r'. Ces circonférences se coupent en deux points M et M', et par construction $F'M + FM = 2a$ et $F'M' + FM' = 2a$. Conformément à la définition du § 41 les points M et M' appartiennent à l'ellipse. En faisant varier r, nous obtenons de nouveaux points de l'ellipse.

SECOND PROCÉDÉ. Menons deux circonférences concentriques de rayons $OA = a$ et $OB = b$ (fig. 41). Par le centre O menons un rayon arbitraire ON. Par les points K et M_1 en lesquels ON coupe les deux circonférences, menons des droites respectivement parallèles aux axes $X'X$, $Y'Y$. Ces droites se coupent au point M. Son ordonnée PM ($= KD$) est plus courte que l'ordonnée PM_1 du point M_1 situé sur la circonfé-

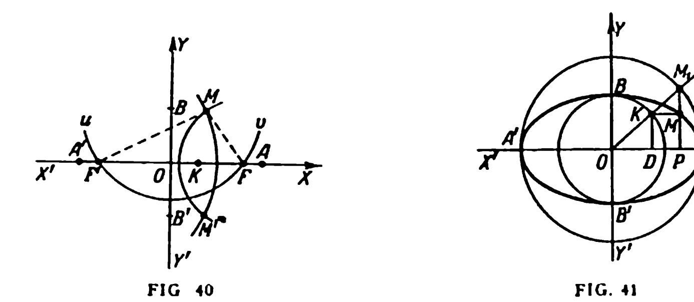


FIG 40

FIG. 41

rence de rayon a, et en outre $PM : PM_1 = b : a$. Cela signifie (§ 40) que le point M appartient à l'ellipse. Faisant varier la direction du rayon ON nous obtenons de nouveaux points de l'ellipse.

§ 43. Hyperbole

DÉFINITION. On appelle *hyperbole* (fig. 42) le lieu géométrique des points (M) tels que la valeur absolue de la différence de leurs distances à deux points donnés F', F est constante (cf. définition de l'ellipse § 41):

$$|F'M - FM| = 2a. \quad (1)$$

Les points F' et F sont appelés *foyers* (*) de l'hyperbole, la distance $F'F$ *distance focale* notée $2c$:

$$F'F = 2c. \quad (2)$$

Comme $F'F > |F'M - FM|$, on a [cf. formule (3) § 41]

$$c > a. \quad (3)$$

Si M est plus proche du foyer F' que du foyer F, c'est-à-dire si $F'M < FM$ (fig. 43), alors on peut écrire au lieu de (1):

$$FM - F'M = 2a. \quad (1a)$$

Si M est plus proche de F que de F', c'est-à-dire si $F'M > FM$ (fig. 42), nous avons:

$$F'M - FM = 2a. \quad (1b)$$

Les points pour lesquels $F'M - FM = 2a$ forment l'une des branches de l'hyperbole (la branche de droite pour la disposition usuelle de la figure); les points pour lesquels $FM - F'M = 2a$ forment l'autre branche (de gauche).

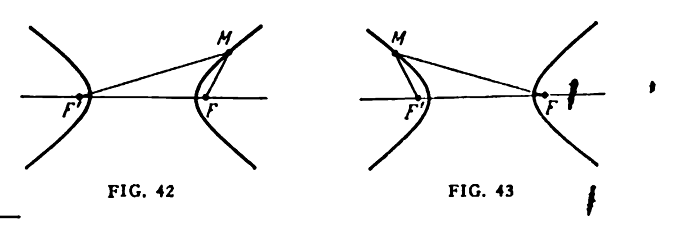


FIG. 42 FIG. 43

(*) Si l'on place une source de lumière en l'un des foyers, les rayons réfléchis par l'hyperbole forment un faisceau divergent de centre à l'autre foyer. Cf. renvoi de la page 62.

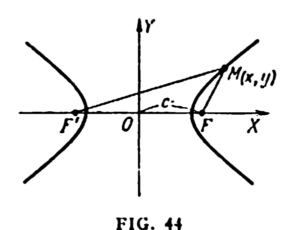


FIG. 44

ÉQUATION CANONIQUE DE L'HYPERBOLE. Prenons comme axe OX (fig. 44) la droite $F'F$ et comme origine des coordonnées le milieu O du segment $F'F$. Conformément à (2) nous avons $F\,(c,\,0)$, $F'\,(-c,\,0)$ En vertu de (1 b) et du § 10 la branche de droite est alors représentée par l'équation

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{4a}$$

Pour la branche de gauche nous avons, conformément à (1a) et au § 10, l'équation

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a. \tag{4b}$$

En se libérant des radicaux, nous obtenons dans les deux cas

$$(a^2-c^2)\,x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \tag{5}$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \tag{6}$$

Cette équation est équivalente aux équations (4a) et (4b) et représente les deux branches de l'hyperbole (*).

L'équation (6) a la même forme que l'équation de l'ellipse [cf. (6) § 41], mais cette ressemblance est trompeuse, car maintenant en vertu de (3) la quantité a^2-c^2 est négative, de sorte que $\sqrt{a^2-c^2}$ est imaginaire. C'est pourquoi nous désignons par b la quantité $+\sqrt{c^2-a^2}$, de sorte que (**)

$$b^2=c^2-a^2. \tag{7}$$

Nous obtenons alors de (6) l'*équation canonique* (***) de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{8}$$

EXEMPLE. Si la différence des distances $F'M-FM$ est égale en valeur absolue à $2a=20$ cm et la distance focale $2c=25$ cm, alors

(*) On aurait pu estimer que les deux branches de l'hyperbole forment non pas une, mais deux courbes. Mais, dans ce cas, aucune de ces deux branches prises séparément ne pourrait être représentée par une équation algébrique du second degré.

(**) Sur le sens géométrique de la grandeur b cf. § 46.

(***) Cf. renvoi de la page 61.

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{15}{2}$ (cm). L'équation canonique de l'hyperbole est alors

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{\frac{225}{4}} = 1.$$

§ 44. Forme de l'hyperbole; sommets et axes

L'hyperbole est symétrique par rapport au point O, le milieu du segment $F'F$ (fig. 45); elle est symétrique par rapport à la droite $F'F$ et par rapport à la droite $Y'Y$ menée par O perpendiculairement à $F'F$. Le point O est appelé *centre* de l'hyperbole. La droite $F'F$ coupe l'hyperbole en deux points A $(+a, 0)$ et A' $(-a, 0)$. Ces points sont appelés *sommets* de l'hyperbole. Le segment $A'A = 2a$ (et souvent la droite $A'A$) est appelé ***axe réel*** de l'hyperbole.

La droite $Y'Y$ ne coupe pas l'hyperbole. Il est admis néanmoins de porter sur elle les segments $B'O = OB = b$ et d'appeler le segment $B'B = 2b$ (et aussi la droite $Y'Y$) ***axe imaginaire*** de l'hyperbole.

Comme $AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + b^2$, il découle alors de (7) § 43 que $AB = c$, autrement dit la distance du sommet de l'hyperbole à l'extrémité de l'axe imaginaire est égale à la demi-distance focale.

L'axe imaginaire $2b$ peut être plus grand (fig. 45), plus petit (fig. 46) ou égal (fig. 47) à l'axe réel $2a$. Si les axes réel et imaginaire sont égaux ($a = b$), alors l'hyperbole est appelée ***équilatère***.

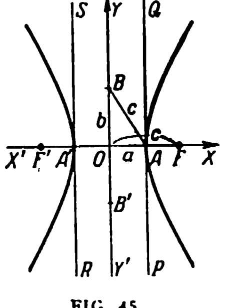


FIG. 45

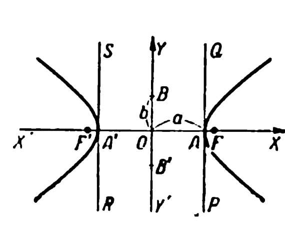


FIG. 46

Le rapport $\frac{F'F}{A'A} = \frac{c}{a}$ de la distance focale à l'axe réel est appelé *excentricité* de l'hyperbole et noté ε [cf. (9) § 41]. En vertu de (3) § 43 l'excentricité de l'hyperbole est supérieure à 1. L'excentricité de l'hyperbole équilatère est égale à $\sqrt{2}$.

L'hyperbole est entièrement située en dehors de la bande limitée par les droites PQ et RS, parallèles à l'axe $Y'Y$ et situées à une distance $OA = A'O = a$ (fig. 45, 46, 47) de celui-ci. A droite et à gauche de cette bande l'hyperbole s'étend à l'infini.

§ 45. Construction d'une hyperbole donnée par ses axes

Portons sur les droites orthogonales $X'X$ et $Y'Y$ (fig. 48) les segments $OA = OA' = a$ et $OB = OB' = b$ (les demi-axes réels et imaginaires). Portons ensuite les segments OF et OF' égaux à AB. Les points F' et F sont les foyers [conformément à (7) § 43]. Sur le prolongement du segment $A'A$ au-delà de A prenons un point arbitraire K. Du point F pris comme centre décrivons une circonférence de rayon $r = AK$ et du point F' une circonférence de rayon $r' = A'K = 2a + r$. Ces circonférences se coupent en deux points M, M' et par construction $F'M - FM = 2a$ et $F'M' - FM' = 2a$. En vertu de la définition (§ 43) les points M et M' appartiennent à l'hyperbole. En faisant varier r, nous obtenons de nouveaux points de la branche de droite. Les points de la branche de gauche sont construits de manière analogue.

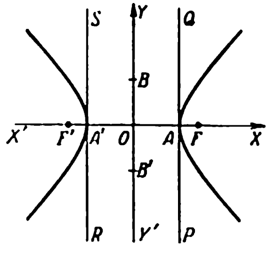


FIG. 47

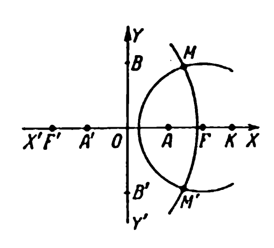


FIG. 48

§ 46. Asymptotes de l'hyperbole

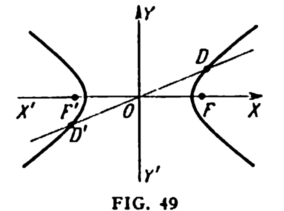


FIG. 49

La droite $y = kx$ (elle passe par le centre O de l'hyperbole) coupe, pour $|k| < \frac{b}{a}$, l'hyperbole en deux points D', D (fig. 49) symétriques par rapport à O. Si par contre $|k| \geqslant \frac{b}{a}$, alors la droite $y = kx$ ($E'E$ sur la fig. 50) n'a pas de points communs avec l'hyperbole.

Les droites $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ ($U'U$ et $V'V$ sur la fig. 51), pour lesquelles $|k| = \frac{b}{a}$, possèdent la propriété caractéristique suivante: quand on les prolonge indéfiniment, chacune d'elles s'approche indéfiniment de l'hyperbole.

Plus exactement: *si l'on éloigne indéfiniment la droite $Q'Q$ parallèle à l'axe des ordonnées du centre O* (à droite ou à gauche), *les segments QS, $Q'S'$ entre l'hyperbole et chacune des droites $U'U$, $V'V$ décroissent indéfiniment.*

Les droites $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ sont appelées *asymptotes* de l'hyperbole.

Les asymptotes de l'hyperbole équilatère sont perpendiculaires

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE L'AXE IMAGINAIRE. Menons par le sommet A de l'hyperbole (fig. 51) la droite $L'L$ perpendiculaire à l'axe réel. Alors le segment $L'L$ de cette droite, compris entre les asymptotes de l'hyperbole, est égal à l'axe imaginaire de l'hyperbole $B'B = 2b$

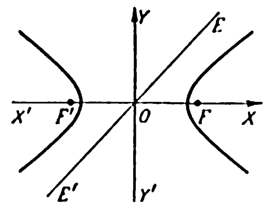


FIG. 50

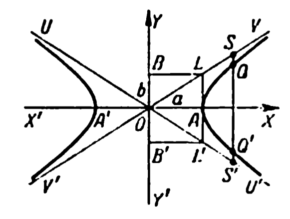


FIG. 51

§ 47. Hyperboles conjuguées

Deux hyperboles sont dites *conjuguées* (fig. 52) si elles ont un centre commun O et des axes communs, mais si l'axe réel de l'une est l'axe imaginaire de l'autre. Sur la fig. 52 $A'A$ est l'axe réel de l'hyperbole I et l'axe imaginaire de l'hyperbole II, $B'B$ est l'axe réel de l'hyperbole II et l'axe imaginaire de l'hyperbole I.

Si

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est l'équation de l'une des hyperboles conjuguées, alors l'équation de l'autre est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Les hyperboles conjuguées possèdent des asymptotes communes ($U'U$ et $V'V$ sur la fig. 52).

§ 48. Parabole

DÉFINITION. On appelle *parabole* (fig. 53) le lieu géométrique des points (M) équidistants d'un point donné F et d'une droite donnée PQ:

$$FM = KM. \tag{1}$$

Le point F est appelé *foyer* (*) et la droite PQ *directrice* de la parabole. La distance $FC = p$ du foyer à la directrice est appelée *paramètre* de la parabole.

Prenons comme origine des coordonnées le milieu O du segment FC, de sorte que

$$CO = OF = \frac{p}{2}. \tag{2}$$

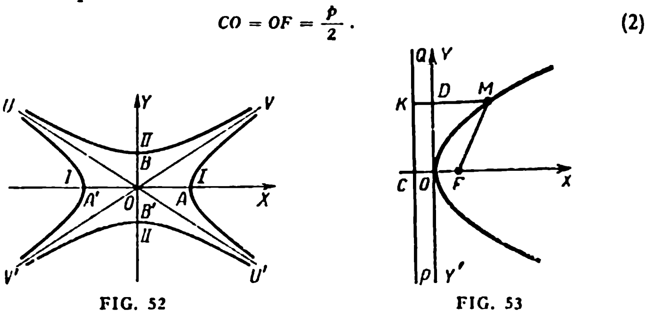


FIG. 52 FIG. 53

(*) Un faisceau de rayons parallèles perpendiculaires à la directrice se transforme après être réfléchi par la parabole en un faisceau de centre au foyer. Cf. renvoi de la page 62.

Prenons comme axe des abscisses la droite CF; nous conviendrons que le sens positif est celui de O à F.

Nous avons alors: $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, $KM = KD + DM = \frac{p}{2} + x$ et (§ 10) $FM = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - x\right)^2 + y^2}$. Nous tirons de (1):

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x. \tag{3}$$

En se libérant du radical nous obtenons l'équation équivalente

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

C'est l'*équation canonique* de la parabole.

L'équation de la directrice PQ (dans le même système de coordonnées) est $x + \frac{p}{2} = 0$.

La parabole est symétrique par rapport à la droite FC (l'axe des abscisses pour notre choix du système de coordonnées). Cette droite est appelée *axe* de la parabole. La parabole passe par le milieu O du segment FC. Le point O est appelé *sommet* de la parabole (nous l'avons pris pour origine des coordonnées).

La parabole est située du même côté de la droite $Y'Y$ (la tangente au sommet) et s'étend indéfiniment de ce côté.

§ 49. Construction d'une parabole d'après une valeur donnée du paramètre p

Menons (fig. 54) la droite PQ (directrice de la parabole) et fixons à une distance donnée $p = CF$ un point F (foyer). Le milieu O du segment CF est le sommet et la droite CF l'axe de la parabole. Prenons sur le rayon OF un point arbitraire R et menons par ce point la droite RS perpendiculaire à cet axe. Du foyer F pris comme centre décrivons une circonférence de rayon CR. Elle coupe RS en deux points M, M'. Les points M et M' appartiennent à la parabole, car par construction $FM = CR = KM$ (cf. la définition du § 48). En modifiant la position du point R, nous trouvons de nouveaux points de la parabole.

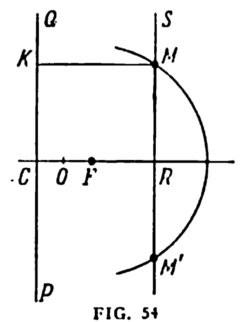


FIG. 54

§ 50. Parabole graphique de l'équation $y = ax^2 + bx + c$

L'équation
$$x^2 = 2py \tag{1}$$
représente la même parabole que l'équation $y^2 = 2px$ (cf. § 48), mais l'axe de la parabole coïncide avec l'axe des ordonnées; l'origine des coordonnées coïncide toujours avec le sommet de la parabole (fig. 55). Le foyer se trouve au point $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$. L'équation de la directrice est $y + \frac{p}{2} = 0$.

Si le sens positif de l'axe des ordonnées est non pas OF, mais FO (fig. 56), l'équation de la parabole est:
$$-x^2 = 2py \tag{2}$$
(cf. fig. 56, où les axes de coordonnées ont les sens habituels). Conformément à ce qui vient d'être dit les graphiques des fonctions
$$y = ax^2 \tag{3}$$
sont des paraboles qui tournent leur concavité vers le haut quand $a > 0$, et vers le bas quand $a < 0$. Plus la valeur absolue de a est petite $\left(\text{sur la fig. 57 nous avons } a = 2,\ a = \pm 1,\ a = \pm \frac{1}{2},\ a = \frac{1}{5}\right)$, plus le foyer est proche du sommet et plus l'« ouverture » de la parabole est grande.

Toute équation de la forme
$$y = ax^2 + bx + c \tag{4}$$
a pour courbe représentative la même parabole que l'équation $y = ax^2$ $\left(\text{pour les deux paraboles la distance } \frac{p}{2} \text{ du sommet au foyer est égale à } \frac{1}{|4a|}\right)$ Les deux paraboles tournent leur convexité vers le même côté.

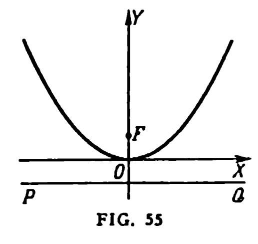


FIG. 55

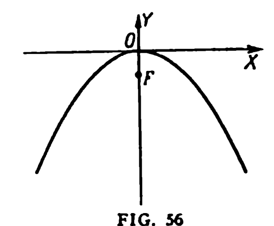


FIG. 56

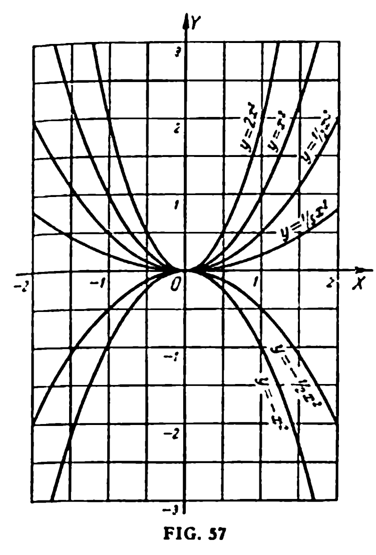


FIG. 57

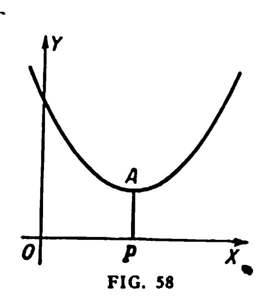


FIG. 58

Mais le sommet de la parabole (4) est situé non pas à l'origine, mais au point A (fig. 58) de coordonnées

$$x_A = OP = -\frac{b}{2a}, \quad y_A = PA = \frac{4ac - b^2}{4a}. \tag{5}$$

EXEMPLE. L'équation

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2} \tag{4a}$$

$\left(a = -\frac{1}{4},\ b = \frac{3}{4},\ c = -\frac{1}{2}\right)$ représente (fig. 59) la même parabole que l'équation $y = -\frac{1}{4}x^2$. Le sommet est situé au point A de coordonnées

$$x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}, \quad y_A = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{1}{16}. \tag{5a}$$

Le foyer est situé en dessous du sommet à une distance

$$\frac{p}{2} = \frac{1}{|4a|} = 1.$$

Par conséquent, les coordonnées du foyer sont

$$x_F = \frac{3}{2}, \quad y_F = \frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}.$$

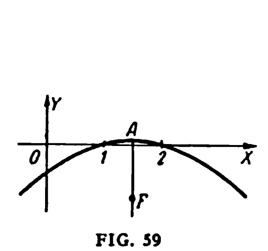


FIG. 59

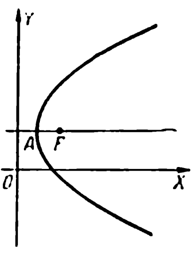


FIG. 60

REMARQUE 1. Il n'est pas besoin de retenir les formules (5). Pour calculer x_A, y_A on peut appliquer l'artifice suivant. Ecrivons l'équation (4a) sous la forme

$$y + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x^2 - 3x). \tag{6}$$

Complétons l'expression entre parenthèses jusqu'à obtenir un carré parfait, en ajoutant $\frac{9}{4}$. Pour compenser ajoutons $-\frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} = -\frac{9}{16}$ au premier membre. Nous obtenons:

$$y - \frac{1}{16} = -\frac{1}{4}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2. \tag{7}$$

L'équation (7) prend la forme

$$y' = -\frac{1}{4}x'^2 \tag{8}$$

si l'on effectue la translation des axes (§ 35):

$$y' = y - \frac{1}{16}, \qquad x' = x - \frac{3}{2}. \tag{9}$$

Les coordonnées du sommet de la parabole (c'est-à-dire du point $x' = 0$, $y' = 0$) sont $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{1}{16}$.

REMARQUE 2. On peut déduire les formules générales (5) de (4) en utilisant l'artifice que nous avons appliqué dans la remarque 1 à l'équation (4a).

REMARQUE 3. L'équation

$$x = ay^2 + by + c$$

représente une parabole (fig. 60) de sommet au point $\left(\frac{4ac - b^2}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$. Son axe est parallèle à l'axe des abscisses. Sa concavité est tournée vers la droite si $a > 0$, et ver sla gauche si $a < 0$.

§ 51. Directrices de l'ellipse et de l'hyperbole

a) DIRECTRICES DE L'ELLIPSE. Soit donnée une ellipse (fig. 61) de grand axe $A'A = 2a$ et d'excentricité (§ 41) $\frac{OF}{OA} = \frac{c}{a} = \varepsilon$. Supposons que $\varepsilon \neq 0$ (autrement dit, l'ellipse n'est pas une circonférence). Portons du centre O de l'ellipse sur son grand axe les segments $OD = OD'$, égaux à $\frac{a}{\varepsilon}$ (c'est-à-dire $OD : OA = OA : OF$). Les droites PQ, $P'Q'$ passant respectivement par D, D' et parallèles au petit axe sont appelées *directrices de l'ellipse*.

A chacune des directrices faisons correspondre celui des foyers de l'ellipse qui se trouve du même côté du centre, autrement dit à la directrice PQ on fait correspondre le foyer F et à la directrice $P'Q'$ le foyer F'. Alors *pour tout point M de l'ellipse le rapport de ses distances au foyer et à la directrice correspondante est égal à l'excentricité* ε, autrement dit

$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \tag{1}$$

Comme pour l'ellipse $\varepsilon < 1$, tout point de l'ellipse est plus proche du foyer que de la directrice correspondante.

Si l'on laisse constant le grand axe de l'ellipse et si l'on fait tendre l'excentricité vers zéro (autrement dit si l'ellipse diffère de moins en moins d'une circonférence), les directrices s'éloignent indéfiniment du centre.

La circonférence n'a pas de directrices.

b) DIRECTRICES DE L'HYPERBOLE. Soient $A'A$ (fig. 62) l'axe réel de l'hyperbole et $\varepsilon = \frac{OF}{OA} = \frac{c}{a}$ son excentricité (§ 44). Portons les segments

$$OD = OD' = \frac{a}{\varepsilon}$$

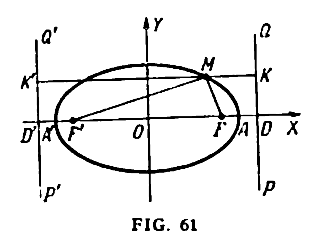


FIG. 61

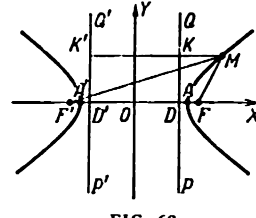


FIG. 62

(autrement dit $OD : OA = OA : OF$). Les droites PQ, $P'Q'$ passant respectivement par D, D' et parallèles à l'axe imaginaire sont appelées *directrices de l'hyperbole. Pour tout point M de l'hyperbole le rapport de ses distances au foyer et à la directrice correspondante* [cf. a)] *est égal à l'excentricité* ε, c'est-à-dire

$$MF : MK = MF' : MK' = \varepsilon. \tag{2}$$

Comme pour l'hyperbole $\varepsilon > 1$, tout point de l'hyperbole est plus proche de la directrice que du foyer correspondant.

§ 52. Définition générale de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole

Toutes les ellipses (*), hyperboles et paraboles possèdent la propriété suivante: pour chacune de ces courbes le rapport (fig. 63)

$$FM : MK \tag{1}$$

est constant [FM est la distance d'un point arbitraire M de la courbe à un point donné F (foyer) et MK la distance du point M à une droite donnée PQ (directrice)].

Pour l'ellipse de la fig. 64 ce rapport est inférieur à l'unité (il est égal à l'excentricité $\frac{c}{a}$ de l'ellipse; cf. §§ 41, 51). Pour l'hyperbole de la fig. 65 il est supérieur à l'unité (il est égal à l'excentricité $\frac{c}{a}$ de l'hyperbole; cf. §§ 43, 51); pour la parabole de la fig. 66 il est égal à 1 (§ 48).

Inversement, toute courbe possédant la propriété indiquée est soit une ellipse (si $FM : MK < 1$), soit une hyperbole (si $FM : MK > 1$), soit une parabole (si $FM : MK = 1$). C'est pourquoi on peut prendre la propriété citée pour la définition générale de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole et appeler *excentricité* le rapport constant $FM : MK = \varepsilon$. L'excentricité ε de la parabole est égale à 1, pour l'ellipse $\varepsilon < 1$, pour l'hyperbole $\varepsilon > 1$.

L'excentricité ε et la distance $FC = d$ du foyer à la directrice déterminent entièrement la grandeur et la forme de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Si pour ε fixe on fait varier d, on obtient des courbes semblables.

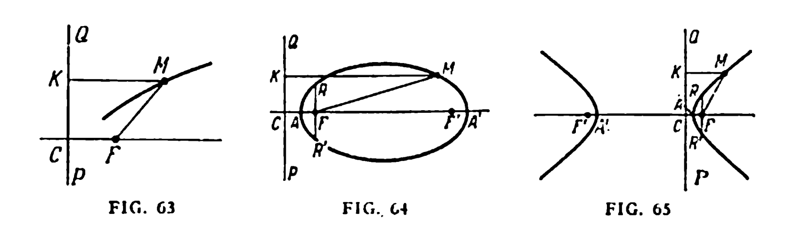


FIG. 63 FIG. 64 FIG. 65

(*) Sauf la circonférence.

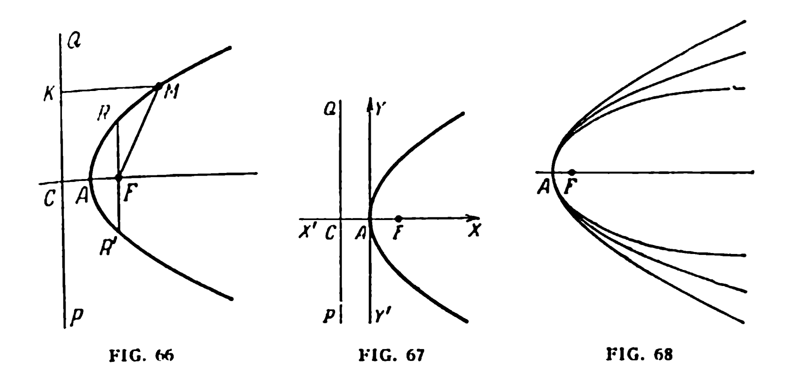


FIG. 66 FIG. 67 FIG. 68

La corde RR' de l'ellipse, de l'hyperbole ou de la parabole (fig. 64, 65, 66) passant par le foyer F et perpendiculaire à l'axe FC est appelée *corde focale* et est notée $2p$:

$$RR' = 2p. \tag{2}$$

La quantité $p = FR = FR'$ (c'est-à-dire la longueur de la demi-corde focale) est appelée *paramètre* de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole. Elle est liée à d par la relation

$$p = d\varepsilon, \tag{3}$$

de sorte que pour la parabole ($\varepsilon = 1$)

$$p = d. \tag{3a}$$

Les sommets de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole (A sur les fig. 64, 65, 66) divisent le segment FC dans le rapport $FA : AC = \varepsilon$. Le second sommet de l'ellipse et de l'hyperbole (A' sur les fig. 64, 65) divise FC dans le même rapport, mais extérieurement (§ 11).

Conformément à la nouvelle définition l'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont représentées par une même équation. Si l'on prend le sommet A (fig. 67) comme origine des coordonnées et si l'on oriente l'axe suivant le rayon AF, cette équation est:

$$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)\ x^2; \tag{4}$$

ici p est le paramètre et ε l'excentricité.

Dans le voisinage du sommet la forme de la parabole diffère peu de l'ellipse et de l'hyperbole ayant une excentricité proche de 1. On a représenté sur la fig. 68 une ellipse d'excentricité $\varepsilon = 0{,}9$, une hyperbole (*) d'excentricité $\varepsilon = 1{,}1$ et une parabole ($\varepsilon = 1$) possédant un foyer commun F et un sommet commun A.

(*) Le second sommet de l'ellipse et de l'hyperbole (et aussi la seconde branche toute entière de l'hyperbole) est d'autant plus éloigné du premier sommet que ε est proche de 1.

Les demi-axes a, b et la demi-distance focale c de l'ellipse et de l'hyperbole s'expriment en fonction de ε de la manière suivante:

Ellipse	$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$	$b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$	$c = a\varepsilon = p\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$
Hyperbole	$a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}$	$b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$	$c = a\varepsilon = p\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$

Dans les trois cas, la distance $\delta = AF$ du foyer F au sommet A s'exprime par la formule

$$\delta = \frac{d\varepsilon}{1+\varepsilon} = \frac{p}{1+\varepsilon}. \tag{5}$$

§ 53. Coniques

L'ellipse, l'hyperbole et la parabole sont appelées *coniques*, car on peut les obtenir en coupant un cône circulaire (*) par un plan P ne passant pas par le sommet du cône. On estime alors que la surface du cône s'étend à l'infini des deux côtés du sommet.

Si le plan P n'est parallèle à aucune des génératrices du cône (fig. 69) la conique est une ellipse (**).

Si le plan P est parallèle à l'une des génératrices du cône (KK' sur la fig. 70), la conique est une parabole.

Si le plan P est parallèle à deux génératrices du cône (KK' et LL' sur la fig. 71) la conique est une hyperbole.

Si le plan P passe par le sommet du cône, au lieu de l'ellipse on obtient un point, au lieu de l'hyperbole deux droites sécantes (fig. 72) et au lieu de la parabole la droite de tangence du plan P et du cône (fig 73). On peut considérer que cette dernière est formée par deux droites confondues.

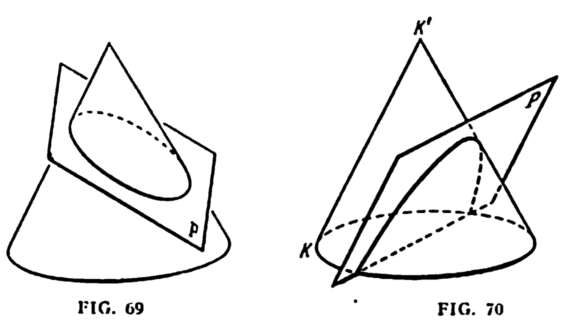


FIG. 69 FIG. 70

(*) Et aussi un cône non circulaire.

(**) En particulier, l'ellipse peut être une circonférence. Pour un cône circulaire les sections circulaires ne peuvent être obtenues que par des plans parallèles à la base; le cône non circulaire possède encore une autre famille de sections circulaires.

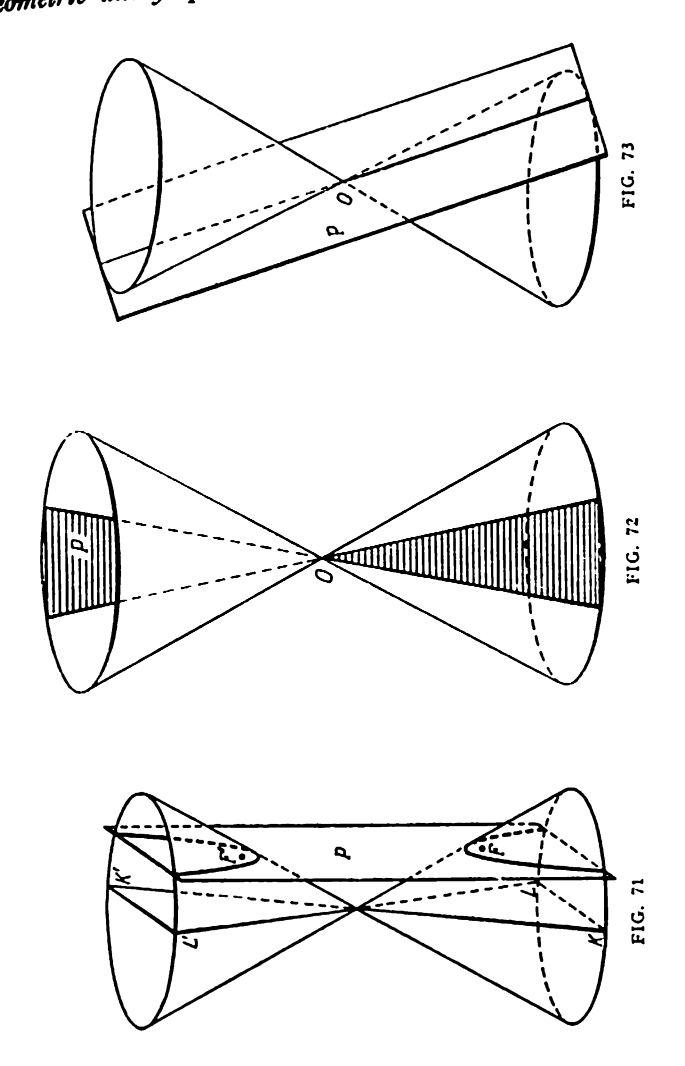


FIG. 73

FIG. 72

FIG. 71

§ 54. Diamètres des coniques

Les milieux des cordes parallèles de toute conique sont situés sur une même droite; cette droite est appelée *diamètre* de la conique. A chaque direction des cordes parallèles correspond son propre diamètre (« conjugué » de la direction donnée). On a représenté sur la fig.74 l'un des diamètres $U'U$ de l'ellipse, qui porte les milieux K_1, K_2,... des cordes parallèles M_1M_1', M_2M_2',... Le lieu géométrique de ces milieux est le segment $L'L$ du diamètre $U'U$.

On a représenté sur la fig. 75 le diamètre $U'U$ de l'hyperbole correspondant aux cordes parallèles M_1M_1', M_2M_2', etc., qui porte les milieux K_1, K_2,... de ces cordes. Le lieu géométrique de ces points est un système de rayons $L'U'$ et LU.

Remarque. En géométrie élémentaire on appelle diamètre de la circonférence un segment (la plus grande corde). En géométrie analytique le terme « diamètre » est parfois employé pour désigner le segment LL'. Toutefois, on entend le plus souvent par diamètre la droite LL' toute entière.

§ 55. Diamètres de l'ellipse

Tous les diamètres de l'ellipse passent par son centre.

Le diamètre correspondant aux cordes parallèles au petit axe est le grand axe (*fig.* 76). Le diamètre correspondant aux cordes parallèles au grand axe est le petit axe.

Aux cordes de coefficient angulaire k ($k \neq 0$) correspond le diamètre $y = k_1x$, où k_1 est déterminé de la relation

$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1, \tag{1}$$

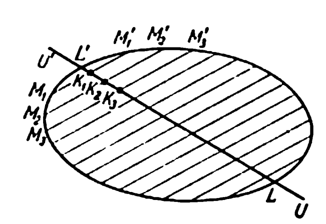


FIG. 74

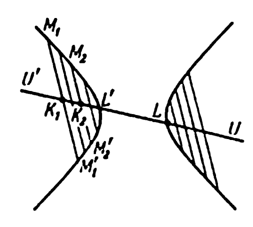


FIG. 75

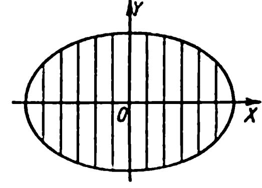


FIG. 76

c'est à-dire

$$kk_1 = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad (1a)$$

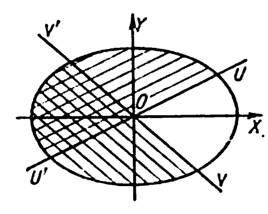


FIG. 77

EXEMPLE 1. Le diamètre $U'U$ de l'ellipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

(fig. 77) correspondant aux cordes de coefficient angulaire $k = -\frac{8}{9}$ est donné par l'équation $y = k_1 x$; la valeur k_1 est déterminée à partir de la relation $-\frac{8}{9}k_1 = -\frac{4}{9}$, de sorte que l'équation du diamètre $U'U$ est

$$y = \frac{1}{2}x.$$

EXEMPLE 2. Le diamètre $V'V$ (fig. 77) de la même ellipse correspondant aux cordes de coefficient angulaire $k = \frac{1}{2}$ est donné par l'équation $y = -\frac{8}{9}x$.

Si le diamètre $U'U$ de l'ellipse est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $V'V$, alors le diamètre $V'V$ est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $U'U$.

EXEMPLE 3. Le diamètre $y = -\frac{8}{9}x$ de l'ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ (cf. exemples 1 et 2) est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $y = \frac{1}{2}x$. De son côté, le diamètre $y = \frac{1}{2}x$ est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $y = -\frac{8}{9}x$.

Les diamètres tels que l'un est le lieu des milieux des cordes parallèles à l'autre sont dits *conjugués*.

Deux diamètres conjugués orthogonaux sont les *axes de symétrie*. Pour la circonférence tout diamètre est un axe de symétrie. Une ellipse différente d'une circonférence ne possède que deux axes de symétrie, le grand et le petit axe.

Les coefficients angulaires des directions conjuguées non principales ont, en vertu de (1a), des signes contraires, autrement dit deux diamètres conjugués de l'ellipse appartiennent à différents couples d'angles verticaux formés par les axes (sur la fig. 77 le diamètre $V'V$ est situé dans les IIe et IVe quadrants, et $U'U$ dans les Ier et IIIe quadrants). Lors d'une rotation du diamètre $U'U$, le diamètre conjugué $V'V$ effectue une rotation dans le même sens.

§ 56. Diamètres de l'hyperbole

Tous les diamètres de l'hyperbole passent par son centre.

Le diamètre correspondant aux cordes parallèles à l'axe imaginaire (fig. 78) est l'axe réel (le lieu géométrique des milieux des cordes est le système de rayons $A'X'$ et AX); le diamètre correspondant aux cordes parallèles à l'axe réel (fig. 79) est l'axe imaginaire (les milieux des cordes remplissent entièrement l'axe $Y'Y$).

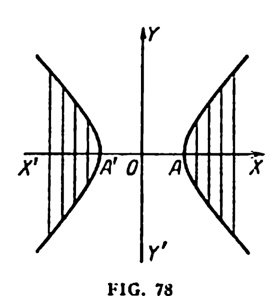


FIG. 78

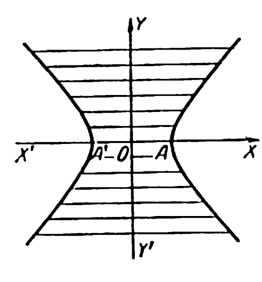


FIG. 79

Pour l'hyperbole comme pour l'ellipse le coefficient angulaire k des cordes parallèles ($k \neq 0$) et le coefficient angulaire k_1 du diamètre correspondant sont liés par la relation

$$kk_1 = \varepsilon^2 - 1. \qquad (1)$$

Mais la relation (1a) § 55 est remplacée par la relation

$$kk_1 = +\frac{b^2}{a^2}. \qquad (1b)$$

Exemple 1. Le diamètre $U'U$ de l'hyperbole $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ (fig. 80), correspondant aux cordes de coefficient angulaire $k = \frac{10}{9}$, est représenté par l'équation $y = k_1x$; la valeur k_1 est déterminée de la relation $kk_1 = \frac{4}{9}$, de sorte que l'équation du diamètre $U'U$ est $y = \frac{2}{5}x$.

Exemple 2. Le diamètre $V'V$ (fig. 80) de la même hyperbole, correspondant aux cordes de coefficient angulaire $k = \frac{2}{5}$, est représenté par l'équation $y = \frac{10}{9}x$.

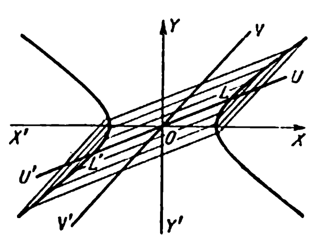


FIG. 80

Si le diamètre $U'U$ est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $V'V$, alors le diamètre $V'V$ est le lieu des milieux des cordes parallèles au diamètre $U'U$. Deux diamètres de ce genre sont dits *conjugués*.

Toute hyperbole ne possède que deux diamètres conjugués orthogonaux, l'axe réel et l'axe imaginaire.

Si le coefficient angulaire des cordes parallèles est plus grand en valeur absolue que le coefficient angulaire de l'asymptote, c'est-à-dire si

$$|k| > \frac{b}{a}$$

$\left(\text{cf. exemple 1, où } \frac{b}{a} = \frac{2}{3}\right)$, alors le lieu géométrique des milieux des cordes est le système de rayons $L'U'$ et LU. Si par contre

$$|k| < \frac{b}{a}$$

(cf. exemple 2), alors les milieux des cordes remplissent entièrement le diamètre ($V'V$ sur la fig. 80). De deux diamètres conjugués l'un appartient toujours au premier type et l'autre au second.

REMARQUE 1. Le coefficient angulaire des cordes parallèles ne peut être égal à $\frac{b}{a}$ en valeur absolue, car les droites $y = \pm \frac{b}{a} x$ (les asymptotes) ne coupent pas l'hyperbole, et les droites parallèles à l'asymptote ne coupent l'hyperbole qu'en un seul point.

Les coefficients angulaires des directions conjuguées non principales ont, en vertu de (1b), des signes identiques, autrement dit, deux diamètres conjugués de l'hyperbole appartiennent à un même couple d'angles verticaux formés par les axes.

Au contraire, par rapport aux asymptotes deux diamètres conjugués appartiennent à différents couples d'angles verticaux.

REMARQUE 2. Lors de la rotation du diamètre $U'U$ de l'hyperbole le diamètre conjugué $V'V$ effectue une rotation dans le sens contraire. Lorsque $U'U$ s'approche indéfiniment de l'une des asymptotes, $V'V$ s'approche indéfiniment de la *même* asymptote. C'est pourquoi on dit que cette asymptote est un diamètre *conjugué de soi-même*. Cette expression est conventionnelle car l'asymptote n'est pas un diamètre (cf. remarque 1). Outre les asymptotes, toute autre droite passant par le centre de l'hyperbole est l'un de ses diamètres.

§ 57. Diamètres de la parabole

Tous les diamètres de la parabole sont parallèles à son axe; cf. fig. 81 et 82 (le lieu géométrique des milieux des cordes parallèles de la parabole est le rayon LU).

Le diamètre correspondant aux cordes perpendiculaires à l'axe de la parabole est l'axe lui-même (fig. 83).

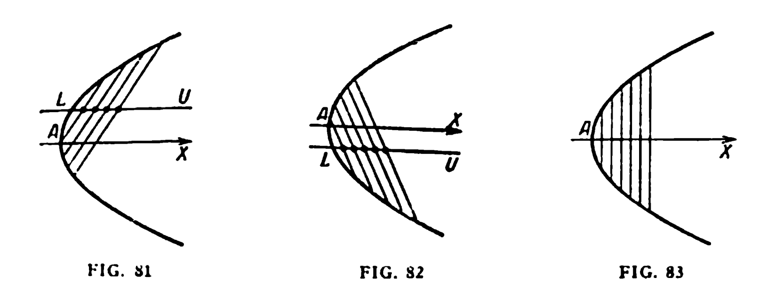


FIG. 81 FIG. 82 FIG. 83

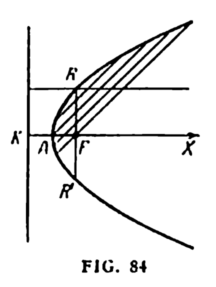


FIG. 84

Le diamètre de la parabole $y^2 = 2px$ correspondant aux cordes de coefficient angulaire $k (k \neq 0)$ est représenté par l'équation

$$y = \frac{p}{k}$$

(plus la pente de la corde par rapport à l'axe est grande, plus le diamètre est éloigné de l'axe (*)).

EXEMPLE. Le diamètre de la parabole $y^2 = 2px$, correspondant aux cordes formant un angle de $+ 45°$ ($k = 1$) avec l'axe, est représenté par l'équation $y = p$, autrement dit sa distance à l'axe AX (fig. 84) est égale à la demi-corde focale FR (§ 52). Cela signifie que le diamètre coupe la parabole au point R situé au-dessus du foyer F.

Toutes les droites parallèles à un diamètre quelconque de la parabole coupent la parabole en un seul point. C'est pourquoi la parabole ne possède pas de diamètres conjugués.

§ 58. Courbes du second degré

L'ellipse (en particulier la circonférence), l'hyperbole et la parabole sont des courbes du second degré, autrement dit dans tout système de coordonnées cartésiennes elles sont représentées par des équations algébriques du second degré. Toutefois, toute équation du second degré ne représente pas l'une de ces trois courbes. Il peut arriver, par exemple, qu'une équation du second degré représente un couple de droites.

EXEMPLE 1. L'équation

$$4x^2 - 9y^2 = 0 \tag{1}$$

qui se décompose en deux équations $2x - 3y = 0$ et $2x + 3y = 0$ représente un couple de droites se coupant à l'origine.

EXEMPLE 2. L'équation

$$x^2 - 2xy + y^2 - 9 = 0 \tag{2}$$

qui se décompose en deux équations $x - y + 3 = 0$ et $x - y - 3 = 0$ représente un couple de droites parallèles.

EXEMPLE 3. L'équation

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0, \tag{3}$$

c'est-à-dire $(x - y)^2 = 0$, représente une seule droite $x - y = 0$; mais le binôme $x - y$ figurant à la puissance deux dans le premier membre de (3), on admet que (3) représente deux droites confondues.

(*) Le coefficient angulaire de tout diamètre de la parabole est nul, autrement dit il vérifie l'équation $kk_1 = \varepsilon^2 - 1$ qui a lieu (§§ 55, 56) pour l'ellipse et l'hyperbole (pour a parabole $\varepsilon = 1$).

Il peut arriver qu'une équation du second degré ne représente qu'un seul point.

Exemple 4. L'équation

$$x^2 + \frac{1}{4} y^2 = 0 \tag{4}$$

ne possède qu'une seule solution réelle, précisément $x = 0$, $y = 0$. Elle représente le point (0, 0). Par ailleurs, l'équation (4) se décompose en deux équations $x + \frac{1}{2} iy = 0$ et $x - \frac{1}{2} iy = 0$ à coefficients imaginaires. C'est pourquoi on dit que (4) représente « un couple de droites imaginaires se coupant en un point réel ».

Il peut arriver enfin qu'une équation du second degré ne représente aucun lieu géométrique.

Exemple 5. L'équation

$$\frac{x^2}{-9} + \frac{y^2}{-16} = 1 \tag{5}$$

ne représente aucune courbe ni même un point, car la quantité $\frac{x^2}{-9} + \frac{y^2}{-16}$ ne peut avoit une valeur positive. Toutefois, du fait de la ressemblance de l'équation (5) avec l'équation de l'ellipse, on dit que l'équation (5) représente une « ellipse imaginaire ».

Exemple 6. L'équation

$$x^2 - 2xy + y^2 + 9 = 0 \tag{6}$$

ne représente non plus ni une courbe ni même un point. Toutefois, comme elle se décompose en deux équations $x - y + 3i = 0$ et $x - y - 3i = 0$, on dit (cf. exemple 2) que (6) représente « un couple de droites imaginaires parallèles ».

L'ellipse, l'hyperbole, la parabole et les couples de droites épuisent toutes les courbes que l'on peut représenter par une équation du second degré dans un système de coordonnées cartésiennes. En d'autres termes, on a le théorème suivant.

Théorème. *Toute courbe du second degré représente soit une ellipse, soit une hyperbole, soit une parabole, soit un couple de droites (concourantes, parallèles ou confondues).*

Démonstration. Par une transformation des coordonnées on ramène l'équation donnée du second degré à une forme plus simple, et alors ou bien on obtient l'une des équations canoniques $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (ellipse réelle ou imaginaire), $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$ (hyperbole),

$y^2 = 2px$ (parabole), ou bien on découvre que l'équation du second degré se décompose en deux équations du premier degré. Simultanément nous trouvons les dimensions de la courbe du second degré et sa position par rapport au système initial de coordonnées (par exemple, pour l'ellipse, la longueur des axes, leurs équations, la position du centre, etc.).

Les transformations indiquées sont effectuées aux §§ 61-62.

§ 59. Forme générale de l'équation du second degré

L'équation générale du second degré s'écrit habituellement sous la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{1}$$

On a introduit les notations $2B, 2D, 2E$ (et non B, D, E) car dans de nombreuses formules entrent les moitiés des coefficients de xy, x et y. Or, utilisant ces notations nous évitons les expressions fractionnaires.

EXEMPLE 1. Pour l'équation

$$x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 4y + 4 = 0$$

nous avons:

$$A = 1, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -2, \quad D = 1, \quad E = 2, \quad F = 4.$$

EXEMPLE 2. Pour l'équation $2xy + x + 5 = 0$ nous avons:

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{2}, \quad E = 0, \quad F = 5.$$

REMARQUE. Les quantités A, B, C, D, E, F peuvent prendre n'importe quelles valeurs à condition que A, B, C ne soient pas simultanément nulles, car dans ce cas l'équation (1) est du premier degré.

§ 60. Formes simplifiées de l'équation du second degré; remarques générales

Nous effectuerons la transformation de l'équation du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

pour obtenir l'une des formes simples (cf. § 58) d'après le schéma suivant (*).

(*) Le procédé que nous exposons ici n'est pas le plus rapide, mais il n'exige aucun théorème auxiliaire. Un autre procédé plus rapide est exposé aux §§ 69, 70.

a) Première étape. Nous éliminons d'abord le terme en xy (nous y parvenons par rotation des axes; cf. § 61).

b) Seconde étape. Nous éliminons les termes contenant le premier degré des coordonnées (nous y parvenons par translation de l'origine; cf. § 62).

§ 61. Première étape de la transformation de l'équation du second degré

(Si $B = 0$, cette transformation est inutile.)

Effectuons une rotation des axes de coordonnées d'un angle α vérifiant la condition (*)

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A - C}. \tag{2}$$

Les formules de transformation sont (§ 36):

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \quad y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha. \tag{3}$$

Les termes en $x'y'$ s'éliminent (**) et la nouvelle équation a la forme suivante:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \tag{4}$$

Exemple 1. Soit donnée l'équation

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0. \tag{1a}$$

Ici $A = 2, \quad B = -2, \quad C = 5, \quad D = -\frac{1}{2}, \quad E = \frac{5}{2}, \quad F = -4.$

Nous trouvons de la condition (2):

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}. \tag{2a}$$

(*) Si $A = C$ (la quantité $\frac{2B}{A - C}$ tend vers l'infini), alors on a (§ 21, remarque) $2\alpha = \pm 90°$, c'est-à-dire $\alpha = \pm 45°$.

(**) Le coefficient de $x'y'$ est de la forme

$$2B' = (C - A)\, 2 \sin\alpha \cos\alpha + 2B (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = (C - A) \sin 2\alpha + 2B \cos 2\alpha.$$

En vertu de (2) ce coefficient est nul.

Si l'angle 2α est pris dans le premier quadrant ($2\alpha \approx 53°8'$, $\alpha \approx 26°34'$), nous obtenons:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{3}{5},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Les formules (3) deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y', \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y'. \end{aligned}\right\} \qquad (3a)$$

Portant dans (1a), nous trouvons la nouvelle équation

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' + \frac{11}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0, \qquad (4a)$$

où

$$A' = 1, \quad B' = 0, \quad C' = 6, \quad D' = \frac{3}{2\sqrt{5}}, \quad E' = \frac{11}{2\sqrt{5}}, \quad F' = -4.$$

Si l'on prend l'angle 2α dans le troisième quadrant ($2\alpha \approx 233°8'$, $\alpha \approx 116°34'$), on obtient d'une manière analogue l'équation

$$6x'^2 + y'^2 + \frac{11}{\sqrt{5}}x' - \frac{3}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0,$$

où

$$A' = 6, \quad B' = 0, \quad C' = 1, \quad D' = \frac{11}{2\sqrt{5}}, \quad E' = -\frac{3}{2\sqrt{5}}, \quad F' = -4.$$

EXEMPLE 2. Soit donnée l'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0. \qquad (1b)$$

Ici

$$A = 1, \quad B = 1, \quad C = 1, \quad D = 1, \quad E = \frac{1}{2}, \quad F = 0.$$

Comme $A = C$, on peut (cf. renvoi (*) de la page 87) prendre $\alpha = 45°$. Portant dans (1b) les expressions

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos 45° - y'\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y &= x'\sin 45° + y'\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \end{aligned}\right\} \qquad (3b)$$

nous trouvons

$$2x'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0. \tag{4b}$$

Ici

$$A' = 2, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \quad D' = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad E' = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad F' = 0.$$

En prenant $\alpha = -45°$ nous obtenons:

$$2y'^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{3}{\sqrt{2}}y' = 0. \tag{4b'}$$

Ici

$$A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 2, \quad D' = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad E' = \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad F' = 0.$$

EXEMPLE 3. Soit donnée l'équation

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0. \tag{1c}$$

Comme $A = C$, on peut prendre $\alpha = 45°$. Portant les expressions (3b) dans (1c) nous trouvons:

$$4y'^2 - 8\sqrt{2}\,y' - 17 = 0. \tag{4c}$$

Prenant $\alpha = -45°$, nous obtenons:

$$4x'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 17 = 0. \tag{4c'}$$

§ 62. Seconde étape de la transformation de l'équation du second degré

On doit distinguer deux cas:

1) aucun des coefficients A', C' de l'équation

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{4}$$

n'est nul (il en était ainsi dans l'exemple 1 du § 61);

2) l'un des coefficients A', C' est nul (il en était ainsi dans les exemples 2 et 3) [*].

CAS 1. L'équation

$$A'x'^2 + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{4}$$

---

[*] Les coefficients A', C' ne peuvent être simultanément nuls (car dans ce cas l'équation (4) serait du premier degré).

subit la transformation suivante. On complète la somme $A'x'^2 + 2D'x' = A'\left(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}x'\right)$ par le terme $\frac{D'^2}{A'}$; on obtient $A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2$. On complète la somme $C'y'^2 + 2E'y'$ par le terme $\frac{E'^2}{C'}$; on obtient $C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2$. Pour compenser nous ajoutons $\frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'}$ au second membre de (4). Nous obtenons une équation de la forme

$$A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 = K', \tag{5}$$

où

$$K' = \frac{D'^2}{A'} + \frac{E'^2}{C'} - F'.$$

Transférons l'origine des coordonnées au point $\left(-\frac{D'}{A'}, -\frac{E'}{C'}\right)$, autrement dit effectuons la transformation des coordonnées (§ 35) à l'aide des formules

$$x' = \bar{x} - \frac{D'}{A'}, \quad y' = \bar{y} - \frac{E'}{C'}. \tag{6}$$

Nous obtenons l'équation

$$A'\bar{x}^2 + C'\bar{y}^2 = K' \qquad (A' \neq 0, \qquad C' \neq 0). \tag{7}$$

Si $K' \neq 0$, nous divisons cette équation par K'. Nous obtenons:

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{K'}{A'}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{K'}{C'}} = 1. \tag{8}$$

a) Si les deux quantités $\frac{K'}{A'}$ et $\frac{K'}{C'}$ sont positives, nous avons une ellipse.

b) Si les deux quantités $\frac{K'}{A'}$ et $\frac{K'}{C'}$ sont négatives, nous avons une ellipse imaginaire (cf. exemple 5 § 58).

c) Si l'une de ces quantités est positive et l'autre négative, nous avons une hyperbole.

Si par contre $K' = 0$, l'équation (7) est de la forme

$$A'\bar{x}^2 + C'\bar{y}^2 = 0. \tag{7'}$$

Deux cas sont possibles:

d) Si A' et C' sont de signes contraires, alors $A'\bar{x}^2 + C'\bar{y}^2$ se décompose en facteurs du premier degré, comme la différence des carrés. Les coefficients des deux facteurs sont réels et nous avons un couple de droites sécantes (cf. exemple 1 § 58).

e) Si A' et C' sont de même signe, alors $A'\bar{x}^2 + C'\bar{y}^2$ se décompose également en facteurs du premier degré, mais les deux facteurs contiennent des termes à coefficients imaginaires, et nous avons un couple de droites concourantes imaginaires, c'est-à-dire un point réel (cf. § 58, exemple 4).

EXEMPLE 1. L'équation (1a) de l'exemple 1 § 61 prend, après rotation des axes, la forme

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' + \frac{11}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0. \qquad (4a)$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\left(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \left(\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 + 4, \qquad (5a)$$

autrement dit

$$\left(x' + \frac{3}{2\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' + \frac{11}{12\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{131}{24}.$$

Passant à un nouveau système de coordonnées en transférant l'origine au point $\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}},\ -\frac{11}{12\sqrt{5}}\right)$ d'après les formules

$$x' = \bar{x} - \frac{3}{2\sqrt{5}}, \quad y' = \bar{y} - \frac{11}{12\sqrt{5}}, \qquad (6a)$$

nous obtenons

$$\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 = \frac{131}{24} \qquad (7a)$$

ou

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}} = 1. \qquad (8a)$$

L'équation étudiée est une ellipse dont les demi-axes sont $a = \sqrt{\frac{131}{24}} \approx 2{,}3$, $b = \sqrt{\frac{131}{144}} \approx 1{,}0$. Sur la fig. 85 (où OE est l'unité graphique) $a = O'A$, $b = O'B$.

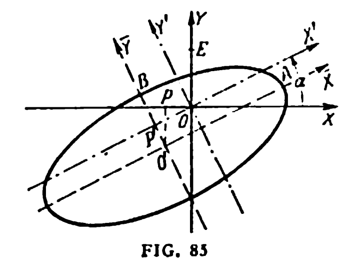


FIG. 85

Le centre de l'ellipse se trouve au point O' de coordonnées $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$. A l'aide des formules (6a) nous trouvons les coordonnées du centre dans le système auxiliaire $X'OY'$:

$$x' = -\frac{3}{2\sqrt{5}} \approx -0{,}7,$$

$$y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}} \approx -0{,}4.$$

Sur la fig. 85

$$x' = OP', \quad y' = P'O'.$$

Nous trouvons d'après les formules (3a) § 61 les coordonnées du centre dans le système initial XOY:

$$x_C = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right) = -\frac{5}{12} \approx -0{,}4,$$

$$y_C = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{11}{12\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{3} \approx -0{,}7.$$

Sur la fig. 85 $x_C = OP$, $y_C = PO'$.

Trouvons les équations des axes de l'ellipse dans le système initial. Dans le système $\bar{X}O'\bar{Y}$ le grand axe a pour équation $\bar{y} = 0$, dans le système $X'OY'$ ce même axe est, en vertu de la seconde équation (6a), représenté par l'équation $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$.

Résolvant le système (3a) par rapport à x', y' nous trouvons:

$$x' = \frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y,$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}}x.$$

Nous n'avons besoin que de la seconde de ces équations; y posant $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$, nous obtenons l'équation du grand axe dans le système XOY; précisément

$$\frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}}x = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$$

ou

$$12x - 24y - 11 = 0.$$

Par le même procédé nous trouvons l'équation du petit axe

$$4x + 2y + 3 = 0.$$

CAS 2. L'un des coefficients A', C' est nul. L'équation (4) est de la forme

$$A'x'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{9}$$

ou

$$C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0. \tag{9'}$$

Considérons une équation de la forme (9) [pour l'équation (9') les raisonnements sont les mêmes, seulement les rôles de x' et y' sont intervertis].

a) Si $E' \neq 0$, on peut résoudre l'équation (9) par rapport à y'; nous obtenons:

$$y' = -\frac{A'}{2E'}x'^2 - \frac{D'}{E'}x' - \frac{F'}{2E'}. \tag{10}$$

Nous avons une parabole. Les coordonnées du sommet sont déterminées par les formules (5) § 50 pour

$$a = -\frac{A'}{2E'}, \quad b = -\frac{D'}{E'}, \quad c = -\frac{F'}{2E'}.$$

b) Si $E' = 0$, l'équation (9) s'écrit

$$A'x'^2 + 2D'x' + F' = 0. \tag{11}$$

Décomposant le premier membre de (11) en facteurs du premier degré nous obtenons (*):

$$A'\left(x' - \frac{\sqrt{D'^2 - A'F'} - D'}{A'}\right)\left(x' + \frac{\sqrt{D'^2 - A'F'} + D'}{A'}\right) = 0. \tag{12}$$

L'équation (12) [et par conséquent (11)] représente un couple de droites parallèles si $D'^2 - A'F' > 0$, un couple de droites parallèles imaginaires si $D'^2 - A'F' < 0$ et deux droites confondues si $D'^2 - A'F' = 0$ (§ 58, exemples 2, 6 et 3).

EXEMPLE 2. L'équation (1b) de l'exemple 2 § 61 se transforme, après rotation des axes de 45°, de la manière suivante:

$$2x'^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' = 0. \tag{4b}$$

En la résolvant par rapport à y', nous obtenons:

$$y' = 2\sqrt{2}x'^2 + 3x'. \tag{10b}$$

(*) Les quantités $\frac{\sqrt{D'^2 - A'F'} - D'}{A'}$ et $\frac{-\sqrt{D'^2 - A'F'} - D'}{A'}$ sont les racines de l'équation (11).

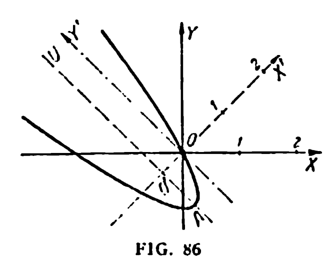


FIG. 86

L'équation (10b) [et par conséquent (1b)] représente une parabole (fig. 86) ; nous trouvons les coordonnées x', y' de son sommet A d'après les formules (5) § 50:

$$x'_A = -\frac{3}{4\sqrt{2}} \approx -0,5,$$

$$y'_A = -\frac{9}{8\sqrt{2}} \approx -0,8.$$

On peut trouver également les coordonnées du sommet sans avoir recours aux formules (5) § 50 (cf. § 50, remarque 1).

A l'aide des formules (3b) § 61 nous trouvons les coordonnées du sommet dans le système initial:

$$x_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} + \frac{9}{8\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{16} \approx 0,2,$$

$$y_A = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{3}{4\sqrt{2}} - \frac{9}{8\sqrt{2}}\right) = -\frac{15}{16} \approx -0,9.$$

Trouvons l'équation de l'axe AU de la parabole. Dans le nouveau système cet axe est représenté par l'équation

$$x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Résolvant les équations (3b) par rapport à x', y', nous trouvons:

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y),$$

$$y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(y - x).$$

Portant $x' = -\frac{3}{4\sqrt{2}}$ dans la première de ces équations (nous n'avons pas besoin de la seconde), nous obtenons:

$$-\frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

ou

$$4x + 4y + 3 = 0.$$

C'est l'équation de l'axe de la parabole dans le système initial de coordonnées.

EXEMPLE 3. L'équation (1c) de l'exemple 3 § 61 devient, après rotation des axes d'un angle de — 45°,

$$4x'^2 + 8\sqrt{2}\,x' - 17 = 0. \qquad (4c')$$

Décomposant le premier membre de (4c') en facteurs, nous obtenons:

$$4\left(x' - \frac{5-2\sqrt{2}}{2}\right)\left(x' + \frac{5+2\sqrt{2}}{2}\right) = 0, \qquad (12c)$$

autrement dit un couple de droites parallèles (UV et $U'V'$ sur la fig. 87):

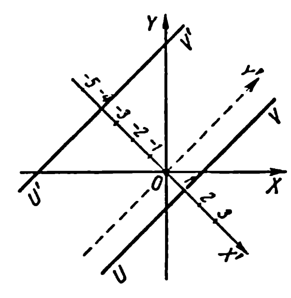


FIG. 87

$$x' = \frac{5-2\sqrt{2}}{2}, \qquad x' = -\frac{5+2\sqrt{2}}{2}. \qquad (13)$$

Trouvons l'équation de ces droites dans le système XOY. Comme le système XOY s'obtient de $X'OY'$ par une rotation de + 45°, nous avons

$$x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y), \quad y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y). \qquad (14)$$

Portant dans la première de ces équations d'abord l'une, puis l'autre valeur (13), nous trouvons:

$$\frac{5-2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y),$$

$$-\frac{5+2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y)$$

ou

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y - 5 + 2\sqrt{2} = 0,$$

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y + 5 + 2\sqrt{2} = 0.$$

Ce sont les équations des droites UV, $U'V'$ dans le système initial de coordonnées.

§ 63. Artifices facilitant la simplification des équations du second degré

Le procédé de simplification des équations du second degré exposé aux §§ 61-62 présente deux avantages sur les autres procédés: 1) il donne une classification complète des courbes du second degré (ou coni-

ques) (théorème du § 58); 2) il est uniforme et simple. Toutefois ce procédé nécessite des calculs relativement laborieux.

Dans de nombreux cas on peut simplifier les calculs.

1. Pour les courbes du second degré qui se composent de deux droites (§ 58, exemples 2, 3, 4, 6) on peut trouver aisément les équations des deux droites sans effectuer la transformation des coordonnées. Ce procédé sera exposé au § 65; on donnera préalablement au § 64 un critère de décomposition.

2. Une conique véritable peut être soit une ellipse, soit une hyperbole, soit une parabole. L'ellipse et l'hyperbole possèdent un centre, alors que la parabole n'en a pas. C'est pourquoi il est commode de commencer la simplification des équations de l'ellipse et de l'hyperbole par une translation de l'origine au centre. On peut déterminer d'avance le genre de la courbe du second degré. Le critère correspondant est exposé au § 67; au § 68 on précise la notion de centre et au § 69 on explique comment trouver les coordonnées du centre. Au § 70 on donne le procédé de simplification des équations de l'ellipse et de l'hyperbole.

3. En ce qui concerne la parabole, le procédé de simplification exposé au § 61 reste le meilleur. On peut d'ailleurs trouver aisément les dimensions de la parabole (c'est-à-dire la valeur du paramètre p) à l'aide des invariants. Nous en parlerons au § 66.

§ 64. Critère de décomposition des courbes du second degré

Si la courbe du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

est un système de deux droites (distinctes ou confondues) (elles peuvent être imaginaires), le déterminant du troisième ordre (§ 118)

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} \tag{2}$$

s'annule. Inversement si $\Delta = 0$, alors la courbe (1) se compose de deux droites.

Pour la démonstration se rapporter au § 65 (remarque 2).

Exemple 1. Au § 61 (exemple 3) on avait considéré la courbe du second degré

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$$
$$(A = 2,\ B = -2,\ C = 2,\ D = 4,\ E = -4,\ F = -17).$$

Au § 62 on avait établi (exemple 3) que cette courbe se compose de deux droites parallèles:

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y - 5 + 2\sqrt{2} = 0 \tag{3}$$

et

$$\sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,y + 5 + 2\sqrt{2} = 0. \tag{4}$$

Donc, Δ doit être nul. En effet

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -4 & -17 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 4 & -17 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-50) + 2 \cdot 50 + 0 = 0.$$

EXEMPLE 2. La courbe du second degré

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$$

est une conique véritable, car

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

autrement dit, Δ n'est pas nul. On a montré aux §§ 61, 62 (exemple 1) que cette courbe est une ellipse.

RÈGLE MNÉMONIQUE POUR L'EXPRESSION (2): dans la première ligne on écrit dans l'ordre les coefficients des termes en x de (1), dans la seconde ligne les coefficients des termes en y, dans la troisième ligne les trois derniers coefficients.

§ 65. Recherche des droites composant une courbe du second degré

Pour trouver les équations de deux droites qui constituent ensemble une courbe du second degré

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

(cf. § 64) il suffit de décomposer le premier membre de (1) en facteurs du premier degré. Quand l'un au moins des coefficients A, C n'est pas

nul, le mieux est de résoudre l'équation (1) par rapport à celle des coordonnées x, y, qui y figure au second degré. Les deux solutions (elles peuvent être identiques) représentent les deux droites recherchées.

EXEMPLE 1. La courbe du second degré

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 8x - 8y - 17 = 0 \tag{2}$$

est l'ensemble de deux droites, car

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & -17 \end{vmatrix}$$

est nul. On peut résoudre l'équation (2) par rapport à n'importe laquelle des coordonnées x, y (toutes deux y figurent au second degré). Mettant (2) sous la forme

$$y^2 - 2(x+2)\,y + \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right) = 0,$$

nous la résolvons par rapport à y; nous obtenons ainsi:

$$y = x + 2 \pm \sqrt{(x+2)^2 - \left(x^2 + 4x - \frac{17}{2}\right)},$$

c'est-à-dire

$$y = x + 2 \pm \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

L'une de ces droites est représentée par l'équation $y = x + 2 + \frac{5}{\sqrt{2}}$, l'autre par l'équation $y = x + 2 - \frac{5}{\sqrt{2}}$. Ces droites sont parallèles (cf. exemple 3 §§ 61-62).

EXEMPLE 2. La courbe du second degré

$$2x^2 + 7xy - 15y^2 - 10x + 54y - 48 = 0 \tag{3}$$

est un système de deux droites, car

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & \frac{7}{2} & -5 \\ \frac{7}{2} & -15 & 27 \\ -5 & 27 & -48 \end{vmatrix} = 0.$$

Mettant (3) sous la forme

$$15y^2 - (7x + 54)\,y - (2x^2 - 10x - 48) = 0,$$

nous trouvons:

$$y = \frac{7x + 54 \pm \sqrt{(7x+54)^2 + 4 \cdot 15\,(2x^2 - 10x - 48)}}{30},$$

L'expression sous le radical est égale à $169x^2 + 156x + 36 = (13x + 6)^2$. Par conséquent, $y = \frac{7x + 54 \pm (13x + 6)}{30}$. L'une de ces droites est représentée par l'équation $y = \frac{2x + 6}{3}$, l'autre par l'équation $y = \frac{-x + 8}{5}$. Ces deux droites se coupent au point $\left(-\frac{6}{13}, \frac{22}{13}\right)$.

EXEMPLE 3. La courbe

$$10xy - 14x + 15y - 21 = 0 \tag{4}$$

se compose de deux droites, car

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -7 \\ 5 & 0 & \frac{15}{2} \\ -7 & \frac{15}{2} & -21 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans l'équation (4) x comme y ne figure qu'au premier degré. C'est pourquoi nous décomposons le premier membre de (4) en facteurs en groupant les termes. Nous obtenons:

$$10xy - 14x + 15y - 21 = 2x(5y - 7) + 3(5y - 7) = (2x + 3)(5y - 7).$$

La courbe (4) se compose de deux droites: $2x + 3 = 0$ et $5y - 7 = 0$.

REMARQUE 1. Dans le cas où $A = C = 0$, on peut également résoudre l'équation considérée par rapport à x ou y; ainsi, dans l'exemple 3 nous obtenons $(10x + 15)y = 14x + 21$, mais on ne peut diviser les deux membres par $10x + 15$ que dans le cas où $10x + 15$ n'est pas nul. Nous obtenons alors $y = \frac{14x + 21}{10x + 15} = \frac{7(2x + 3)}{5(2x + 3)} = \frac{7}{5}$, et l'équation de l'une des droites est $y = \frac{7}{5}$, c'est-à-dire $5y - 7 = 0$. Dans le cas où $10x + 15 = 0$, c'est-à-dire $x = -\frac{3}{2}$, l'équation $(10x + 15)y = 14x + 21$ est satisfaite pour n'importe quelle valeur de y; nous obtenons ainsi l'autre droite $x = -\frac{3}{2}$, c'est-à-dire $2x + 3 = 0$

REMARQUE 2. Les calculs réalisés dans les exemples 1 et 2 peuvent être effectués pour toute équation de la forme (1) si seulement $C \neq 0$. Répétant ces calculs dans le cas général, nous obtenons sous le radical le trinôme carré

$$(B^2 - AC)x^2 + 2(BE - CD)x + E^2 - CF. \tag{5}$$

Il sera un carré parfait si, et seulement si,

$$(BE - CD)^2 - (B^2 - AC)(E^2 - CF) = 0. \tag{6}$$

Nous voyons après quelques transformations simples que le premier membre de l'égalité (6) est égal à $C\Delta$, où Δ est le déterminant du troisième ordre. Comme par hypothèse $C \neq 0$, le critère de décomposition est $\Delta = 0$. Dans le cas où $C = 0$, mais $A \neq 0$, nous parvenons à cette même conclusion en intervertissant les rôles de x et y. C'est ainsi qu'on établit le critère du § 64 dans le cas général. Dans le cas exceptionnel où $A = C = 0$ (et par conséquent $B \neq 0$), le premier membre de l'équation (1) a pour expression

$$2Bxy + 2Dx + 2Ey + F.$$

Mettons ce polynôme sous la forme $2x(By + D) + (2Ey + F)$. Cette expression se décompose en facteurs du premier degré uniquement dans le cas où les coefficients correspondants des binômes $By + D$ et $2Ey + F$ sont égaux ou proportionnels (cf. exemple 3), c'est-à-dire quand $2DE - BF = 0$. Mais dans le cas considéré Δ est de la forme $\begin{vmatrix} 0 & B & D \\ B & 0 & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$, d'où il découle que $2DE - BF = \frac{\Delta}{B}$. C'est ainsi qu'on établit le critère du § 64 dans le cas exceptionnel.

§ 66. Invariants d'une équation du second degré

Lors du passage d'un système de coordonnées rectangulaires à un autre, nous remplaçons l'équation

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \tag{1}$$

de la courbe du second degré par une autre équation

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0 \tag{2}$$

que l'on obtient de (1) à l'aide des formules de transformation des coordonnées (cf. exemples §§ 61 et 62). Les valeurs de A', B', C', D', E', F' (toutes ou certaines d'entre elles) diffèrent alors des valeurs des grandeurs correspondantes A, B, C, D, E, F.

Toutefois les trois expressions que nous allons rapporter plus bas, formées des grandeurs A', B', C', D', E', F', restent toujours *égales aux expressions correspondantes formées à partir des grandeurs* A, B, C, D, E, F. Ces trois expressions sont appelées les *invariants* de l'équation du second degré.

a) Le premier invariant est $A + C$.

b) Le second invariant est $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

c) Le troisième invariant est

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

Exemple 1. L'équation

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$$

$$\left(A = 2,\ B = -2,\ C = 5,\ D = -\frac{1}{2},\ E = \frac{5}{2},\ F = -4\right)$$

avait été mise au § 61 (exemple 1) sous la forme

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}x' + \frac{11}{\sqrt{5}}y' - 4 = 0$$

$$\left(A' = 1,\ B' = 0,\ C' = 6,\ D' = \frac{3}{2\sqrt{5}},\ E' = \frac{11}{2\sqrt{5}},\ F' = -4\right)$$

par une rotation des axes d'un angle $\operatorname{arc\,sin} \frac{1}{\sqrt{5}} \approx 26°34'$.

a) L'expression $A + C$ était dans l'ancien système égale à $2 + 5 = 7$, dans le nouveau système l'expression correspondante $A' + C' = 1 + 6 = 7$, de sorte que

$$A + C = A' + C'.$$

b) Dans l'ancien système on avait

$$\delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - (-2) \cdot (-2) = 6,$$

dans le nouveau système nous avons:

$$\delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

de sorte que

$$\delta = \delta'.$$

c) Dans l'ancien système on avait

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

dans le nouveau système

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{5}} \\ 0 & 6 & \frac{11}{2\sqrt{5}} \\ \frac{3}{2\sqrt{5}} & \frac{11}{2\sqrt{5}} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

de sorte que

$$\Delta = \Delta'.$$

EXEMPLE 2. L'équation

$$x'^2 + 6y'^2 + \frac{3}{\sqrt{5}} x' + \frac{11}{\sqrt{5}} y' - 4 = 0$$

avait été mise au § 62 (cf. exemple 1) sous la forme $\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - \frac{131}{24} = 0$ en transférant l'origine des coordonnées au point $x' = -\frac{3}{2\sqrt{5}}$, $y' = -\frac{11}{12\sqrt{5}}$. On a maintenant:

$$\bar{\Delta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{131}{24} \end{vmatrix} = -\frac{131}{4},$$

c'est-à-dire

$$\bar{\Delta} = \Delta' = \Delta.$$

Les deux autres invariants conservent évidemment les valeurs initiales.

Pour démontrer l'invariance de chacune des quantités étudiées en a), b), c) il suffit de former les expressions des quantités A', B', C', ... en fonction de A, B, C, ... (ces expressions renferment également l'angle de rotation α et les coordonnées de la nouvelle origine des coordonnées).

En les portant, par exemple, dans $A' + C'$, nous trouvons après simplification $A + C$, etc. Toutefois les calculs correspondants sont fort laborieux (*).

REMARQUE. Si l'on multiplie (ou si l'on divise) les deux membres de l'équation (1) par un nombre arbitraire k, la nouvelle équation représente la même courbe du second degré. Toutefois, les quantités de a), b), c) sont modifiées: la première est multipliée par k, la seconde par k^2, la troisième par k^3. C'est la raison pour laquelle ces quantités sont appelées les invariants de l'*équation* du second degré et non les invariants de la *courbe* du second degré.

§ 67. Trois genres de courbes du second degré

δ (§ 66) est positif pour l'ellipse (cf. exemple 1 § 66), négatif pour l'hyperbole et nul pour la parabole.

DÉMONSTRATION. L'ellipse est représentée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Pour cette équation $\delta = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{b^2} > 0$. Par la transformation des coordonnées δ conserve sa valeur, et lorsqu'on multiplie les deux membres de l'équation par un nombre arbitraire k, il est multiplié par k^2 (§ 66, remarque). Par conséquent, il est positif dans tout système de coordonnées. La démonstration est analogue dans le cas de l'hyperbole et de la parabole.

Conformément à cela on distingue trois genres de courbes du second degré (et d'équations du second degré).

a) *Genre ellipse*, caractérisé par la condition

$$\delta = AC - B^2 > 0.$$

Ce sont, outre l'ellipse réelle, l'ellipse imaginaire (§ 58, exemple 5) et deux droites imaginaires se coupant en un point réel (§ 58, exemple 4).

b) *Genre hyperbole*, caractérisé par la condition

$$\delta = AC - B^2 < 0$$

[hyperbole, deux droites concourantes réelles (§ 58, exemple 1)].

c) *Genre parabole*, caractérisé par la condition

$$\delta = AC - B^2 = 0$$

[parabole, deux droites parallèles (réelles ou imaginaires) confondues ou distinctes].

(*) Il existe des procédés artificiels allégeant la démonstration.

EXEMPLE 1. L'équation

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y = 0 \tag{1}$$

est du genre parabole, car

$$\delta = AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 1^2 = 0.$$

Comme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$$

n'est pas nul, l'équation (1) représente une conique véritable, autrement dit une parabole (cf. §§ 61-62, exemple 2).

EXEMPLE 2. L'équation

$$8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0 \tag{2}$$

est du genre hyperbole, car

$$\delta = AC - B^2 = 8 \cdot 1 - 12^2 = -136 < 0;$$

comme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 12 & -28 \\ 12 & 1 & 9 \\ -28 & 9 & -55 \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation (2) représente un couple de droites concourantes. On peut trouver leurs équations par la méthode du § 65.

EXEMPLE 3. L'équation

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0$$

est du genre ellipse, car

$$\delta = AC - B^2 = 5 \cdot 2 - 2^2 = 6 > 0.$$

Comme

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & \frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -4 \end{vmatrix} \neq 0,$$

la courbe est une conique véritable et, par conséquent, une ellipse.

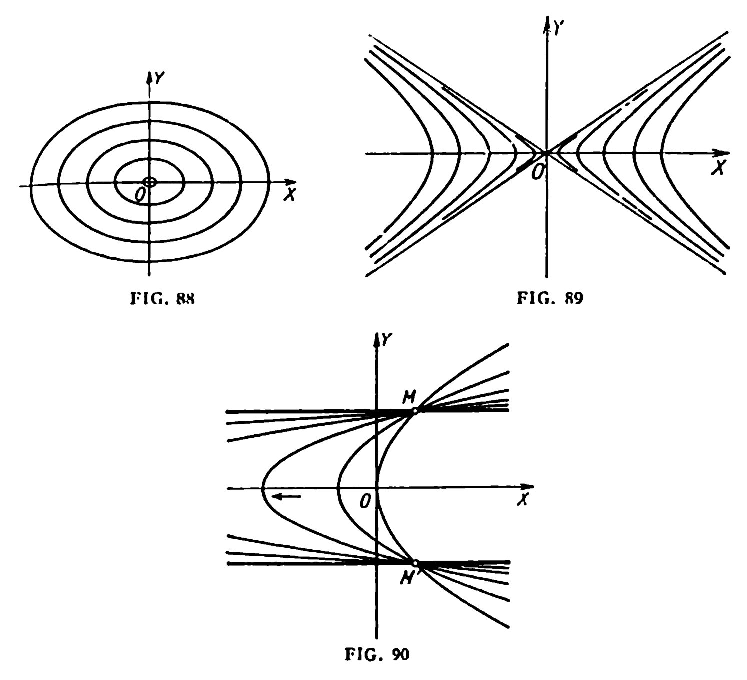


FIG. 88

FIG. 89

FIG. 90

REMARQUE. Les courbes du même genre sont liées géométriquement de la manière suivante: le couple de droites concourantes imaginaires (donc un seul point réel) est le cas limite de l'ellipse se réduisant à un point (fig. 88); le couple de droites concourantes réelles est le cas limite de l'hyperbole qui s'approche de ses asymptotes (fig. 89); le couple de droites parallèles est le cas limite de la parabole dont l'axe et un couple de points M, M' symétriques par rapport à l'axe (fig. 90) sont immobiles et le sommet tend vers l'infini.

§ 68. Coniques à centre

DÉFINITION. On dit que les points A et B (fig. 91) sont *symétriques* par rapport au point C si C est le milieu du segment AB. Le point C est appelé *centre de symétrie* (ou simplement *centre*) de la figure si pour

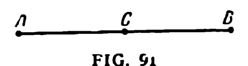


FIG. 91

tout point M de cette figure il existe un point N symétrique de M par rapport à C.

Le point que nous avons appelé (§ 40) centre de l'ellipse ainsi que le point appelé (§ 44) centre de l'hyperbole répondent évidemment à la définition du présent paragraphe. Le centre d'une conique se composant de deux droites concourantes (§ 58) est, conformément à la définition du présent paragraphe, le point d'intersection de ces droites (L sur la fig. 92).

Chacune des coniques considérées plus haut possède un centre unique. Par contre, si la courbe du second degré se compose de deux droites parallèles (AB et CD sur la fig. 93), alors *tout* point de la droite MN équidistante de AB et de CD satisfait à la définition du centre.

La parabole n'a pas de centre.

On distingue donc les coniques à centre unique (l'ellipse, l'hyperbole, deux droites concourantes), les coniques à une infinité de centres et celles qui n'en ont pas (la parabole, deux droites parallèles).

REMARQUE. On estime que les ellipses imaginaires et les couples de droites imaginaires se coupant en un point réel (cf. § 58) sont les coniques à centre. En ce qui concerne l'ellipse imaginaire il s'agit d'une convention, alors que la figure composée d'un seul point réel satisfait à la définition d'une conique à centre (ce point unique est lui-même le centre). Deux droites parallèles imaginaires (§ 58) sont une conique dépourvue de centre.

Ainsi les coniques du genre ellipse et hyperbole (pour elles $AC - B^2 \neq 0$, cf. § 67) sont à centre; les coniques du genre parabole ($AC - B^2 = 0$) n'ont pas de centre ou en possèdent une infinité.

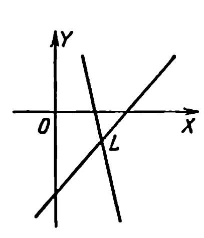


FIG. 92

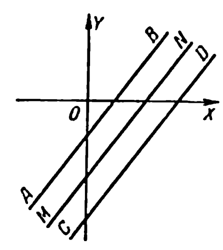


FIG. 93

§ 69. Recherche du centre d'une conique

Pour trouver les coordonnées x_0, y_0 du centre de la conique

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1}$$

il faut résoudre le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0,\\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ce système d'équations possède une solution unique (§ 187)

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} D & B \\ E & C \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \qquad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} A & D \\ B & E \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}}, \tag{3}$$

étant donné que $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \neq 0$ (c'est précisément la condition pour que la conique soit à centre; § 68).

EXEMPLE 1. Nous trouvons le centre de la conique (exemple 2 § 67)

$$8x^2 + 24xy + y^2 - 56x + 18y - 55 = 0 \tag{4}$$

en résolvant le système

$$8x_0 + 12y_0 - 28 = 0,$$
$$12x_0 + y_0 + 9 = 0.$$

Nous obtenons:

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} -28 & 12 \\ 9 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}} = -1, \qquad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} 8 & -28 \\ 12 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 1 \end{vmatrix}} = 3.$$

Comme (4) est une conique du genre hyperbole composée de deux droites, le point (— 1, 3) est le point d'intersection de ces droites.

EXEMPLE 2. Nous trouvons le centre de la conique (exemple 1 § 61)

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0 \tag{5}$$

en résolvant le système

$$2x_0 - 2y_0 - \frac{1}{2} = 0,$$

$$-2x_0 + 5y_0 + \frac{5}{2} = 0.$$

Nous obtenons:

$$x_0 = -\frac{5}{12}, \quad y_0 = -\frac{2}{3}.$$

La conique (5) est une ellipse (étant donné que $\delta > 0$ et $\Delta \neq 0$).

DÉDUCTION DES ÉQUATIONS (2). Si l'on transfère l'origine au centre cherché C (x_0, y_0), l'équation (1) en vertu des formules

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y' \tag{6}$$

devient

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2(Ax_0 + By_0 + D)\,x' + 2(Bx_0 + Cy_0 + \\ + E)\,y' + F' = 0, \tag{7}$$

où l'on a posé

$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

Si x_0, y_0 vérifient les équations (2), alors (7) prend la forme

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \tag{8}$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$A(-x')^2 + 2B(-x')(-y') + C(-y')^2 + F' = 0.$$

C'est pourquoi avec chaque point $M(x', y')$ appartenant à la conique (8) celle-ci contient le point N $(-x', -y')$, symétrique de M par rapport à la nouvelle origine C. Par conséquent (§ 68), C est le centre de la conique (8).

§ 70. Simplification de l'équation d'une conique à centre

On peut ramener l'équation d'une conique à centre à sa forme la plus simple plus rapidement que par la méthode générale du § 60 si l'on effectue d'abord une translation de l'origine au centre (de sorte que les termes du premier degré disparaîtront; cf. § 69), puis une rotation des axes (de sorte que le terme en xy disparaîtra). L'angle α de cette rotation est connu à l'avance (§ 61); il est déterminé à partir de l'équation

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C}. \tag{1}$$

REMARQUE. Ce procédé peut être appliqué à n'importe quelle conique à centre, mais pour les systèmes de deux droites il est préférable d'appliquer la méthode du § 65.

EXEMPLE. Soit donnée l'équation (exemple 1 §§ 61-62)

$$2x^2 - 4xy + 5y^2 - x + 5y - 4 = 0. \tag{2}$$

Transférons l'origine au centre $x_0 = -\frac{5}{12}$, $y_0 = -\frac{2}{3}$ (§ 69, exemple 2).

Utilisant les formules

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y' \tag{3}$$

nous obtenons [cf. (8) § 69]:

$$2x'^2 - 4x'y' + 5y'^2 - \frac{131}{24} = 0. \tag{4}$$

Nous trouvons de (1) tg $2\alpha = \frac{4}{3}$, et en prenant l'angle α dans le premier quadrant (cf. § 61) nous obtenons les formules de rotation

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{x} - \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{y}, \\ y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{x} + \frac{2}{\sqrt{5}}\bar{y}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Portant dans (4) nous trouvons:

$$\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 = \frac{131}{24} \tag{6}$$

ou

$$\frac{\bar{x}^2}{\frac{131}{24}} + \frac{\bar{y}^2}{\frac{131}{144}} = 1. \tag{7}$$

Cette conique est une ellipse de demi-axes $a = \sqrt{\frac{131}{24}} \approx 2{,}3$ et $b = \sqrt{\frac{131}{144}} \approx 1{,}0$. Dans le système initial les coordonnées de son centre sont $x_0 = -\frac{5}{12}$, $y_0 = -\frac{2}{3}$, le grand axe (c'est l'axe des abscisses dans le système $\bar{x}$, $\bar{y}$) est représenté par l'équation $y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha(x - x_0)$ ou $y + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{5}{12}\right)$, c'est-à-dire $12x - 24y - 11 = 0$ (cf. § 62, exemple 1).

Remarque. On peut trouver les dimensions de l'ellipse sans effectuer la transformation des coordonnées. Nous savons à l'avance que par suite de la transformation nous devons obtenir une équation de la forme $\bar{A}\bar{x}^2 + \bar{C}\bar{y}^2 + \bar{F} = 0$. On peut trouver les grandeurs $\bar{A}$, $\bar{C}$ et $\bar{F}$ à l'aide

des invariants (§ 66). Pour l'équation initiale ils prennent les valeurs

$$A + C = 2 + 5 = 7, \quad \delta = AC - B^2 = 2 \cdot 5 - (-2)^2 = 6,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = -\frac{131}{4}.$$

Ils doivent avoir les mêmes valeurs pour l'équation simplifiée. Par conséquent,

$$\overline{A} + \overline{C} = 7, \quad \overline{A}\overline{C} = 6,$$

$$\begin{vmatrix} \overline{A} & 0 & 0 \\ 0 & \overline{C} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{F} \end{vmatrix} = \overline{A}\overline{C}\overline{F} = -\frac{131}{4},$$

d'où

$$\overline{A} = 1, \quad \overline{C} = 6, \quad \overline{F} = -\frac{131}{24},$$

de sorte que nous obtenons de nouveau l'équation (6).

§ 71. Hyperbole équilatère graphique de l'équation $y = \frac{k}{x}$

L'équation

$$y = \frac{k}{x} \tag{1}$$

($k \neq 0$) représente une hyperbole équilatère (§ 44) dont les asymptotes coïncident avec les axes de coordonnées. Ses demi-axes sont

$$a = b = \sqrt{2\,|k|}. \tag{2}$$

Si $k > 0$, les branches de l'hyperbole sont situées l'une dans le premier, l'autre dans le troisième quadrant, si par contre $k < 0$, elles sont situées dans le second et le quatrième quadrant (fig. 94). Dans le premier cas l'axe réel de l'hyperbole forme avec l'axe des abscisses un angle de 45°, dans le second cas un angle de — 45°.

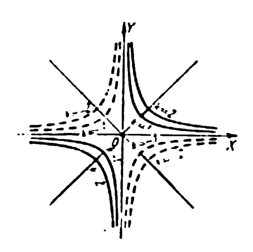


FIG. 94

Tout cela peut être établi par la méthode du § 61 si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$xy = k. \tag{3}$$

REMARQUE. Dans le cas où $k = 0$, l'équation (3) représente le couple de droites $y = 0$ (axe des abscisses) et $x = 0$ (axe des ordonnées). Quand $|k|$ décroît indéfiniment, les hyperboles (3) s'approchent de plus en plus de ces droites (de sorte que l'on peut considérer le couple de droites perpendiculaires comme une hyperbole équilatère dégénérée).

L'équation (1) pour $k = 0$ représente la seule droite $y = 0$ (axe des abscisses), non pas toute entière d'ailleurs, mais sans l'origine des coordonnées, car pour $k = 0$ et $x = 0$ l'expression $y = \frac{k}{x}$ devient indéterminée. Si nous donnons à cette indétermination toutes les valeurs possibles, nous obtiendrons la droite « disparue».

§ 72. Hyperbole équilatère graphique de l'équation $y = \frac{mx+n}{px+q}$

Considérons l'équation

$$y = \frac{mx+n}{px+q} \tag{1}$$

pour $p \neq 0$ $\left(\text{pour } p = 0 \text{ nous avons la droite } y = \frac{m}{q}x + \frac{n}{q}\right)$.

Si le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np$$

n'est pas nul, l'équation (1) représente la même hyperbole équilatère que l'équation (1) du § 71:

$$y = \frac{k}{x},$$

où $k = -\frac{D}{p^2}$, avec cette différence que le centre est déplacé de l'origine des coordonnées au point $C\left(-\frac{q}{p}, \frac{m}{p}\right)$ (fig. 95, 96). Cela signifie (§ 71) que les demi-axes sont égaux: $a = b = \sqrt{\frac{2|D|}{p^2}}$.

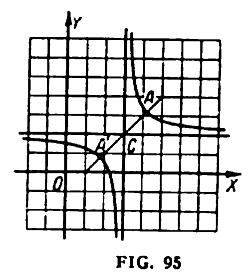


FIG. 95

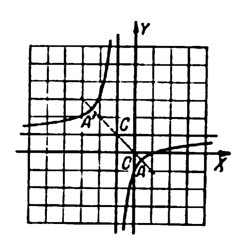


FIG. 96

Dans le cas où $D < 0$ (alors $k > 0$), l'axe réel forme avec l'axe des abscisses un angle de $+45°$ (fig. 95), si par contre $D > 0$, cet angle est de $-45°$ (fig. 96).

EXEMPLE 1. L'équation

$$y = \frac{4x - 9}{2x - 6}$$

$\left(\text{ici } m = 4,\ n = -9,\ p = 2,\ q = -6,\ D = \begin{vmatrix} 4 & -9 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -6\right)$ représente une hyperbole équilatère (fig. 95) de centre $C\,(3, 2)$ et de demi-axes $a = b = \sqrt{\frac{2 \cdot 6}{2^2}} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. L'axe $A'A$ forme avec OX un angle de 45°, car $D < 0$. Les coordonnées du sommet A sont:

$$x_A = x_C + a \cos 45° = 3 + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 4{,}2,$$

$$y_A = y_C + a \sin 45° = 2 + \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}2.$$

Nous trouvons de même:

$$x_{A'} = 3 - \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}8, \quad y_{A'} = 2 - \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}8.$$

EXEMPLE 2. L'équation

$$y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

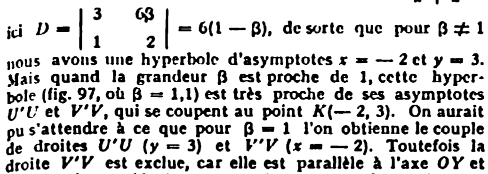
(ici $m = 1$, $n = -1$, $p = 1$, $q = 1$, $D = 2$) représente une hyperbole équilatère (fig. 96) de centre $C(-1, +1)$ et de demi-axes $a = b = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1^2}} = 2$. L'axe $A'A$ forme avec OX un angle de $-45°$, étant donné que $D > 0$.

REMARQUE 1. Si le déterminant $D = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$ est nul, les quantités n, m et p, q sont proportionnelles $\left(\frac{m}{p} = \frac{n}{q}\right)$, de sorte que $mx + n$ est divisible par $px + q$; le quotient est $\frac{m}{p}$. L'équation (1) représente alors la droite $y = \frac{m}{p}$, sans le point $x = -\frac{q}{p}$ $\left(\text{pour } x = -\frac{q}{p}\right.$ l'expression (1) est indéterminée; cf. § 71, remarque$\left.\right)$.

Par exemple, l'équation $y = \frac{3x + 6}{x + 2}$ $\left(m = 3,\ n = 6,\ p = 1,\ q = 2,\ D = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0\right)$ représente la droite $y = 3$ sans le point $x = -2$. Si l'on donne à la quantité indé-

terminée y toutes les valeurs possibles, on obtiendra, outre la droite $y = 3$, encore la droite $x = -2$.

REMARQUE 2. Le fait que le point $x = -2$ est «exclu» de la droite $y = 3$ peut être clairement illustré de



la manière suivante. Considérons l'équation $y = \frac{3x + 6\beta}{x + 2}$; ici $D = \begin{vmatrix} 3 & 6\beta \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6(1 - \beta)$, de sorte que pour $\beta \neq 1$ nous avons une hyperbole d'asymptotes $x = -2$ et $y = 3$. Mais quand la grandeur β est proche de 1, cette hyperbole (fig. 97, où $\beta = 1{,}1$) est très proche de ses asymptotes $U'U$ et $V'V$, qui se coupent au point $K(-2, 3)$. On aurait pu s'attendre à ce que pour $\beta = 1$ l'on obtienne le couple de droites $U'U$ ($y = 3$) et $V'V$ ($x = -2$). Toutefois la droite $V'V$ est exclue, car elle est parallèle à l'axe OY et par conséquent (§ 14, remarque 2) on ne peut la représenter à l'aide d'une équation résolue par rapport à l'ordonnée. Avec la droite $V'V$ le point K situé sur elle se trouve aussi exclu.

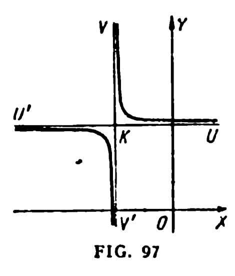


FIG. 97

§ 73. Coordonnées polaires

Prenons sur le plan (fig. 98) un point arbitraire O *(pôle)* et menons le rayon OX *(axe polaire)*. Prenons un segment arbitraire OA pour unité de longueur et un angle quelconque (habituellement un radian) pour unité d'angle. La position de tout point M du plan peut être donnée à l'aide de deux nombres: 1) le nombre positif ρ, exprimant la longueur du segment OM *(rayon vecteur)*, 2) le nombre φ, exprimant la grandeur de l'angle XOM *(angle polaire)* Les nombres ρ et φ sont appelés *coordonnées polaires* du point M.

EXEMPLE 1. Les coordonnées polaires $\rho = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ définissent le point N (fig. 98), les coordonnées polaires $\rho = 3$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ le même point N, les coordonnées polaires $\rho = 1$, $\varphi = 0$ (et aussi $\rho = 1$, $\varphi = 2\pi$ ou $\rho = 1$ $\varphi = -2\pi$, etc.) le point A.

A chaque couple de valeurs ρ, φ correspond un seul point, mais à un même point M correspond une infinité de valeurs de l'angle polaire qui diffèrent les unes des autres par un multiple de 2π (cf. exemple 1). Par ailleurs, si le point M coïncide avec le pôle, la valeur de l'angle polaire est indéterminée.

On peut convenir de dégager seulement l'une des valeurs de l'angle polaire, par exemple, de prendre φ dans les limites

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi. \tag{1}$$

Cette valeur de l'angle polaire est dite valeur *principale*.

Exemple 2. Au point N (fig. 98) correspondent les coordonnées polaires $\rho = 3$, $\varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; la valeur principale de l'angle polaire est $-\frac{\pi}{2}$.

Au point L correspondent les coordonnées polaires $\rho = 2$, $\varphi = \pi + 2k\pi$; la valeur principale de φ est, conformément à la condition (1), égale à π (et non à $-\pi$).

Quand on introduit les valeurs principales, à chaque point (sauf le pôle) correspond un seul couple de coordonnées polaires. Pour le pôle $\rho = 0$ et φ est arbitraire.

Remarque 1. Quand le point M décrivant une circonférence de centre au pôle O (fig. 99) coupe au point K le prolongement de l'axe polaire, la valeur principale de l'angle polaire subit un saut (au point M_1 elle est proche de π, au point M_2 de $-\pi$). C'est pourquoi il s'avère souvent non rationnel de se limiter aux valeurs principales de φ.

Remarque 2. Quand le point M parcourant la droite PQ (fig. 100) passe par le pôle O, la valeur de φ subit un saut. Par exemple, si $\widehat{XOP} = \frac{\pi}{4}$, alors pour le point M_1 (sur le rayon OP) $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, et pour le point M_2 (sur le rayon OQ) $\varphi = -\frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ (k et n sont des entiers). Pour y remédier on aurait pu associer *à tous les points* de la droite PQ une même valeur de φ, par exemple $\varphi = \widehat{XOP}$, et estimer que les rayons vecteurs sont positifs sur le rayon OP et négatifs sur le rayon OQ. Par exemple, les coordonnées polaires

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \rho = \frac{1}{2}$$

définissent le point M_1, et les coordonnées polaires

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

le point M_2.

Les mêmes points peuvent être donnés à l'aide des coordonnées

$$\varphi = -\frac{3}{4}\pi, \quad \rho = \frac{1}{2}$$

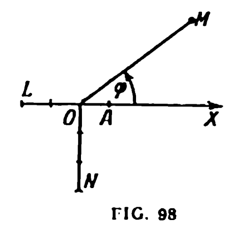


FIG. 98

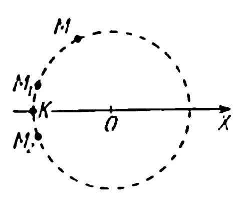


FIG. 99

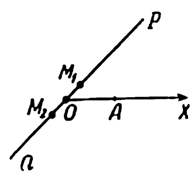


FIG. 100

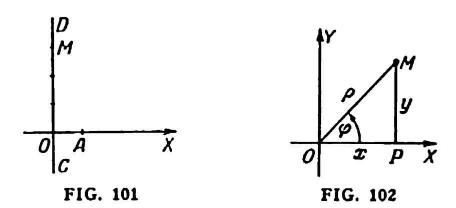


FIG. 101 FIG. 102

(point M_2) et

$$\varphi = -\frac{3}{4}\pi, \quad \rho = -\frac{1}{2}$$

(point M_1). Nous associons alors à tous les points de la droite PQ la valeur $\varphi = \widehat{XOQ}$, de sorte que ρ est positif sur le rayon OQ et négatif sur OP.

EXEMPLE 3. Construire le point M de coordonnées polaires

$$\rho = -3, \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}.$$

A l'angle polaire $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ correspond le rayon OC (fig 101). Sur son prolongement OD nous portons $OM = 3OA$. Nous obtenons le point cherché M. A ce même point correspondent les coordonnées polaires $\rho = 3$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

§ 74. Relation entre les coordonnées polaires et rectangulaires

Supposons que le pôle O (fig. 102) du système de coordonnées polaires coïncide avec l'origine des coordonnées rectangulaires et que l'axe polaire OX soit confondu avec l'axe positif des abscisses. Soient M un point arbitraire du plan, x et y ses coordonnées rectangulaires et ρ, φ ses coordonnées polaires. On a alors

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \tag{1}$$

Inversement (*)

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3}$$

et

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \tag{4}$$

(*) On suppose dans les formules (2) et (3) que le rayon vecteur ρ est toujours positif. Si l'on considère également les valeurs négatives de ρ (§ 73, remarque 2), on doit remplacer (2) et (3) par $\rho = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\sin \varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2 + y^2}}$ (on prend soit les signes supérieurs, soit les signes inférieurs). Les formules (1) et (4) restent inchangées.

Or, la seule formule (4) [non plus que la seule formule (3)] ne suffit pas pour déterminer l'angle φ (cf. exemple 1).

EXEMPLE 1. Les coordonnées rectangulaires du point sont $x = 2$, $y = -2$. Trouver ses coordonnées polaires (pour la position relative indiquée plus haut des deux systèmes).

SOLUTION. En vertu de la formule (2) on a

$$\rho = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

et en vertu de la formule (4) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{-2}{2} = -1$. Par conséquent, ou bien $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ou bien $\varphi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$. Comme le point est situé dans le quatrième quadrant, seule la première valeur est juste. La valeur principale de φ est $-\frac{\pi}{4}$.

Si l'on utilise la formule $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, on obtient $\cos \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent, ou bien $\varphi = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, ou bien $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. Seule la seconde valeur est juste.

EXEMPLE 2. Dans le système rectangulaire XOY la circonférence représentée sur la fig. 103 est donnée par l'équation (§ 38) $(x - R)^2 + y^2 = R^2$. Les formules (1) et (2) permettent de trouver son équation dans le système polaire (pôle O, axe polaire OX). Nous obtenons $\rho^2 - 2R\rho \cos \varphi = 0$. Cette équation se décompose en deux: 1) $\rho = 0$, 2) $\rho - 2R \cos \varphi = 0$. La première représente (pour une valeur arbitraire de φ) le pôle O. La seconde donne tous les points de la circonférence, y compris le pôle $\left(\text{pour } \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi = -\frac{\pi}{2}\right)$. C'est pourquoi on peut rejeter la première équation; nous obtenons:

$$\rho = 2R \cos \varphi. \tag{5}$$

Cette équation s'obtient directement du triangle OMK d'angle droit au sommet M ($OK = 2R$, $OM = \rho$, $\widehat{KOM} = \varphi$).

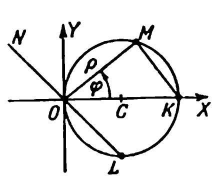


FIG. 103

REMARQUE. Si l'on n'introduit pas les valeurs négatives de ρ, on peut prendre dans l'équation (5) l'angle φ dans le quatrième et le premier quadrant, et on ne peut pas le prendre dans le second et le troisième. Ainsi, pour $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ l'équation (5) donne $\rho = -R\sqrt{2}$. En effet, le rayon ON (fig. 103) ne possède pas, à part le pôle, de points communs avec la circonférence. Si l'on introduit par contre les valeurs négatives de ρ (§ 73, remarque 2), les coordonnées $\rho = -R\sqrt{2}$, $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ donnent le point L sur le prolongement de ON.

EXEMPLE 3. Déterminer la courbe représentée par l'équation

$$\rho = 2a \sin \varphi. \qquad (6)$$

SOLUTION. Passant au système de coordonnées rectangulaires nous trouvons:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2a \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

autrement dit

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0$$

ou

$$x^2 + (y - a)^2 = a^2.$$

L'équation (6) représente une circonférence de rayon a (fig. 104) passant par le pôle O et tangente à l'axe polaire OX.

§ 75. Spirale d'Archimède (*)

1. DÉFINITION. Supposons que la droite UV (fig. 105) effectue à partir de la position initiale $X'X$ un mouvement uniforme de rotation autour d'un point fixe O et qu'un point M se déplace uniformément

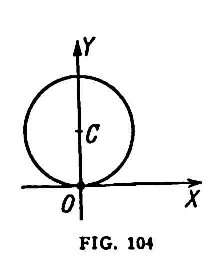


FIG. 104

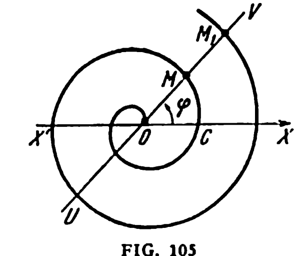


FIG. 105

(*) Une étude plus détaillée de la spirale d'Archimède sera faite p. 774.

sur cette droite UV à partir de la position initiale O. La courbe décrite par le point M est appelée *spirale d'Archimède*.

Remarque. On peut remplacer les notions cinématiques par la condition de proportionnalité de la distance $\rho = OM$ à l'angle de rotation φ de la droite UV.

Le même accroissement de la distance ρ correspond à la rotation de la droite UV, à partir de n'importe quelle position, d'un angle donné. En particulier, à un tour complet correspond le même déplacement $MM_1 = a$. Le segment a est appelé le *pas* de la spirale d'Archimède.

A un pas donné a correspondent deux spirales d'Archimède, se distinguant l'une de l'autre par le sens de rotation de la droite UV. Lors d'une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre on obtient une *spirale de sens direct* (fig. 106, ligne grasse), lors d'une rotation dans le sens contraire une *spirale de sens indirect* (fig. 106, ligne en pointillé).

On peut faire coïncider les spirales de sens direct et indirect de même pas en faisant subir au plan de l'une d'elles une rotation de 180°.

On voit de la fig. 106 que les spirales de sens direct et indirect de même pas peuvent être considérées comme deux branches d'une même courbe décrite par le point M, quand ce dernier parcourt toute la droite UV et passe par le point O.

2. Equation polaire (le pôle est O; l'orientation de l'axe polaire OX coïncide avec le sens du mouvement du point M quand il passe par le point O; le pas de la spirale est a):

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\varphi}{2\pi}. \tag{1}$$

Aux valeurs positives de φ correspond la branche de sens direct, aux valeurs négatives la branche de sens indirect.

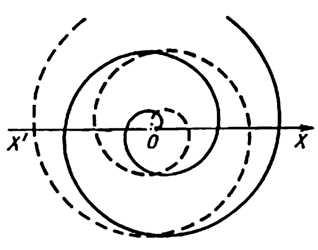


FIG. 106

L'équation (1) peut s'écrire

$$\rho = k\varphi,$$

où k (le *paramètre* de la spirale d'Archimède) est le déplacement $\frac{a}{2\pi}$ du point M le long de la droite UV quand cette dernière tourne d'un radian.

§ 76. Equation polaire d'une droite

Une droite AB (fig. 107) ne passant pas par le pôle est représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \alpha)}, \tag{1}$$

où $p = OK$ et $\alpha = \widehat{XOK}$ sont les paramètres polaires de la droite AB (§ 29).

L'équation (1) s'obtient du triangle OKM (où $OM = \rho$ et $\widehat{KOM} = \varphi - \alpha$).

On ne peut représenter la droite CD (fig. 108) passant par le pôle par une équation de la forme (1) $\left[\text{pour une telle droite } p = 0 \text{ et } \varphi - \alpha = \pm\frac{\pi}{2}, \text{ de sorte que } \cos(\varphi - \alpha) = 0\right]$. Son rayon OD est représenté par l'équation $\varphi = \varphi_0$ (où $\varphi_0 = \widehat{XOD}$) et le rayon OC par l'équation $\varphi = \varphi_1$ (où $\varphi_1 = \widehat{XOC}$). Chacune de ces équations peut représenter la droite toute entière si l'on introduit les valeurs négatives de ρ (§ 73, remarque 2).

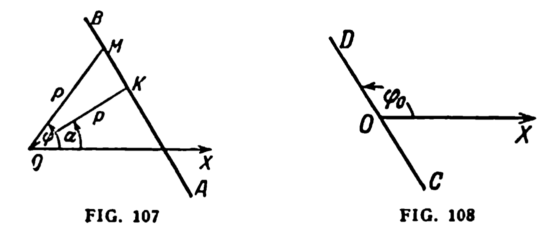


FIG. 107 FIG. 108

§ 77. Equation polaire d'une conique

Plaçons le pôle au foyer F (fig. 109) d'une conique (ellipse, hyperbole, parabole) et faisons coïncider l'axe polaire avec l'axe FX de la conique, en l'orientant du côté opposé à celui de la directrice PQ. La conique est alors représentée par l'équation

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \tag{1}$$

où p est le paramètre et ε l'excentricité de la conique (§ 52).

REMARQUE. Si l'on considère uniquement les valeurs positives de ρ, dans le cas de l'hyperbole ($\varepsilon > 1$) l'équation (1) ne représente qu'une branche, à savoir celle à l'intérieur de laquelle se trouve le foyer. On doit alors avoir pour φ l'inégalité $1 - \varepsilon \cos \varphi > 0$. Si par contre on considère également les valeurs négatives de ρ, φ peut prendre n'importe quelle valeur et, lorsque $1 - \varepsilon \cos \varphi < 0$, on obtient la seconde branche.

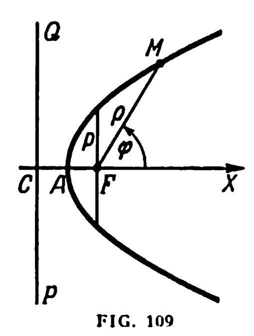


FIG. 109

DEUXIÈME PARTIE

Géométrie analytique à trois dimensions

§ 78. Notions de grandeurs vectorielles et scalaires

On appelle *grandeur vectorielle* ou *vecteur* (dans un sens large) toute grandeur orientée: elle possède une direction et un sens. On appelle *grandeur scalaire* ou *scalaire* toute grandeur dépourvue d'orientation.

EXEMPLE 1. La force sollicitant un point matériel est un vecteur, car elle est orientée. La vitesse du point matériel est aussi un vecteur.

EXEMPLE 2. La température est un scalaire, car aucune orientation ne caractérise cette grandeur. La masse d'un corps et sa densité sont aussi des scalaires.

Si l'on fait abstraction de l'orientation d'une grandeur vectorielle, on peut la mesurer, tout comme une grandeur scalaire, en choisissant une unité graphique correspondante. Toutefois le nombre obtenu caractérise complètement la grandeur scalaire et il ne caractérise que partiellement la grandeur vectorielle.

On peut caractériser complètement une grandeur vectorielle par un *segment orienté* en se donnant au préalable une échelle linéique.

EXEMPLE 3. Pour une unité de mesure MN représentant la force unité le segment orienté AB sur la fig. 110 caractérise une force de 3,5 kg, dont la direction et le sens sont ceux du segment AB.

§ 79. Vecteur en géométrie

En géométrie on appelle *vecteur* (dans un sens étroit) tout segment orienté.

Le vecteur dont l'origine est le point A et l'extrémité le point B est noté $\overrightarrow{AB}$ (fig. 110).

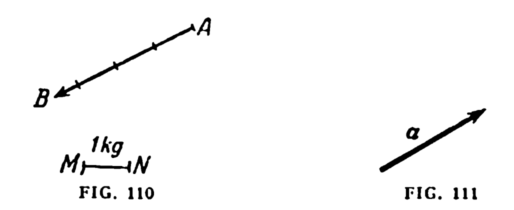


FIG. 110 FIG. 111

Le vecteur peut aussi être désigné par une seule lettre **a** ou $\vec{a}$ (fig. 111).

La longueur du vecteur est aussi appelée son *module*. Le module est une grandeur scalaire.

On note $|\overrightarrow{AB}|$ ou $|\mathbf{a}|$ le module des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et **a**.

Dans le cas de la notation du vecteur à l'aide de deux lettres, on désigne parfois le module par les mêmes lettres, mais sans la flèche (AB est le module du vecteur $\overrightarrow{AB}$), dans le cas où le vecteur est designé par une seule lettre on designe le module par la même lettre en caractères ordinaires (b est le module du vecteur **b** ou $\vec{b}$).

§ 80. Algèbre vectorielle

On effectue sur les vecteurs des opérations dites opérations d'addition, de soustraction et de multiplication des vecteurs (cf. plus bas), qui possèdent plusieurs propriétés communes avec les opérations algébriques d'addition, de soustraction et de multiplication. C'est pourquoi la discipline consacrée aux opérations sur les vecteurs est appelée *algèbre vectorielle*.

§ 81. Vecteurs colinéaires

Les vecteurs portés par des droites parallèles (ou par une même droite) sont dits *colinéaires*. Les vecteurs **a**, **b**, **c** (fig. 112) sont colinéaires. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CB}$ (fig. 113) le sont également.

Les vecteurs colinéaires peuvent être de même sens ou de sens contraires. Ainsi, les vecteurs **a** et **c** (fig. 112) sont de même sens, les vec-

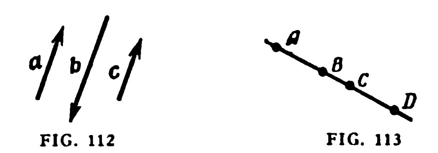


FIG. 112 FIG. 113

teurs **a** et **b** (et aussi **b** et **c**) de sens contraires. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ (fig. 113) sont de même sens, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$ de sens contraires.

§ 82. Vecteur nul

Si l'origine A et l'extrémité B du segment AB sont confondues, le segment AB se réduit à un point et perd son orientation. Toutefois, pour assurer la généralité des règles de l'algèbre vectorielle on convient qu'un couple de points confondus est aussi un vecteur. Ce vecteur particulier est appelé ***vecteur nul*** et on l'estime colinéaire à n'importe quel vecteur.

Le vecteur nul est désigné comme le nombre zéro (par le signe 0).

§ 83. Egalité des vecteurs

DÉFINITION. Deux vecteurs (non nuls) **a** et **b** sont dits égaux (ou équipollents) si leurs modules sont égaux et si les vecteurs ont même direction et même sens. Tous les vecteurs nuls sont jugés égaux. Dans tous les autres cas les vecteurs ne sont pas égaux.

EXEMPLE 1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 114) sont égaux.

EXEMPLE 2. Les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ (fig. 115) ne sont pas égaux (bien que leurs longueurs soient identiques), car leurs directions sont différentes. Les vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{KL}$ ne sont pas égaux non plus et les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{KL}$ sont égaux.

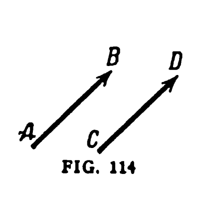


FIG. 114

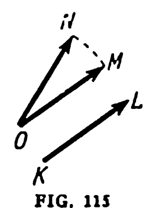


FIG. 115

AVERTISSEMENT. Il ne faut pas confondre la notion « d'égalité des vecteurs » avec celle « d'égalité des segments ». En disant: « les segments ON et KL sont égaux », nous affirmons qu'on peut les faire coïncider. Mais pour cela il se peut que l'on doive effectuer une rotation du segment que l'on veut faire coïncider (cf. fig. 115). Dans ce cas, conformément à la définition, *les vecteurs* $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{KL}$ *ne sont pas égaux*. Deux vecteurs ne sont égaux que si l'*on peut les amener à coïncider par translation*.

NOTATIONS. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ signifie que les vecteurs **a** et **b** sont égaux, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ que les vecteurs **a** et **b** ne sont pas égaux. $|a| = |b|$ signifie que les modules (les longueurs) des vecteurs **a** et **b** sont égaux; les vecteurs **a** et **b** eux-mêmes peuvent alors soit être égaux, soit ne pas être égaux.

EXEMPLE 3. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (fig. 114), $\overrightarrow{ON} \neq \overrightarrow{KL}$ (fig. 115), $|\overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{KL}|$ (fig. 115), $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KL}$ (fig. 115).

§ 84. Vecteurs ramenés à une même origine

On peut ramener tous les vecteurs (en nombre arbitraire) à une origine commune, c'est-à-dire construire des vecteurs respectivement égaux aux vecteurs donnés et possédant une origine commune en un point O. Une telle réduction est montrée sur la fig. 116.

§ 85. Vecteurs opposés

DÉFINITION. Deux vecteurs qui ne diffèrent que par l'origine et le sens sont dits vecteurs *opposés*.

Le vecteur opposé au vecteur **a** est noté $-\mathbf{a}$.

EXEMPLE 1. Les vecteurs $\overrightarrow{LM}$ et $\overrightarrow{NK}$ (fig. 117) sont opposés.

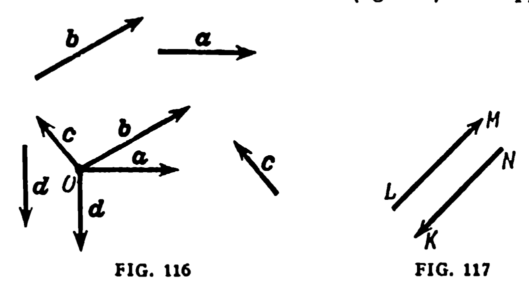


FIG. 116 FIG. 117

Exemple 2. Si l'on désigne le vecteur $\overrightarrow{LM}$ (fig. 117) par la lettre **a**, alors $\overrightarrow{NK} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{ML} = -\mathbf{a}$, $\overrightarrow{KN} = \mathbf{a}$.

Il découle de la définition que $-(-\mathbf{a}) = \mathbf{a}$, $|-\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|$.

§ 86. Addition des vecteurs

Définition. On appelle *somme* géométrique des vecteurs **a** et **b** un troisième vecteur **c** que l'on obtient en réalisant la construction suivante: par un point quelconque O (fig. 118) menons le vecteur $\overrightarrow{OL}$ égal à **a** (§ 83), puis le vecteur $\overrightarrow{LM}$ égal à **b**. Le vecteur $\mathbf{c} = \overrightarrow{OM}$ est la somme géométrique des vecteurs **a** et **b** (règle du triangle).

Ecriture: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$.

Avertissement. Il ne faut pas confondre la notion de « somme des segments » et celle de « somme des vecteurs ». La somme des segments OL et LM s'obtient en réalisant la construction suivante: sur le prolongement de la droite OL (fig. 119) on porte le segment LN égal à LM. Le segment ON est la somme des segments OL et LM. La somme des *vecteurs* $\overrightarrow{OL}$ et $\overrightarrow{LM}$ est construite autrement (cf. définition).

Lors de l'addition des vecteurs on a les inégalités

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|, \quad (1)$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geqslant |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|, \quad (2)$$

autrement dit le côté OM du triangle OML (fig. 118) est plus petit que la somme et plus grand que la différence des deux autres côtés. Le signe d'égalité n'a lieu dans la formule (1) que pour des vecteurs de même sens (fig. 120) et dans la formule (2) que pour des vecteurs directement opposés (fig. 121).

Somme de deux vecteurs opposés. Il découle de la définition que *la somme des vecteurs opposés est égale au vecteur nul*:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = 0.$$

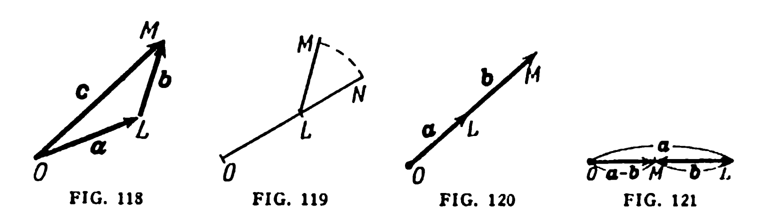


FIG. 118 FIG. 119 FIG. 120 FIG. 121

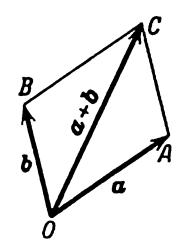


FIG. 122

COMMUTATIVITÉ. *La somme des vecteurs ne change pas quand on intervertit l'ordre des vecteurs:*

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}.$$

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME. Si les vecteurs a et b *ne sont pas colinéaires*, on peut trouver la somme a + b en réalisant la construction suivante: par un point quelconque O (fig. 122) menons les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ et $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$; on construit le parallélogramme $OACB$ sur les segments OA, OB. Le vecteur de la diagonale $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ est la somme des vecteurs a et b (puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$).

Cette construction *n'est pas applicable* aux vecteurs colinéaires (fig. 120 et 121).

REMARQUE. La définition de l'addition des vecteurs est établie conformément aux lois physiques de composition des grandeurs vectorielles (par exemple les forces appliquées à un point matériel).

§ 87. Somme géométrique de plusieurs vecteurs

DÉFINITION. On appelle *somme géométrique* des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \ldots$ $\ldots, \mathbf{a}_n$ le vecteur que l'on obtient en effectuant successivement l'opération d'addition: au vecteur $\mathbf{a}_1$ on ajoute le vecteur $\mathbf{a}_2$, au vecteur obtenu on ajoute le vecteur $\mathbf{a}_3$, etc.

Il découle de cette définition la construction suivante *(règle du polygone)*.

Par un point quelconque O (fig. 123) menons le vecteur $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}_1$, puis le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{a}_2$, puis le vecteur $\overrightarrow{A_2A_3} = \mathbf{a}_3$, etc. Le vecteur $\overrightarrow{OA_n}$ (sur la fig. 123 $n = 4$) est la somme géométrique des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

La somme des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \ldots, \mathbf{a}_n$ est notée $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4 + \ldots + \mathbf{a}_n$.

ASSOCIATIVITÉ. *La somme géométrique ne change pas quand on remplace plusieurs vecteurs par leur somme géométrique.* Ainsi si l'on trouve d'abord la somme des vecteurs $\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ (elle est égale au vecteur $\overrightarrow{A_1A_4}$ qui n'est pas représenté sur la fig. 123) et si on lui ajoute le vecteur $\mathbf{a}_1 (= \overrightarrow{OA_1})$, on obtient le même vecteur $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4$ $(= \overrightarrow{OA_4})$:

$$\mathbf{a}_1 + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4) = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_4.$$

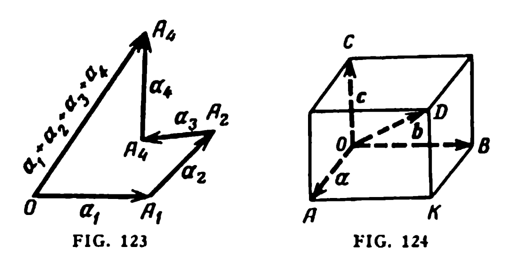


FIG. 123 FIG. 124

Règle du parallélépipède. Si après être ramenés à une même origine (§ 84) trois vecteurs **a**, **b**, **c** ne sont pas situés dans un même plan, on peut trouver la somme **a** + **b** + **c** en réalisant la construction suivante. Par une origine quelconque O (fig. 124) menons les vecteurs $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$. Construisons un parallélépipède sur les segments OA, OB, OC pris comme arêtes. La diagonale $\overrightarrow{OD}$ est la somme des vecteurs **a**, **b**, **c** (comme $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$ et $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KD}$).

Cette construction *n'est pas applicable* aux vecteurs qui (après être ramenés à une origine commune) sont situés dans un même plan.

§ 88. Soustraction des vecteurs

Définition. On appelle *différence géométrique* de deux vecteurs $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_1$ le vecteur **x** qui, ajouté au second, donne une somme géométrique égale au premier.

En résumé, la soustraction des vecteurs est l'opération inverse de l'addition.

Notation: $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$.

Il découle de la définition la construction suivante: par une origine arbitraire O (fig. 125, 126) menons les vecteurs $\overrightarrow{OA_1} = \mathbf{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$. Le vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ est la différence géométrique $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}.$$

En effet, la somme $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}$ est égale à $\overrightarrow{OA_2}$.

Remarque. Le module de la différence (la longueur du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$) peut être plus petit que le module du vecteur $\overrightarrow{OA_2}$, mais peut également lui être égal ou plus grand. Ces trois cas sont représentés sur les fig. 125, 126, 127.

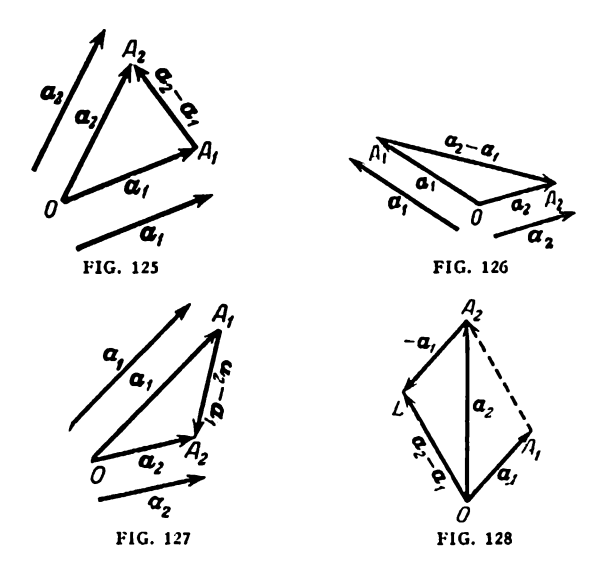


FIG. 125 FIG. 126

FIG. 127 FIG. 128

Autre construction. Pour construire la différence $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ des vecteurs $\mathbf{a}_2$ et $\mathbf{a}_1$ on peut prendre la somme des vecteurs $\mathbf{a}_2$ et $-\mathbf{a}_1$, c'est-à-dire

$$\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 + (-\mathbf{a}_1).$$

Exemple. Trouver la différence $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ (fig. 128). Conformément à la première construction $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$. Construisons maintenant le vecteur $\overrightarrow{A_2L} = -\mathbf{a}_1$ et additionnons les vecteurs $\overrightarrow{OA_2} = \mathbf{a}_2$ et $\overrightarrow{A_2L} = -\mathbf{a}_1$. Nous obtenons (§ 86, définition) le vecteur $\overrightarrow{OL}$. On voit que $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

§ 89. Multiplication et division d'un vecteur par un nombre

Définition 1. Multiplier le vecteur $\mathbf{a}$ par le nombre x signifie construire un nouveau vecteur (produit) dont le module s'obtient en multipliant le module de $\mathbf{a}$ par la valeur absolue de x. Le produit a la même

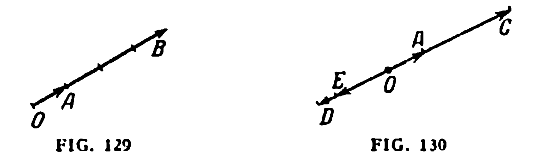


FIG. 129 FIG. 130

direction que le vecteur **a**, le même sens ou le sens opposé, suivant que le nombre x est positif ou négatif. Si $x = 0$, le produit est le vecteur nul.

NOTATION: **a**x ou x**a**.

EXEMPLES. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot 4$ ou $\overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OA}$ (fig. 129), $\overrightarrow{OC} = 3\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OE} = -1{,}5\overrightarrow{OA}$ (fig. 130).

DÉFINITION 2. Diviser le vecteur **a** par le nombre x signifie trouver un vecteur tel qu'en le multipliant par le nombre x on obtienne le vecteur **a**.

NOTATION: $\mathbf{a} : x$ ou $\frac{\mathbf{a}}{x}$.

Au lieu de la division $\frac{\mathbf{a}}{x}$ on peut effectuer la multiplication $\mathbf{a} \cdot \frac{1}{x}$.

La multiplication d'un vecteur par un nombre est soumise aux mêmes lois que la multiplication des nombres:

1. $(x + y)\mathbf{a} = x\mathbf{a} + y\mathbf{a}$ (distributivité par rapport à un facteur numérique),
2. $x(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + x\mathbf{b}$ (distributivité par rapport à un facteur vectoriel),
3. $x(y\mathbf{a}) = (xy)\mathbf{a}$ (associativité).

Ces propriétés permettent d'écrire des expressions vectorielles de même forme que les polynômes du premier degré en algèbre; ces expressions peuvent être transformées de la même façon que les expressions algébriques correspondantes (réduction des termes semblables, ouverture des parenthèses, mise en facteur commun, passage des termes d'un membre de l'égalité à l'autre avec changement de signe, etc.).

EXEMPLES. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{a} = 5\mathbf{a}$ (en vertu de la propriété 1),

$2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ (en vertu de la propriété 2),

$5 \cdot 12\mathbf{c} = 60\mathbf{c}$ (en vertu de la propriété 3);

$$4(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) = 4[2\mathbf{a} + (-3\mathbf{b})] = 4[2\mathbf{a} + (-3)\mathbf{b}] =$$
$$= 4 \cdot 2\mathbf{a} + 4(-3)\mathbf{b} = 8\mathbf{a} + (-12)\mathbf{b} = 8\mathbf{a} - 12\mathbf{b},$$
$$2(3\mathbf{a} - 4\mathbf{b} + \mathbf{c}) - 3(2\mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c}) = 6\mathbf{a} - 8\mathbf{b} + 2\mathbf{c} - 6\mathbf{a} -$$
$$- 3\mathbf{b} + 9\mathbf{c} = -11\mathbf{b} + 11\mathbf{c} = 11(\mathbf{c} - \mathbf{b}).$$

§ 90. Relation entre les vecteurs colinéaires (division d'un vecteur par un vecteur)

Si le vecteur **a** n'est pas nul, on peut représenter tout vecteur **b** colinéaire à **a** sous la forme x**a**, où x est un nombre que l'on obtient de la façon suivante: sa valeur absolue est égale à $|\mathbf{b}| : |\mathbf{a}|$ (rapport des modules); il est positif si les vecteurs **b** et **a** sont de même sens, négatif s'ils sont de sens contraires, et égal à zéro si **b** est le vecteur nul.

EXEMPLES. Nous avons pour les vecteurs **a** et **b** représentés sur la fig. 131 $\mathbf{b} = 2\mathbf{a}(x = 2)$; sur la fig. 132 $\mathbf{b} = -2\mathbf{a}$.

REMARQUE. La recherche du nombre x est appelée *division du vecteur* **b** *par le vecteur* **a**. *On ne peut effectuer la division des vecteurs non colinéaires.*

§ 91. Projection d'un point sur un axe

On appelle *axe* toute droite sur laquelle on a choisi l'un de ses deux sens (indifféremment). Ce sens est dit *positif* (sur le dessin il est noté par une flèche); le sens opposé est dit *négatif.*

On peut donner chaque axe par un vecteur arbitraire porté par cet axe et possédant le même sens. Ainsi, l'axe de la fig. 133 peut être donné par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AC}$ (mais non par le vecteur $\overrightarrow{BA}$).

Soient donnés un axe OX (fig. 134) et un point M (situé ou non sur l'axe). Menons par M un plan perpendiculaire à l'axe; il coupe l'axe en un certain point M'. Ce point M' est appelé la *projection du point* M *sur l'axe* OX (si le point M est situé sur l'axe, il est sa propre projection).

REMARQUE. En d'autres termes, la projection du point M sur l'axe OX est le pied de la perpendiculaire menée du point M sur l'axe OX. La définition que nous avons donnée plus haut souligne le fait que la construction est réalisée dans l'espace.

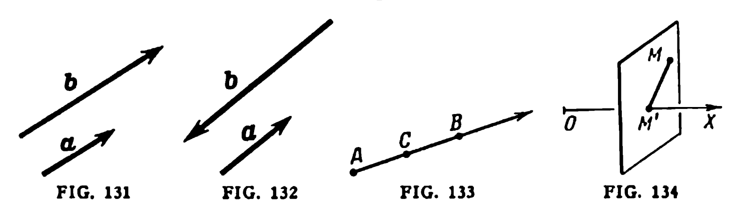


FIG. 131 FIG. 132 FIG. 133 FIG. 134

§ 92. Projection d'un vecteur sur un axe

L'expression « la projection du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe OX » a deux sens: géométrique et algébrique (arithmétique).

1. On appelle *projection (géométrique)* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe OX le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ (fig. 135) dont l'origine A' est la projection de l'origine A sur l'axe OX et l'extrémité B' la projection de l'extrémité B sur ce même axe.

NOTATION: $\mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{AB}$ ou $\mathrm{Pr}(\overrightarrow{AB})_{OX}$.

Si l'axe OX est donné par le vecteur **c**, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ est également appelé *projection du vecteur* $\overrightarrow{AB}$ *sur la direction du vecteur* **c** et noté $\mathrm{Pr}_c\overrightarrow{AB}$ ou $\mathrm{Pr}(\overrightarrow{AB})_c$.

La projection géométrique d'un vecteur sur l'axe OX est également appelée *composante de ce vecteur sur l'axe OX*.

2. On appelle *projection (algébrique)* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe OX (ou sur la direction du vecteur **c**) la *longueur* du vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ prise avec le signe + ou — suivant que le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ ait ou non le même sens que l'axe OX (ou le vecteur **c**).

NOTATION:

$$\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AB}[\mathrm{pr}(\overrightarrow{AB})_{OX}] \text{ ou } \mathrm{pr}_c\overrightarrow{AB}[\mathrm{pr}(\overrightarrow{AB})_c].$$

REMARQUE. La projection géométrique (la composante) d'un vecteur est un *vecteur*, et la projection algébrique d'un vecteur est un *nombre*.

EXEMPLE 1. La projection géométrique du vecteur $\overrightarrow{OK} = \mathbf{a}$ (fig. 136) sur l'axe OX est le vecteur $\overrightarrow{OL}$. Son sens est opposé à celui de l'axe OX et sa longueur (l'unité est OE) est égale à 2. Par conséquent la projection algébrique du vecteur $\overrightarrow{OK}$ sur l'axe OX est le nombre négatif —2:

$$\mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OL}, \quad \mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{OK} = -2.$$

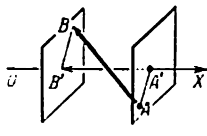


FIG. 135

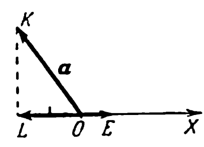


FIG. 136

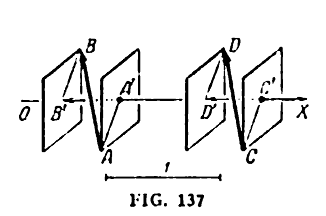


FIG. 137

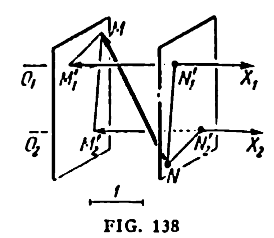


FIG. 138

Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ (fig. 137) sont égaux, leurs projections algébriques sur le même axe sont aussi égales $\left(\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AB} = \mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\right)$. Il en est de même pour les projections géométriques.

Les projections algébriques d'un même vecteur sur deux axes *de même orientation* (O_1X_1 et O_2X_2 sur la fig. 138) sont égales[*] $(\mathrm{pr}_{O_1X_1}\overrightarrow{NM} = \mathrm{pr}_{O_2X_2}\overrightarrow{NM} = -2)$. Il en est de même pour les projections géométriques.

3. Relation entre la composante (la projection géométrique) et la projection algébrique d'un vecteur. Soit $\mathbf{c}_1$ un vecteur de même sens que l'axe OX et de longueur 1. La projection géométrique (la composante) d'un vecteur arbitraire $\mathbf{a}$ sur l'axe OX est alors égale au produit du vecteur $\mathbf{c}_1$ par la projection algébrique du vecteur $\mathbf{a}$ sur cet axe:

$$\mathrm{Pr}_{OX}\mathbf{a} = \mathrm{pr}_{OX}\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}_1.$$

Exemple 2. En utilisant les notations de la fig. 136 nous avons $\mathbf{c}_1 = \overrightarrow{OE}$. La projection géométrique du vecteur $\overrightarrow{OK} = \mathbf{a}$ sur l'axe OX est le vecteur $\overrightarrow{OL}$, la projection algébrique de ce même vecteur est le nombre -2 (cf. exemple 1). Nous avons $\overrightarrow{OL} = -2\overrightarrow{OE}$.

§ 93. Théorèmes principaux sur les projections d'un vecteur

Théorème 1. La projection de la somme géométrique de vecteurs sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des vecteurs sur ce même axe.

---

[*] Si deux axes sont parallèles, mais de sens contraires, les projections algébriques ne sont pas égales. Elles diffèrent par leur signe.

Le théorème est valable pour les deux sens (géométrique et algébrique) de l'expression « la projection du vecteur » et pour un nombre arbitraire de termes; ainsi quand le nombre de termes est égal à trois

$$\mathrm{Pr}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_2 + \mathrm{Pr}\,\mathbf{a}_3 \qquad (1)$$

et

$$\mathrm{pr}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathrm{pr}\,\mathbf{a}_1 + \mathrm{pr}\,\mathbf{a}_2 + \mathrm{pr}\,\mathbf{a}_3. \qquad (2)$$

La formule (1) découle de la définition de l'addition des vecteurs, la formule (2) de la règle d'addition des nombres positifs et négatifs.

Exemple 1. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ (fig. 139) est la somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$. La projection géométrique du vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur l'axe OX est le vecteur $\overrightarrow{AC'}$ et les projections géométriques des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont $\overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{B'C'}$. On a alors

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'},$$

de sorte que

$$\mathrm{Pr}_{OX}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{AB} + \mathrm{Pr}_{OX}\overrightarrow{BC}.$$

Exemple 2. Soit OE (fig. 139) l'unité graphique; la projection algébrique du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe OX est alors égale à 4 (la longueur de $\overrightarrow{AB'}$ prise avec le signe plus), autrement dit $\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AB} = 4$. Nous avons ensuite $\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{BC} = -2$ (la longueur de $B'C'$ prise avec le signe moins) et $\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AC} = +2$ (la longueur de AC' prise avec le signe plus). Ainsi

$$\mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AB} + \mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{BC} = 4 - 2 = 2;$$

par ailleurs

$$\mathrm{pr}_{OX}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AC} = 2,$$

de sorte que

$$\mathrm{pr}_{OX}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{AB} + \mathrm{pr}_{OX}\overrightarrow{BC}.$$

Théorème 2. La projection algébrique d'un vecteur sur un axe quelconque est égale au produit de la longueur du vecteur par le cosinus de l'angle compris entre l'axe et le vecteur:

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cos(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}}) \qquad (3)$$

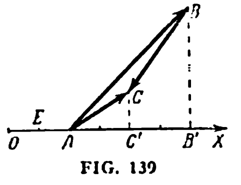


FIG. 139

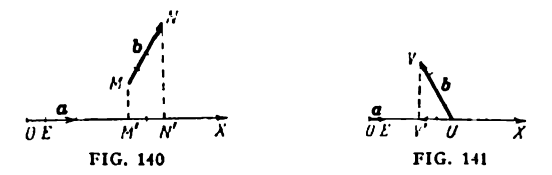


FIG. 140 FIG. 141

EXEMPLE 3. Le vecteur $\mathbf{b} = \overrightarrow{MN}$ (fig. 140) forme avec l'axe OX (donné par le vecteur **a**) un angle de 60°. Si OE est l'unité graphique, alors $|\mathbf{b}| = 4$, de sorte que

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 4 \cdot \cos 60° = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$

En effet, la longueur du vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ (la projection géométrique du vecteur **b**) est égale à 2, et son sens coïncide avec celui de l'axe OX (cf. § 92, 2).

EXEMPLE 4. Le vecteur $\mathbf{b} = \overrightarrow{UV}$ (fig. 141) forme avec l'axe OX (donné par le vecteur **a**) un angle $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 120°$. La longueur $|\mathbf{b}|$ du vecteur **b** est égale à 4. C'est pourquoi $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 4 \cdot \cos 120° = -2$.

En effet, la longueur du vecteur $\overrightarrow{UV'}$ est égale à 2, et son sens est opposé à celui de l'axe.

§ 94. Système de coordonnées rectangulaires dans l'espace

VECTEURS DE BASE. Trois axes perpendiculaires OX, OY, OZ (fig. 142), passant par un même point O, forment un *système de coordonnées rectangulaires*. Le point O est appelé *origine des coordonnées*, les droites OX, OY, OZ *axes de coordonnées* (respectivement axe *des abscisses*, axe *des ordonnées* et axe *des cotes*) et les plans XOY, YOZ, ZOX *plans de coordonnées*. Un segment quelconque UV est l'unité de mesure des trois axes.

Portant sur les axes OX, OY, OZ dans le sens positif les segments OA, OB, OC égaux à l'unité graphique, nous obtenons trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. On les appelle *vecteurs de base* et on les note respectivement **i**, **j**, **k**.

Il est admis de choisir le sens positif sur les axes de telle sorte qu'une rotation de 90° faisant coïncider le rayon positif OX avec OY (fig. 142) se produit dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre pour un

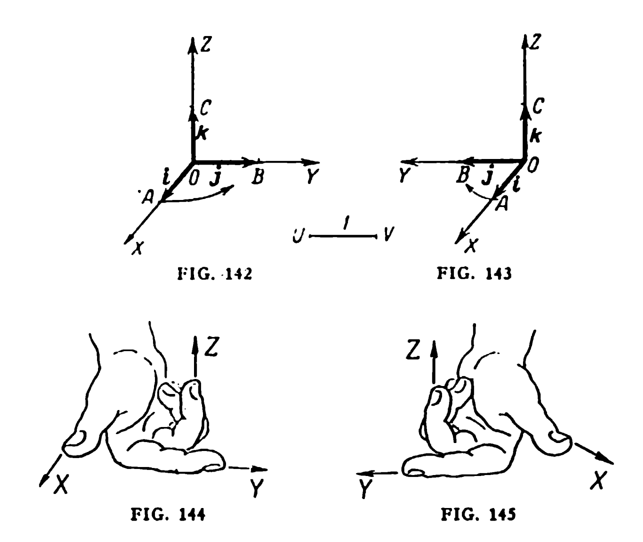


FIG. 142 FIG. 143

FIG. 144 FIG. 145

observateur placé le long du rayon OZ. Un tel système de coordonnées est *de sens direct* ou *droit*. On utilise parfois un système de coordonnées *de sens indirect* ou *gauche*, pour lequel la rotation se produit dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 143).

REMARQUE 1. On ne peut faire coïncider les angles trièdres formés par les plans OX, OY, OZ dans les systèmes de sens direct et indirect de façon que les axes *correspondants* soient confondus.

REMARQUE 2. Les appellations « droit » et « gauche » tiennent à ce que si on les dispose comme les axes OX, OY, OZ, le pouce, l'index et le majeur de la main droite forment un système droit (fig. 144). Pour la main gauche on obtient un système gauche (fig. 145).

§ 95. Coordonnées d'un point

La position d'un point M dans l'espace peut être déterminée à l'aide de trois coordonnées de la manière suivante. Menons par M les plans MP, MQ, MR (fig. 146) respectivement parallèles aux plans YOZ, ZOX, XOY. Aux points d'intersection avec les axes nous obtenons les points P, Q, R. Les nombres x (abscisse), y (ordonnée), z (cote) déterminant les segments OP, OQ, OR à l'échelle adoptée sont appelés les *coordonnées (rectangulaires)* du point M. Ils sont pris positifs ou négatifs suivant

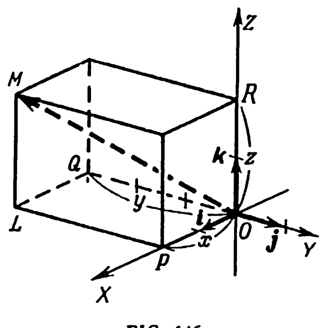


FIG. 146

que les vecteurs $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OR}$ ont ou non le même sens que les vecteurs de base **i**, **j**, **k**.

EXEMPLE. Les coordonnées du point M (fig. 146) sont:

abscisse

$$x = 2,$$

ordonnée

$$y = -3,$$

cote

$$z = 2.$$

ECRITURE: $M(2, -3, 2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ joignant l'origine O à un point M est appelé *rayon vecteur* du point M et désigné par la lettre **r**; pour distinguer les rayons vecteurs des points différents, on affecte la lettre **r** de l'indice correspondant: ainsi le rayon vecteur du point M est noté $\mathbf{r}_M$. Les rayons vecteurs des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont notés

$$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n.$$

§ 96. Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION. On appelle *coordonnées rectangulaires du vecteur* **m** les projections algébriques (§ 92) du vecteur **m** sur les axes de coordonnées. Les coordonnées du vecteur **m** sont désignées par les lettres majuscules X, Y, Z (les coordonnées du point par les lettres minuscules).

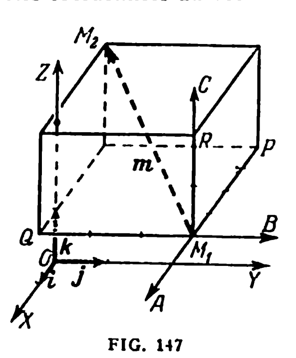


FIG. 147

ECRITURE: $\mathbf{m}\{X, Y, Z\}$ ou $\mathbf{m} = \{X, Y, Z\}$.

Au lieu de projeter le vecteur **m** sur les axes OX, OY, OZ, on peut le projeter sur les axes M_1A, M_1B, M_1C (fig. 147) menés par l'origine M_1 du vecteur **m** et de même orientation que les axes de coordonnées respectifs (§ 92, 2).

EXEMPLE 1. Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ (fig. 147) par rapport au système de coordonnées $OXYZ$.

Menons par le point M_1 les axes M_1A, M_1B, M_1C orientés respectivement comme les axes OX, OY, OZ.

Menons par le point M_2 les plans M_2P, M_2Q, M_2R parallèles aux plans de coordonnées. Les plans M_2P, M_2Q, M_2R coupent les axes M_1A, M_1B, M_1C respectivement aux points P, Q, R. L'abscisse X du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{M_1P}$ prise avec le signe moins (§ 92, 2); l'ordonnée Y du vecteur $\mathbf{m}$ est la longueur du vecteur $\overrightarrow{M_1Q}$ prise avec le signe moins; la cote Z est la longueur du vecteur $\overrightarrow{M_1R}$ prise avec le signe plus. A l'échelle de la fig. 147 nous avons $X = -4$, $Y = -3$, $Z = 2$.

ECRITURE:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\{-4, -3, 2\}$$

ou

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{-4, -3, 2\}.$$

Si deux vecteurs $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ sont égaux, leurs coordonnées respectives sont égales

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2$$

(cf. § 92, 2).

Une translation du système de coordonnées ne modifie pas les coordonnées du vecteur mais modifie celles du point (cf. plus bas § 166, 1).

Si l'origine O du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est confondue avec l'origine des coordonnées, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ sont respectivement égales aux coordonnées de son extrémité M (§ 95).

EXEMPLE 2. L'abscisse du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (fig. 146) est $X = 2$, son ordonnée $Y = -3$, sa cote $Z = 2$. Le point M a les mêmes coordonnées.

ECRITURE: $\overrightarrow{OM}\{2, -3, 2\}$ ou $\overrightarrow{OM} = \{2, -3, 2\}$.

§ 97. Expression d'un vecteur en fonction des composantes et des coordonnées

1. Tout vecteur est égal à la somme de ses composantes (ses projections géométriques) sur les trois axes de coordonnées:

$$\mathbf{m} = \mathrm{Pr}_{OX}\mathbf{m} + \mathrm{Pr}_{OY}\mathbf{m} + \mathrm{Pr}_{OZ}\mathbf{m}. \quad (1)$$

EXEMPLE 1. Nous avons avec les notations de la fig. 147:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1P} + \overrightarrow{M_1Q} + \overrightarrow{M_1R}.$$

2. Tout vecteur **m** est égal à la somme des produits des trois vecteurs de base par les coordonnées correspondantes du vecteur **m**:

$$\mathbf{m} = X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}. \tag{2}$$

EXEMPLE 2. Nous avons avec les notations de la fig. 147:

$$\overrightarrow{M_1M_2} = -4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

§ 98. Opérations sur des vecteurs donnés par leurs coordonnéès

1. *Lors de l'addition des vecteurs leurs coordonnées s'ajoutent*, c'est-à-dire si $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, alors $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, $Z = Z_1 + Z_2$.

2. On a une règle analogue pour la soustraction des vecteurs: si $\mathbf{a} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$, alors $X = X_2 - X_1$, $Y = Y_2 - Y_1$, $Z = Z_2 - Z_1$.

3. *Quand on multiplie un vecteur par un nombre, toutes ses coordonnées sont multipliées par ce nombre*, c'est-à-dire si $\mathbf{m}_2 = \lambda\mathbf{m}_1$, alors $X_2 = \lambda X_1$, $Y_2 = \lambda Y_1$, $Z_2 = \lambda Z_1$.

4. On a une règle analogue pour la division d'un vecteur par un nombre: si $\mathbf{m}_2 = \frac{\mathbf{m}_1}{\lambda}$, alors $X_2 = \frac{X_1}{\lambda}$, $Y_2 = \frac{Y_1}{\lambda}$, $Z_2 = \frac{Z_1}{\lambda}$.

§ 99. Expression d'un vecteur en fonction des rayons vecteurs de son origine et de son extrémité

Ecrivons la formule importante

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \tag{1}$$

où $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}$ (fig. 148) est le rayon vecteur (§ 95) de l'origine A_1 du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OA_2}$ le rayon vecteur de son extrémité A_2.

Il découle de (1) en vertu du § 98, 2 les formules

$$\left.\begin{aligned} X = x_2 - x_1,\ \ Y = y_2 - y_1,\\ Z = z_2 - z_1. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Ici X, Y, Z sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$, x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point A_1 (elles sont respectivement égales aux coor-

données du rayon vecteur $\mathbf{r}_1 = \overrightarrow{OA_1}$) et x_2, y_2, z_2 les coordonnées du point A_2 (elles sont respectivement égales aux coordonnées du rayon vecteur $\mathbf{r}_2 = \overrightarrow{OA_2}$).

En d'autres termes, *pour trouver l'abscisse d'un vecteur, il faut retrancher de l'abscisse de son extrémité l'abscisse de son origine.*

On a des règles analogues pour l'ordonnée et la cote.

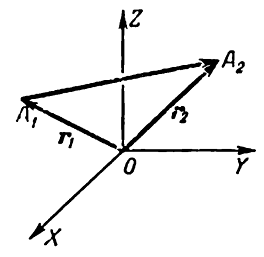


FIG. 148

EXEMPLE. Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{A_1A_2}$ si $A_1(1, -2, 5)$ et $A_2(-2, 4, 0)$.

SOLUTION. $X = -2 - 1 = -3$, $Y = 4 - (-2) = 6$, $Z = 0 - -5 = -5$, de sorte que $\overrightarrow{A_1A_2} = \{-3, 6, -5\}$.

§ 100. Longueur d'un vecteur. Distance de deux points

La longueur du vecteur $\mathbf{a}\{X, Y, Z\}$, s'exprime en fonction de ses coordonnées par la formule

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \tag{1}$$

EXEMPLE 1. La longueur du vecteur $\mathbf{a}\{-4, -3, 2\}$ est égale (cf. fig. 147) à

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}4.$$

La distance d entre les points $A_1,(x_1, y_1, z_1)$ et $A_2(x_2, y_2, z_2)$ est déterminée par la formule

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2}$$

Elle s'obtient de (1) en vertu des formules (2) § 99 (cf. § 10).

EXEMPLE 2. La distance entre les points A_1 (8, -3, 8) et A_2 (6, -1, 9) est $d = \sqrt{(6-8)^2 + (-1+3)^2 + (9-8)^2} = 3$.

§ 101. Angle entre un axe de coordonnées et un vecteur

Les angles α, β, γ (fig. 149) formés par le sens positif des axes OX, OY, OZ avec le vecteur $\mathbf{a}\{X, Y, Z\}$ peuvent être déterminés d'après les for-

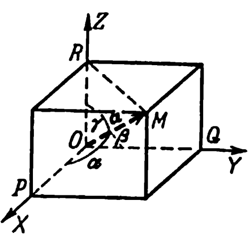


FIG. 149

mules (*)

$$\cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \left(= \frac{X}{|\mathbf{a}|}\right), \tag{1}$$

$$\cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \left(= \frac{Y}{|\mathbf{a}|}\right), \tag{2}$$

$$\cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} \left(= \frac{Z}{|\mathbf{a}|}\right). \tag{3}$$

Si la longueur du vecteur **a** est égale à l'unité graphique adoptée, c'est-à-dire si $|\mathbf{a}| = 1$, alors

$$\cos\alpha = X, \quad \cos\beta = Y, \quad \cos\gamma = Z.$$

Il découle de (1), (2), (3) que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{4}$$

EXEMPLE. Trouver les angles formés par les axes de coordonnées avec le vecteur $\{2, -2, -1\}$.

SOLUTION. $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1}} = \dfrac{2}{3}$, $\cos\beta = -\dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\dfrac{1}{3}$, d'où $\alpha \approx 48°11'$, $\beta \approx 131°49'$, $\gamma \approx 109°28'$.

§ 102. Critère de colinéarité (de parallélisme) des vecteurs

Si les vecteurs $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ sont colinéaires, leurs coordonnées respectives sont proportionnelles

$$X_2 : X_1 = Y_2 : Y_1 = Z_2 : Z_1, \tag{1}$$

et inversement.

Si le coefficient de proportionnalité $\lambda = \dfrac{X_2}{X_1} = \dfrac{Y_2}{Y_1} = \dfrac{Z_2}{Z_1}$ est

---

(*) Le triangle rectangle OMR donne:

$$\cos\gamma = \frac{OR}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{Z}{|\mathbf{a}|} = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Les formules (1) et (2) s'obtiennent de façon analogue.

positif, les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont de même sens; s'il est négatif, ils sont de sens contraires. La valeur absolue de λ exprime le rapport des longueurs $|\mathbf{a}_2| : |\mathbf{a}_1|$.

REMARQUE. Si l'une des coordonnées du vecteur $\mathbf{a}_1$ est nulle, la proportion (1) doit être comprise dans le sens que la coordonnée correspondante du vecteur $\mathbf{a}_2$ est aussi nulle.

EXEMPLE 1. Les vecteurs $\{-2, 1, 3\}$ et $\{4, -2, -6\}$ sont colinéaires et de sens contraires ($\lambda = -2$). Le second vecteur est deux fois plus long que le premier.

EXEMPLE 2. Les vecteurs $\{4, 0, 10\}$ et $\{6, 0, 15\}$ sont colinéaires et de même sens $\left(\lambda = \frac{3}{2}\right)$. Le second vecteur est une fois et demie plus long que le premier.

EXEMPLE 3. Les vecteurs $\{2, 0, 4\}$ et $\{4, 0, 2\}$ ne sont pas colinéaires.

§ 103. Division d'un segment dans un rapport donné

Le rayon vecteur $\mathbf{r}$ du point A divisant le segment A_1A_2 dans le rapport $A_1A : AA_2 = m_1 : m_2$ est déterminé par la formule

$$\mathbf{r} = \frac{m_2\mathbf{r}_1 + m_1\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{1}$$

où $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}_2$ sont les rayons vecteurs des points A_1 et A_2.

On trouve les coordonnées du point A à l'aide des formules

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2}, \quad y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2}, \quad z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

(cf. § 11).

En particulier, les coordonnées du point médian du segment A_1A_2 sont

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{3}$$

REMARQUE. Le point A peut être pris sur le prolongement du segment A_1A_2 dans l'un ou l'autre sens; l'un des nombres m_1, m_2 doit alors être pris avec le signe moins.

EXEMPLE. Trouver les coordonnées du point A divisant le segment A_1A_2 dans le rapport $A_1A : AA_2 = 2 : 3$ si $A_1(2, 4, -1)$, $A_2(-3, -1, 6)$.

Nous trouvons d'après les formules (2):

$$x = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}{2+3} = 0, \quad y = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)}{2+3} = 2,$$

$$z = \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 6}{2+3} = \frac{9}{5}.$$

§ 104. Produit scalaire de deux vecteurs

DÉFINITION. Le *produit scalaire de deux vecteurs* **a** et **b** est égal au produit des modules des vecteurs par le cosinus de leur angle.

NOTATION: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ou $\mathbf{ab}$.

Par définition on a

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}). \tag{1}$$

En vertu du théorème 2 § 93

$$|\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b},$$

de sorte qu'au lieu de (1) on peut écrire:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \, \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b}. \tag{2}$$

D'une manière analogue

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{b}| \, \mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\mathbf{a}.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est égal au module de l'un d'eux multiplié par la projection algébrique de l'autre vecteur sur la direction du premier.

Si l'angle de deux vecteurs **a** et **b** est aigu, $\mathbf{ab} > 0$; s'il est obtus, $\mathbf{ab} < 0$; s'il est droit, $\mathbf{ab} = 0$.

Cela découle de la formule (1).

EXEMPLE. Les longueurs des vecteurs **a** et **b** sont respectivement égales à 2 m et 1 m et l'angle qu'ils forment à 120°. Trouver le produit scalaire **ab**.

D'après la formule (1) $\mathbf{ab} = 2 \cdot 1 \cdot \cos 120° = -1$ (m²).

Calculons cette même grandeur à l'aide de la formule (2). La projection algébrique du vecteur **b** (fig. 150) sur la direction du vecteur **a** est égale à $|\overrightarrow{OB}| \cos 120° = -\frac{1}{2}$ (la longueur du vecteur $\overrightarrow{OB'}$ prise avec le signe moins). Nous avons:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}| \, \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ (m}^2\text{)}.$$

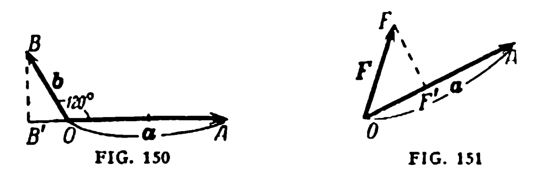


FIG. 150 FIG. 151

REMARQUE 1. Dans l'expression « produit scalaire », le second mot montre que le résultat de l'opération est un scalaire et non un vecteur (à la différence du *produit vectoriel*; cf. plus bas § 111) et le premier que cette opération jouit des principales propriétés du produit ordinaire (§ 105).

REMARQUE 2. Le produit scalaire ne peut être étendu au cas de trois facteurs.

En effet, le produit scalaire de deux vecteurs a et b est un *nombre*; si on multiplie ce nombre par un vecteur c (§ 89), on obtient le *vecteur*

$$(\mathbf{ab})\,\mathbf{c} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})\,\mathbf{c},$$

colinéaire au vecteur c.

§ 104a. Signification physique du produit scalaire

Si le vecteur $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ (fig. 151) représente le déplacement d'un point matériel et le vecteur $\mathbf{F} = \overrightarrow{OF}$ la force agissant sur ce point, le produit scalaire aF *est numériquement égal au travail fourni par la force* F.

En effet, seule la composante $\overrightarrow{OF'}$ effectue un travail. Cela sigifie que le travail est égal en valeur absolue au produit des longueurs des vecteurs a et $\overrightarrow{OF'}$, ce travail étant positif si les vecteurs $\overrightarrow{OF'}$ et a sont de même sens et négatif dans le cas contraire. Donc le travail est égal au module du vecteur a multiplié par la projection algébrique du vecteur F sur la direction du vecteur a, autrement dit il est égal au produit scalaire aF.

EXEMPLE. Le module du vecteur force F est égal à 5 kg. La longueur du vecteur déplacement a est 4 m. Supposons que la force F agisse sous un angle $\alpha = 45°$ par rapport au déplacement a. Le travail de la force F est alors

$$\mathbf{Fa} = |\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{a}| \cos\alpha = 5 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \approx 14{,}1 \ (\text{kgf} \cdot \text{m}).$$

§ 105. Propriétés du produit scalaire

1. Le produit scalaire **ab** s'annule si l'un des facteurs est le vecteur nul ou si les vecteurs **a** et **b** sont perpendiculaires.

Cela découle de (1) § 104.

EXEMPLE. $3\mathbf{i}\cdot 2\mathbf{j} = 0$, car les vecteurs de base **i**, **j** et, par conséquent, les vecteurs $3\mathbf{i}$, $2\mathbf{j}$ sont perpendiculaires.

REMARQUE. En algèbre usuelle il découle de l'égalité $ab = 0$ que soit $a = 0$, soit $b = 0$. Cette propriété n'est plus valable pour le produit scalaire.

2. $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$ (commutativité).

Cela découle de (1) § 104.

3. $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\,\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\mathbf{b}$ (distributivité).

Cette propriété est valable pour un nombre arbitraire de termes, par exemple quand le nombre de termes est égal à trois

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)\,\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\mathbf{b} + \mathbf{a}_3\mathbf{b}.$$

Cela découle de (2) § 104 et de (3) § 93.

4. $(m\mathbf{a})\mathbf{b} = m(\mathbf{ab})$ (associativité par rapport à un facteur scalaire) (*).

EXEMPLES.

$$(2\mathbf{a})\,\mathbf{b} = 2\mathbf{ab},\qquad (-3\mathbf{a})\,\mathbf{b} = -3\mathbf{ab},\qquad \mathbf{p}(-6\mathbf{q}) = -6\mathbf{pq}.$$

La propriété 4 découle de (1) § 104 (il est commode de considérer séparément les cas $m > 0$ et $m < 0$).

4a. $(m\mathbf{a})\,(n\mathbf{b}) = (mn)\,\mathbf{ab}$.

EXEMPLES.

$$(2\mathbf{a})\,(-3\mathbf{b}) = -6\mathbf{ab},\qquad (-5\mathbf{p})\left(-\frac{2}{3}\,\mathbf{q}\right) = \frac{10}{3}\,\mathbf{pq}.$$

La propriété 4a découle de la propriété précédente.

Les propriétés 2, 3, 4a permettent d'appliquer aux produits scalaires les mêmes transformations que l'on effectue en algèbre sur les produits des polynômes.

EXEMPLE 1.

$$2\mathbf{ab} + 3\mathbf{ac} = \mathbf{a}(2\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$$

(en vertu des propriétés 3 et 4).

(*) L'associativité n'est plus valable pour un facteur vectoriel: l'expression $(\mathbf{cb})\,\mathbf{a}$ est un vecteur colinéaire à **a** (§ 104, remarque 2), alors que $\mathbf{c}(\mathbf{ba})$ est un vecteur colinéaire à **c**, de sorte que

$$(\mathbf{cb})\,\mathbf{a} \neq \mathbf{c}(\mathbf{ba}).$$

Exemple 2.

$$(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b})(\mathbf{c} + 5\mathbf{d}) = 2\mathbf{ac} + 10\mathbf{ad} - 3\mathbf{bc} - 15\mathbf{bd}$$

(en vertu des propriétés 3 et 4a).

Exemple 3. Calculer l'expression $(\mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$, où $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont les vecteurs de base.

Solution. Comme les vecteurs $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sont perpendiculaires, $\mathbf{ij} = \mathbf{ik} = \mathbf{jk} = 0$; par ailleurs,

$$\mathbf{kk} = |\mathbf{k}|\,|\mathbf{k}|\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}}) = |\mathbf{k}|^2 \cos 0 = 1$$

(le module du vecteur de base est égal à l'unité). C'est pourquoi

$$(\mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \mathbf{ij} - \mathbf{ik} + \mathbf{kj} - \mathbf{kk} = -1.$$

5. Si les vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont colinéaires, alors $\mathbf{ab} = \pm |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|$; (on prend le signe plus si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont de même sens, et le signe moins s'ils sont de sens contraires).

5a. En particulier, $\mathbf{aa} = |\mathbf{a}|^2$.

Le produit scalaire $\mathbf{aa}$ est noté $\mathbf{a}^2$ (le *carré scalaire* du vecteur $\mathbf{a}$), de sorte que

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2 \qquad (1)$$

(le carré scalaire d'un vecteur est égal au carré de son module).

Remarque 1. La notion de cube scalaire (et à fortiori celle de puissances scalaires supérieures) n'existe pas en algèbre vectorielle (cf. § 104, remarque 2).

Remarque 2. $\mathbf{a}^2$ est un nombre positif (le carré de la longueur du vecteur); on peut en extraire la racine de degré arbitraire, en particulier la racine carrée $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ (la longueur du vecteur $\mathbf{a}$). *On ne peut toutefois* écrire $\mathbf{a}$ au lieu de $\sqrt{\mathbf{a}^2}$, car $\mathbf{a}$ est un vecteur et $\sqrt{\mathbf{a}^2}$ un nombre. Le résultat juste est:

$$\sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}|. \qquad (2)$$

§ 106. Produit scalaire des vecteurs de base

Il découle de la définition du § 104 que

$$\mathbf{ii} = \mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{jj} = \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{kk} = \mathbf{k}^2 = 1,$$
$$\mathbf{ij} = \mathbf{ji} = 0, \quad \mathbf{jk} = \mathbf{kj} = 0, \quad \mathbf{ki} = \mathbf{ik} = 0$$

(cf. § 105, exemple 3).

On peut présenter ces relations sous forme d'une « table de multiplication scalaire »:

Multiplicande / Multiplicateur	i	j	k
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

§ 107. Expression du produit scalaire en fonction des coordonnées des facteurs

Si $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, on a (*)

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2. \tag{1}$$

En particulier, si $\mathbf{m} = \{X, Y, Z\}$, on a

$$\mathbf{m}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{2}$$

d'où

$$\sqrt{\mathbf{m}^2} = |\mathbf{m}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{2a}$$

(cf. § 105, remarque 2 et § 100).

EXEMPLE 1. Trouver la longueur des vecteurs $\mathbf{a}_1\{3, 2, 1\}$, $\mathbf{a}_2\{2, -3, 0\}$ et le produit scalaire de ces vecteurs.

SOLUTION. Les longueurs cherchées sont

$$\sqrt{\mathbf{a}_1^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$\sqrt{\mathbf{a}_2^2} = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}.$$

Le produit scalaire est

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = 3 \cdot 2 + 2(-3) + 1 \cdot 0 = 0.$$

Cela signifie (§ 105, 1) que les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont perpendiculaires.

EXEMPLE 2. Trouver l'angle de deux vecteurs

$$\mathbf{a}_1\{-2, 1, 2\} \text{ et } \mathbf{a}_2\{-2, -2, 1\}.$$

SOLUTION. Les longueurs des vecteurs sont

$$|\mathbf{a}_1| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = 3,$$

$$|\mathbf{a}_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

(*) Nous avons $\mathbf{a}_1 = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{a}_2 = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$. Multiplions en tenant compte des propriétés 3, 4 du § 105 et de la table du § 106.

Le produit scalaire est $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = (-2)(-2) + 1(-2) + 2 \cdot 1 = 4$. Comme $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2})$, nous avons

$$\cos(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|} = \frac{4}{3\cdot 3} = \frac{4}{9},$$

autrement dit

$$(\widehat{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2}) \approx 63°37'.$$

§ 108. Condition de perpendicularité des vecteurs

Si les vecteurs $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ sont perpendiculaires, on a

$$X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0.$$

Inversement, si $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$, les vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont perpendiculaires ou bien l'un d'entre eux (par exemple $\mathbf{a}_1$) est un vecteur nul (*) (dans ce cas $X_1 = Y_1 = Z_1 = 0$).

Cela découle du § 105, 1 et de (1) § 107.

§ 109. Angle de deux vecteurs

L'angle φ entre les vecteurs $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$ peut être déterminé à l'aide de la formule (cf. exemple 2 § 107):

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1|\cdot|\mathbf{a}_2|} = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \qquad (1)$$

Cela découle de (1) et de (2a) § 107.

Exemple 1. Trouver l'angle entre les vecteurs $\{1, 1, 1\}$ et $\{2, 0, 3\}$.

Solution.

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 3}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{5}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{13}} \approx 0{,}8006,$$

d'où $\varphi = 36°50'$.

Exemple 2. Les sommets du triangle ABC sont

$$A(1, 2, -3); \quad B(0, 1, 2); \quad C(2, 1, 1).$$

Trouver les longueurs des côtés AB et AC et l'angle A.

(*) On peut estimer que le vecteur nul est perpendiculaire à n'importe quel vecteur; cf § 82.

SOLUTION.

$$\overrightarrow{AB} = \{(0-1),\ (1-2),\ (2+3)\} = \{-1,\ -1,\ 5\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{(2-1),\ (1-2),\ (1+3)\} = \{1,\ -1,\ 4\},$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2} = 3\sqrt{3},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = 3\sqrt{2},$$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-1)\cdot 1+(-1)\cdot(-1)+5\cdot 4}{9\sqrt{6}} = \frac{20}{9\sqrt{6}}.$$

REMARQUE. Les formules (1)-(3) du § 101 sont les cas particuliers de la formule (1) du présent paragraphe.

§ 110. Trièdres de sens direct et indirect

Soient **a**, **b**, **c** trois vecteurs (non nuls), non parallèles à un même plan et pris dans l'ordre indiqué (autrement dit **a** est le premier vecteur, **b** le second et **c** le troisième). Ramenant ces trois vecteurs à une même origine O (fig. 152), nous obtenons un système (un trièdre) de trois vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ non situés dans un même plan.

Le système des trois vecteurs **a**, **b**, **c** est de *sens direct* (fig. 152) si la rotation du vecteur $\overrightarrow{OA}$ qui le fait coïncider par le plus court chemin avec le vecteur $\overrightarrow{OB}$ s'effectue dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre pour un observateur dont la tête est en C.

Si cette rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre (fig. 153), le système des trois vecteurs **a**, **b**, **c** est *de sens indirect*.

EXEMPLE 1. Dans un système de coordonnées de sens direct (§ 94) les vecteurs de base **i**, **j**, **k** forment un trièdre de sens direct. Par contre, les vecteurs **j**, **i**, **k** (les vecteurs sont pris dans un ordre différent) forment un trièdre de sens indirect.

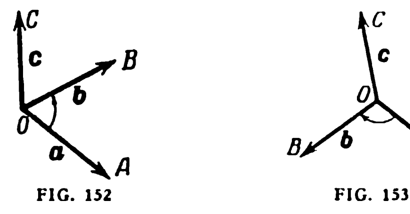


FIG. 152 FIG. 153

Si deux trièdres sont de sens direct ou de sens indirect, on dit qu'ils ont le même sens de rotation ou *la même orientation*; si par contre l'un trièdre est de sens direct et l'autre de sens indirect, on dit qu'ils sont *d'orientation contraire.*

Une permutation de deux vecteurs du système en modifie l'orientation (cf. exemple 1).

L'orientation du système est conservée par une *permutation circulaire* des vecteurs montrée sur la fig. 154 (le second vecteur devient le premier, le troisième le second et le premier le troisième, autrement dit le système **a**, **b**, **c** devient le système **b**, **c**, **a**).

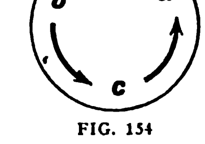


FIG. 154

EXEMPLE 2. Par une permutation circulaire nous obtenons du système **i**, **j**, **k** de sens direct le système **j**, **k**, **i** de sens direct et de ce dernier le système **k**, **i**, **j** de sens direct.

EXEMPLE 3. Si le système des vecteurs **a**, **b**, **c** est de sens direct, alors les trois systèmes

a, **b**, **c**,   **b**, **c**, **a**,   **c**, **a**, **b**

sont de sens direct, et les trois systèmes

b, **a**, **c**,   **a**, **c**, **b**,   **c**, **b**, **a**

de sens indirect.

On ne peut faire coïncider un trièdre de sens direct avec aucun trièdre de sens indirect.

La symétrie par rapport à un plan transforme un trièdre de sens direct en un trièdre de sens indirect et inversement.

§ 111. Produit vectoriel de deux vecteurs

DÉFINITION. On appelle *produit vectoriel* du vecteur **a** par un vecteur non colinéaire **b** un troisième vecteur **c** (produit) que l'on construit de la manière suivante:

1) son module est numériquement égal à l'aire du parallélogramme ($AOBL$ sur la fig. 155) construit sur les vecteurs **a** et **b**, autrement dit, il est égal à $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\sin(\widehat{\mathbf{a},\mathbf{b}})$;

2) sa direction est perpendiculaire au plan du parallélogramme mentionné;

3) le sens du vecteur **c** est alors choisi de telle sorte que le trièdre **a**, **b**, **c** soit de sens direct (§ 110).

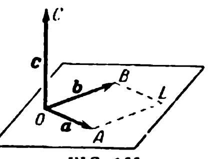


FIG. 155

NOTATION: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ou $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

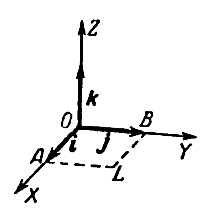


FIG. 156

COMPLÉMENT À LA DÉFINITION. Si les vecteurs **a** et **b** sont colinéaires, il est naturel d'affecter à la figure $AOBL$ (que l'on peut conventionnellement considérer comme un parallélogramme) une aire nulle. C'est pourquoi l'on estime que le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est égal au vecteur nul.

Comme on peut affecter au vecteur nul n'importe quelle direction, cette convention ne contredit pas les points 2 et 3 de la définition.

REMARQUE 1. Dans l'expression « produit vectoriel » le second mot indique que le résultat de l'opération est un vecteur (par opposition au produit scalaire; cf. § 104, remarque 1).

EXEMPLE 1. Trouver le produit vectoriel **i** × **j**, où **i**, **j** sont les vecteurs de base d'un système de coordonnées de sens direct (fig. 156).

SOLUTION. 1. Comme les vecteurs de base sont de longueur unité, l'aire du parallélogramme (du carré) $AOBL$ est égale à l'unité. Par conséquent, le module du produit vectoriel est égal à l'unité.

2. Comme la perpendiculaire au plan $AOBL$ est l'axe OZ, le produit vectoriel cherché est un vecteur colinéaire au vecteur **k**; tous deux étant de module unité, le produit vectoriel cherché sera soit **k**, soit — **k**.

3. On doit choisir le premier de ces deux vecteurs, puisque les vecteurs **i**, **j**, **k** forment un système de sens direct (et les vecteurs **i**, **j**, — **k** un système de sens indirect).

Nous avons ainsi

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

EXEMPLE 2. Trouver le produit vectoriel **j** × **i**.

SOLUTION. De même que dans l'exemple 1, nous concluons que le vecteur **j** × **i** est égal soit à **k**, soit à — **k**. Or, nous devons maintenant choisir — **k**, car les vecteurs **j**, **i**, — **k** forment un système de sens direct (et les vecteurs **j**, **i**, **k** un système de sens indirect).

Nous avons ainsi

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}.$$

EXEMPLE 3. Les vecteurs **a** et **b** ont respectivement les longueurs 80 cm et 50 cm et forment un angle de 30°. Adoptant le mètre pour unité de longueur, trouver la longueur du produit vectoriel **a** × **b**.

SOLUTION. L'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs **a** et **b** est égale à $80 \cdot 50 \sin 30° = 2000$ (cm²), autrement dit 0,2 m². La longueur du produit vectoriel est donc égale à 0,2 m.

EXEMPLE 4. Trouver la longueur du produit vectoriel de ces mêmes vecteurs en adoptant le centimètre pour unité de longueur.

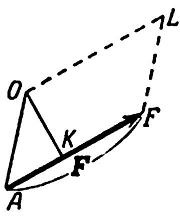


FIG. 157

SOLUTION. Comme l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs **a** et **b** est égale à 2000 cm², la longueur du produit vectoriel est égale à 2000 cm, c'est-à-dire 20 m.

Il apparaît des exemples 3 et 4 que la longueur du vecteur **a** × **b** dépend non seulement de la longueur des facteurs **a** et **b**, mais aussi *du choix de l'unité de longueur.*

SIGNIFICATION PHYSIQUE DU PRODUIT VECTORIEL. Parmi toutes les grandeurs physiques représentées par le produit vectoriel nous ne considérerons que le moment d'une force.

Soit A le point d'application de la force **F**. On appelle *moment de la force* **F** par rapport au point O le produit vectoriel $\overrightarrow{OA} \times \mathbf{F}$. Comme le module de ce produit vectoriel est numériquement égal à l'aire du parallélogramme $AFLO$ (fig. 157), le module du moment est égal au produit de la base AF par la hauteur OK, autrement dit à la force multipliée par la distance du point O à la ligne d'action de la force.

On démontre en mécanique que pour qu'un solide soit en équilibre, il faut que non seulement la résultante des vecteurs $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... représentant les forces sollicitant ce corps soit nulle, mais encore que le moment résultant de ces forces soit nul. Dans le cas où toutes les forces sont parallèles à un plan, on peut substituer à la composition des vecteurs représentant les moments l'addition et la soustraction de leurs modules. Mais pour des vecteurs arbitrairement orientés une telle substitution n'est plus possible. Conformément à cela le produit vectoriel est défini précisément comme un vecteur, et non comme un nombre.

§ 112. Propriétés du produit vectoriel

1. Le produit vectoriel **a** × **b** ne s'annule que lorsque les vecteurs **a** et **b** sont colinéaires [en particulier, si l'un d'eux (ou les deux) est le vecteur nul].

Cela découle du premier point de la définition du § 111.

1a. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$.

L'égalité $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ élimine la nécessité d'introduire la notion de « carré vectoriel » (cf. § 105, 5a).

2. Lors d'une permutation des facteurs le produit vectoriel est multiplié par -1 (change de signe):

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

(cf. les exemples 1 et 2 § 111).

Ainsi, *le produit vectoriel n'est pas commutatif* (cf. § 105, 2).

3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{l} + \mathbf{b} \times \mathbf{l}$ (distributivité).

Cette propriété est valable pour un nombre quelconque de termes, par exemple dans le cas de trois termes nous avons:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{l} + \mathbf{b} \times \mathbf{l} + \mathbf{c} \times \mathbf{l}.$$

4. $(m\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = m(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ (associativité par rapport à un facteur scalaire).

4a. $(m\mathbf{a}) \times (n\mathbf{b}) = mn(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

EXEMPLES: 1) $-3\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -3(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

2) $0{,}3\mathbf{a} \times 4\mathbf{b} = 1{,}2(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

3) $(2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + 5\mathbf{d}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + 10(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) - 3(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) -$
$- 15(\mathbf{b} \times \mathbf{d}) = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + 10(\mathbf{a} \times \mathbf{d}) + 3(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) + 15(\mathbf{d} \times \mathbf{b}) =$
$= 2(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) - 10(\mathbf{d} \times \mathbf{a}) + 3(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) + 15(\mathbf{d} \times \mathbf{b})$.

4) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{b}$. Les premier et quatrième termes sont nuls (cf. 1). En outre, $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (cf. 2). Par conséquent,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = -2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 2(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

L'aire de la figure $OCKD$ (fig. 158) est ainsi deux fois plus grande que l'aire de la figure $OACB$.

§ 113. Produits vectoriels des vecteurs de base

Il découle de la définition du § 111 que

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i},$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0.$$

Pour ne pas se tromper de signe, on peut se rappeler le schéma (fig. 159) que l'on utilise de la façon suivante:

Si le sens du plus court chemin (de la rotation) menant du premier vecteur au second coïncide avec le sens de la flèche, le produit vectoriel est égal au troisième vecteur; dans le cas contraire, le troisième vecteur est pris avec le signe moins.

EXEMPLE 1. Trouver $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$. Sur le schéma le sens du plus court chemin menant de $\mathbf{k}$ à $\mathbf{i}$ coïncide avec le sens de la flèche. C'est pourquoi $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$.

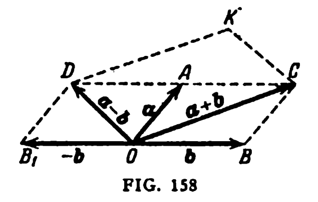


FIG. 158

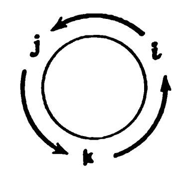


FIG. 159

EXEMPLE 2. Trouver $\mathbf{k} \times \mathbf{j}$. Le sens du plus court chemin menant de $\mathbf{k}$ à $\mathbf{j}$ coïncide avec le sens contraire aux aiguilles d'une montre. C'est pourquoi $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$.

EXEMPLE 3. Simplifier l'expression $(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k})$. Ouvrant les parenthèses et utilisant la table ou le schéma nous trouvons:

$$(2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) \times (4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}) = 8(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) - 12(\mathbf{i} \times \mathbf{j}) +$$
$$+ 24(\mathbf{i} \times \mathbf{k}) - 12(\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + 18(\mathbf{j} \times \mathbf{j}) - 36(\mathbf{j} \times \mathbf{k}) + 24(\mathbf{k} \times \mathbf{i}) -$$
$$- 36(\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + 72(\mathbf{k} \times \mathbf{k}) = -12\mathbf{k} - 24\mathbf{j} + 12\mathbf{k} - 36\mathbf{i} + 24\mathbf{j} + 36\mathbf{i} = 0.$$

Etant donné que le produit vectoriel ne s'annule que dans le cas où les facteurs sont colinéaires (§ 112, 1), les vecteurs $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ et $4\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$ sont colinéaires. C'est ce que montre également le critère du § 102.

§ 114. Expression du produit vectoriel en fonction des coordonnées des facteurs

Si $\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ et $\mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}$, alors (*)

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}. \tag{1}$$

Les expressions comprises entre deux traits verticaux sont des déterminants du second ordre (§ 12).

RÈGLE PRATIQUE. Pour obtenir les coordonnées du vecteur $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ nous formons le tableau

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{matrix}. \tag{2}$$

Eliminant la première colonne nous trouvons la première coordonnée

$$\begin{matrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{matrix}.$$

Eliminant la seconde colonne et *prenant le déterminant ainsi formé avec le signe moins* $\left(- \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} \right.$ ou, ce qui revient au même, $\left. \begin{vmatrix} Z_1 & X_1 \\ Z_2 & X_2 \end{vmatrix} \right)$ nous trouvons la deuxième coordonnée.

(*) Nous trouvons le produit vectoriel $(X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}) \times (X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k})$ en utilisant la table du § 113 et les propriétés 2, 3, 4 du § 112 (cf. exemple 3 § 113).

Eliminant la troisième colonne (en prenant le déterminant restant avec son signe), nous trouvons la troisième coordonnée.

Exemple 1. Trouver le produit vectoriel des vecteurs $\mathbf{a}_1\{3, -4, -8\}$ et $\mathbf{a}_2\{-5, 2, -1\}$.

Solution. Nous formons le tableau

$$\begin{Vmatrix} 3 & -4 & -8 \\ -5 & 2 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Eliminant la première colonne, nous obtenons la première coordonnée

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot(-1) - 2(-8) = 20.$$

Eliminant la seconde colonne, nous trouvons le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & -8 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}.$$

Intervertissant les colonnes (ce qui équivaut à changer le signe), nous obtenons la deuxième coordonnée $\begin{vmatrix} -8 & 3 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = 43.$

Eliminant la troisième colonne, nous obtenons la troisième coordonnée $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -14.$

Ainsi, $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \{20, 43, -14\}$.

Remarque. Pour ne pas se tromper de signe lors du calcul de la deuxième coordonnée, on peut utiliser au lieu du tableau (2) le tableau

$$\begin{matrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & X_2 & Y_2 \end{matrix} \qquad (3)$$

que l'on obtient de (2) en lui adjoignant les deux premières colonnes. Eliminant dans (3) la première colonne, nous choisissons les deux suivantes. Puis, éliminant la deuxième colonne, nous prenons les deux suivantes. Enfin, éliminant la troisième colonne, nous prenons les deux dernières. Il n'est plus besoin d'intervertir les colonnes dans les déterminants ainsi obtenus.

Exemple 2. Trouver l'aire S du triangle donné par ses sommets $A_1(3, 4, -1)$, $A_2(2, 0, 4)$, $A_3(-3, 5, 4)$.

Solution. L'aire recherchée est égale à la demi-aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{A_1A_2}$ et $\overrightarrow{A_1A_3}$. Nous trouvons (§ 99) $\overrightarrow{A_1A_2} = \{(2-3), (0-4), (4+1)\} = \{-1, -4, 5\}$ et $\overrightarrow{A_1A_3} = \{-6, 1, 5\}$. L'aire du parallélogramme est égale au module du pro-

duit vectoriel $\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}$, et ce dernier est égal à $\{-25, -25, -25\}$. Par conséquent,

$$S = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-25)^2 + (-25)^2 + (-25)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1875} \approx 21{,}7.$$

§ 115. Vecteurs coplanaires

On dit que trois (ou un plus grand nombre) de vecteurs sont *coplanaires* si après être ramenés à une même origine ils sont situés dans un même plan.

Si l'un au moins des trois vecteurs est un vecteur nul, ces trois vecteurs sont également considérés comme coplanaires.

On considère le critère de coplanarité aux §§ 116, 120.

§ 116. Produit mixte

On appelle produit *mixte* de trois vecteurs **a**, **b**, **c** (pris dans l'ordre indiqué) le produit scalaire par **a** du produit vectoriel **b** × **c**, autrement dit le nombre **a**(**b** × **c**), ou, ce qui revient au même, (**a** × **b**)**c**.

NOTATION: (**a**, **b**, **c**).

CRITÈRE DE COPLANARITÉ. Si **a**, **b**, **c** est un système de sens direct, alors (**a**, **b**, **c**) > 0; si **a**, **b**, **c** est un système de sens indirect, (**a**, **b**, **c**) < 0. Si les vecteurs **a**, **b**, **c** sont coplanaires (§ 115), alors (**a**, **b**, **c**) = 0. En d'autres termes, *l'égalité à zéro du produit mixte* (**a**, **b**, **c**) *est un critère de coplanarité des vecteurs* **a**, **b**, **c**.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU PRODUIT MIXTE. Le produit mixte (**a**, **b**, **c**) de trois vecteurs non coplanaires **a**, **b**, **c** est égal au volume du parallélépipède construit sur les vecteurs **a**, **b**, **c** pris avec le signe plus si **a**, **b**, **c** est un système de sens direct et avec le signe moins si **a**, **b**, **c** est un système de sens indirect.

EXPLICATION. Construisons (fig. 160, 161) le vecteur

$$\overrightarrow{OD} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}. \quad (1)$$

L'aire de la base $OAKB$ est alors

$$S = |\overrightarrow{OD}|. \quad (2)$$

La hauteur H (la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$), prise avec le signe plus ou moins, est (§ 92, 2) la projection algébrique du vecteur **c** sur la direction $\overrightarrow{OD}$, c'est-à-dire

$$H = \pm\, \mathrm{pr}_{\overrightarrow{OD}}\mathbf{c}. \quad (3)$$

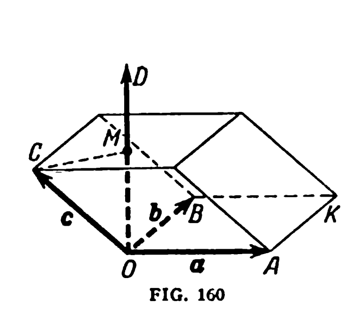


FIG. 160

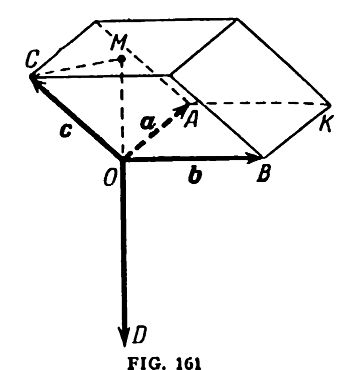


FIG. 161

On prend le signe plus si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OD}$ sont de même sens (fig. 160), ce qui a lieu si **a**, **b**, **c** est un système de sens direct. Le signe moins correspond à un système de sens indirect (fig. 161). Nous obtenons de (2) et (3):

$$V = SH = \pm |\overrightarrow{OD}| \,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{OD}}\,\mathbf{c} \quad (\text{cf. § 92}),$$

mais $|\overrightarrow{OD}| \,\mathrm{pr}_{\overrightarrow{OD}}\,\mathbf{c}$ est le produit scalaire $\overrightarrow{OD}\cdot\mathbf{c}$ (§ 104), autrement dit $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}$. Cela signifie que

$$V = \pm (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\,\mathbf{c}.$$

§ 117. Propriétés du produit mixte

1. Par une permutation circulaire (§ 110) des facteurs le produit mixte ne varie pas, par permutation de deux facteurs, il change de signe:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}).$$

Cela découle de l'interprétation géométrique (§ 116) et du § 110.

2. $[(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \mathbf{c}, \mathbf{d}] = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ (distributivité). La propriété peut être étendue à un nombre arbitraire de termes.

Cela découle de la définition du produit mixte et du § 112, 3.

3. $[(m\mathbf{a}), \mathbf{b}, \mathbf{c}] = m(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (associativité par rapport à un facteur scalaire).

Cela découle de la définition du produit mixte et du § 112, 4.

Ces propriétés permettent d'appliquer aux produits mixtes les transformations ne se distinguant de leurs analogues algébriques que par le fait qu'*en intervertissant l'ordre des facteurs on doit tenir compte du signe du produit* (cf. 1).

4. Le produit mixte des vecteurs dont deux au moins sont égaux est nul:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0.$$

EXEMPLE 1.

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, (3\mathbf{a} + 2\mathbf{b} - 5\mathbf{c})] = (3\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) + (2\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}) - (5\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -(5\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

EXEMPLE 2.

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}), (\mathbf{b} + \mathbf{c}), (\mathbf{c} + \mathbf{a})] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) =$$
$$= (\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) +$$
$$+ (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}).$$

Tous les termes sont nuls, excepté les deux termes extrêmes. En outre, $(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (propriété 1). C'est pourquoi

$$[(\mathbf{a} + \mathbf{b}), (\mathbf{b} + \mathbf{c}), (\mathbf{c} + \mathbf{a})] = (2\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

§ 118. Déterminant du troisième ordre [*]

Il est souvent commode, en particulier, lors du calcul du produit mixte d'utiliser le symbole suivant

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Il représente la notation abrégée de l'expression

$$a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

L'expression (1) est appelée *déterminant du troisième ordre.*

Les déterminants du second ordre, qui entrent dans l'expression (2), sont formés de la manière suivante. On élimine du tableau (1) la ligne et la colonne contenant a_1, comme l'indique le schéma suivant:

$$\begin{matrix} a_1 & \text{---} b_1 \text{---} & c_1 \\ \vdots & & \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & & \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix}$$

[*] Pour un exposé plus détaillé voir §§ 182-185.

Le déterminant restant constitue le facteur de la lettre a_1 dans l'expression (2). On obtient de même les deux autres déterminants de la formule (2):

$$\begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{array}$$

On doit se rappeler que *le second terme de la formule* (2) *est pris avec le signe moins*!

Exemple 1. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Nous avons:

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \cdot 6 + 1 \cdot (-15) - 3 \cdot (-9) = 0.$$

Remarque 1. Comme $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}$, le déterminant du troisième ordre peut être mis sous la forme:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (3)$$

Tous les déterminants du second ordre sont ici pris avec le signe plus.

Remarque 2. On peut formaliser le calcul d'après la formule (3) de la manière suivante. Nous adjoignons à droite au tableau (1) ses deux premières colonnes

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array} \quad (4)$$

Nous choisissons dans la première ligne la lettre a_1 et nous descendons suivant la diagonale comme l'indique la flèche dans le tableau (5):

$$\begin{array}{ccccc} a_1 \searrow & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & \left| b_2 \right. & \left. c_2 \right| & a_2 & b_2 \\ a_3 & \left| b_3 \right. & \left. c_3 \right| & a_3 & b_3 \end{array} \quad (5)$$

Nous multiplions a_1 par le déterminant du second ordre qu'indique la flèche. Nous obtenons

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Nous éliminons ensuite la première colonne et nous prenons dans la première ligne la lettre b_1 (la première des lettres restantes dans la ligne ainsi obtenue) et nous procédons de même, comme l'indique le tableau (6):

$$\begin{matrix} b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ b_2 & \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix} & & b_2 \\ b_3 & & & b_3 \end{matrix} \qquad (6)$$

Nous obtenons:

$$b_1 \begin{vmatrix} c_2 & a_2 \\ c_3 & a_3 \end{vmatrix}.$$

Nous éliminons enfin la seconde colonne et nous obtenons:

$$c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

EXEMPLE 2. Calculer le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nous formons le tableau (4)

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 & 2 & 5 \end{matrix}$$

et nous trouvons:

$$D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} =$$
$$= -14 + 20 - 33 = -27.$$

§ 119. Expression du produit mixte en fonction des coordonnées des facteurs

Si les coordonnées des vecteurs $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ sont respectivement

$$\mathbf{a}_1 = \{X_1, Y_1, Z_1\}, \quad \mathbf{a}_2 = \{X_2, Y_2, Z_2\}, \quad \mathbf{a}_3 = \{X_3, Y_3, Z_3\},$$

le produit mixte $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ est calculé d'après la formule

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Cela découle des formules (1) § 107 et (1) § 114.

EXEMPLE 1. Le produit mixte $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ des vecteurs $\mathbf{a}_1\{-2, -1, -3\}$, $\mathbf{a}_2\{-1, 4, 6\}$, $a_3\{1, 5, 9,\}$ est

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

(cf. § 118, exemple 1). Cela signifie (§ 116) que les vecteurs **a**, **b**, **c** sont coplanaires.

EXEMPLE 2. Les vecteurs $\{1, 2, 3\}$, $\{-1, 3, 4\}$, $\{2, 5, 2\}$ forment un système de sens indirect, car leur produit mixte (§ 118, exemple 2)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -27$$

est négatif (cf. § 116).

§ 120. Critère de coplanarité exprimé en fonction des coordonnées

La condition (nécessaire et suffisante) de coplanarité des vecteurs $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3\{X_3, Y_3, Z_3\}$ est (cf. § 119, exemple 1)

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Cela découle du § 116.

§ 121. Volume d'un parallélépipède

Le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\mathbf{a}_1\{X_1, Y_1, Z_1\}$, $\mathbf{a}_2\{X_2, Y_2, Z_2\}$, $\mathbf{a}_3\{X_3, Y_3, Z_3\}$ est égal à

$$V = \pm \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

où l'on prend le signe plus si le déterminant du troisième ordre est positif, et le signe moins si le déterminant est négatif (cf. § 13).

Cela découle des §§ 116, 119.

EXEMPLE 1. Trouver le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\{1, 2, 3\}$, $\{-1, 3, 4\}$, $\{2, 5, 2\}$.

SOLUTION. Nous avons:

$$V = \pm \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \end{vmatrix} = \pm (-27).$$

Comme le déterminant est négatif, nous prenons le signe moins. Nous trouvons alors $V = 27$.

EXEMPLE 2. Trouver le volume V de la pyramide triangulaire $ABCD$ de sommets $A(2, -1, 1)$, $B(5, 5, 4)$, $C(3, 2, -1)$, $D(4, 1, 3)$.

SOLUTION. Nous trouvons (§ 99):

$$\overrightarrow{AB} = \{(5-2), (5+1), (4-1)\} = \{3, 6, 3\}.$$

De même $\overrightarrow{AC} = \{1, 3, -2\}$, $\overrightarrow{AD} = \{2, 2, 2\}$. Le volume cherché est égal à $\frac{1}{6}$ du volume du parallélépipède construit sur les arêtes $\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Par conséquent,

$$V = \pm \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi $V = 3$.

§ 122. Double produit vectoriel

On appelle ***double produit vectoriel*** l'expression de la forme

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

Le double produit vectoriel est un vecteur situé dans le même plan que les vecteurs **b** et **c**; il s'exprime en fonction des vecteurs **b** et **c** de la manière suivante:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab}). \quad (1)$$

§ 123. Equation du plan

A. Le plan (fig. 162) passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire au vecteur $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ est représenté par l'équation du premier degré (*)

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (1)$$

(*) L'équation (1) exprime la condition de perpendicularité des vecteurs $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ et $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. Cf. §§ 108 et 109.

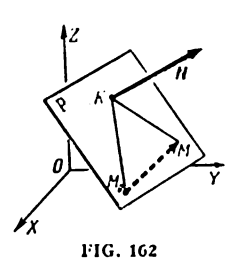


FIG. 162

ou

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (2)$$

où l'on a introduit la notation

$$D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0).$$

Le vecteur $\mathbf{N}\{A, B, C\}$ est dit *normal* au plan P.

REMARQUE 1. L'expression « le plan P est représenté par l'équation (1) » signifie que: 1) les coordonnées x, y, z de tout point M du plan P vérifient l'équation (1); 2) les coordonnées x, y, z de tout point non situé dans le plan P ne vérifient pas cette équation (cf. § 8).

B. Toute équation du premier degré $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C ne sont pas simultanément nuls) représente un plan.

Les équations (1) et (2) peuvent être mises sous forme vectorielle

$$\mathbf{N}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \qquad (1a)$$

$$\mathbf{N}\mathbf{r} + D = 0 \qquad (2a)$$

($\mathbf{r}_0$ et $\mathbf{r}$ sont les rayons vecteurs des points M_0 et M; $D = -\mathbf{N}\mathbf{r}_0$).

EXEMPLE. Le plan passant par le point $(2, 1, -1)$ et perpendiculaire au vecteur $\{-2, 4, 3\}$ est représenté par l'équation

$$-2(x-2) + 4(y-1) + 3(z+1) = 0$$

ou

$$-2x + 4y + 3z + 3 = 0.$$

REMARQUE 2. Un seul et même plan peut être représenté par une multitude d'équations dont tous les coefficients et le terme indépendant des coordonnées courantes sont proportionnels (cf. plus bas § 125, remarque).

§ 124. Cas particuliers de la position du plan par rapport au système de coordonnées

1. L'équation $Ax + By + Cz = 0$ (le terme indépendant des coordonnées courantes $D = 0$) représente un plan passant par l'origine.

2. L'équation $Ax + By + D = 0$ (le coefficient $C = 0$) représente un plan parallèle à l'axe OZ, l'équation $Ax + Cz + D = 0$ un plan parallèle à l'axe OY et l'équation $By + Cz + D = 0$ un plan parallèle à l'axe OX.

Retenons la règle suivante: *si l'équation ne contient pas z, le plan est parallèle à l'axe OZ*, etc.

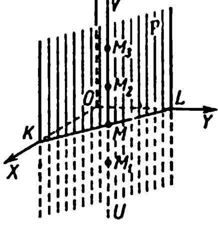


FIG. 163

EXEMPLE. L'équation

$$x + y - 1 = 0$$

représente un plan P (fig. 163) parallèle à l'axe OZ.

REMARQUE. En géométrie analytique à deux dimensions l'équation $x + y - 1 = 0$ représente une *droite* (KL sur la fig. 163). Elucidons pourquoi, dans l'espace, elle représente un *plan*.

Prenons sur la droite KL un point arbitraire M. Comme M est situé dans le plan XOY, pour lui $z = 0$. Supposons que dans le système XOY le point M possède les coordonnées $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (elles vérifient l'équation $x + y - 1 = 0$). Alors dans le système à trois dimensions $OXYZ$ les coordonnées du point M sont $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$. Ces coordonnées vérifient l'équation $x + y - 1 = 0$ (pour plus de clarté, écrivons-la sous la forme $1x + 1y + 0 \cdot z - 1 = 0$).

Considérons maintenant les points pour lesquels $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$, mais $z \neq 0$, par exemple, les points $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$, etc. (cf. fig. 163). Leurs coordonnées vérifient également l'équation $x + y + 0 \cdot z - 1 = 0$. Ces points remplissent la droite « verticale » UV, passant par le point M. On peut construire de telles droites verticales pour tous les points de la droite KL. Dans leur ensemble elles remplissent le plan P.

Nous dirons plus bas (§ 140, exemple 4) comment représenter dans un système de coordonnées dans l'espace la *droite* KL.

3. L'équation $Ax + D = 0$ ($B = 0$, $C = 0$) représente un plan parallèle aussi bien à l'axe OY qu'à l'axe OZ (cf. 2), autrement dit parallèle au plan de coordonnées YOZ.

D'une manière analogue, l'équation $By + D = 0$ représente un plan parallèle au plan XOZ et l'équation $Cz + D = 0$ un plan parallèle au plan XOY (cf. § 15).

4. Les équations $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ représentent respectivement les plans YOZ, XOZ, XOY.

§ 125. Condition de parallélisme des plans

Si les plans

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ et } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sont parallèles, les vecteurs normaux $\mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ et $\mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ sont colinéaires (et inversement). C'est pourquoi (§ 102) la condition de parallélisme (nécessaire et suffisante) est

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}.$$

EXEMPLE 1. Les plans

$$2x - 3y - 4z + 11 = 0 \text{ et } -4x + 6y + 8z + 36 = 0$$

sont parallèles car $\frac{-4}{2} = \frac{6}{-3} = \frac{8}{-4}$.

EXEMPLE 2. Les plans $2x - 3z - 12 = 0$ ($A_1 = 2$, $B_1 = 0$, $C_1 = -3$) et $4x + 4y - 6z + 7 = 0$ ($A_2 = 4$, $B_2 = 4$, $C_2 = -6$) ne sont pas parallèles, car $B_1 = 0$ et $B_2 \neq 0$ (§ 102, remarque).

REMARQUE. Si non seulement les coefficients des coordonnées, mais encore les termes indépendants des coordonnées sont proportionnels, c'est-à-dire si

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{D_2}{D_1},$$

alors les plans sont confondus. Ainsi, les équations

$$3x + 7y - 5z + 4 = 0 \quad \text{et} \quad 6x + 14y - 10z + 8 = 0$$

représentent un seul et même plan. Cf. § 18, remarque 3.

§ 126. Condition de perpendicularité de deux plans

Si les plans

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

sont perpendiculaires, leurs vecteurs normaux $\mathrm{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}$, $\mathrm{N}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ le sont aussi (et inversement). C'est pourquoi (§ 108) la condition (nécessaire et suffisante) de perpendicularité est

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

EXEMPLE 1. Les plans

$$3x - 2y - 2z + 7 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 2y + z + 4 = 0$$

sont perpendiculaires, car $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 0$.

EXEMPLE 2. Les plans

$$3x - 2y = 0 \quad (A_1 = 3, \ B_1 = -2, \ C_1 = 0)$$

et

$$z = 4 \quad (A_2 = 0, \ B_2 = 0, \ C_2 = 1)$$

sont perpendiculaires.

§ 127. Angle de deux plans

Les deux plans

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \qquad (1)$$

et

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (2)$$

forment quatre angles dièdres deux à deux égaux. L'un d'entre eux est égal à l'angle formé par les vecteurs normaux $N_1\{A_1, B_1, C_1\}$ et $N_2\{A_2, B_2, C_2\}$. Désignant par φ l'un quelconque de ces angles dièdres nous avons:

$$\cos\varphi = \pm \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (3)$$

En choisissant le signe plus nous obtenons $\cos(\widehat{N_1, N_2})$, en choisissant le signe moins $\cos[180° - (\widehat{N_1, N_2})]$.

EXEMPLE. L'angle des deux plans

$$x - y + \sqrt{2}z + 2 = 0 \quad \text{et} \quad x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0$$

est déterminé à l'aide de l'égalité

$$\cos\varphi = \pm \frac{1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 1 + (\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt{1 + 1 + (\sqrt{2})^2}} = \pm\frac{1}{2}.$$

Nous obtenons $\varphi = 60°$ ou $\varphi = 120°$.

Si le vecteur N_1 forme avec les axes OX, OY, OZ des angles α_1, β_1, γ_1 et le vecteur N_2 des angles $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, alors

$$\cos\varphi = \pm(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2). \qquad (4)$$

Cela découle de (3) et des formules (1)-(3) § 101.

§ 128. Plan passant par un point donné et parallèle à un plan donné

Le plan passant par le point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et parallèle au plan $Ax + By + Cz + D = 0$ est représenté par l'équation

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

Cela découle des §§ 123 et 125.

EXEMPLE. Le plan passant par le point (2, − 1, 6) et parallèle au plan $x + y - 2z + 5 = 0$ est représenté par l'équation $(x - 2) + (y + 1) - 2(z - 6) = 0$, autrement dit $x + y - 2z + 11 = 0$.

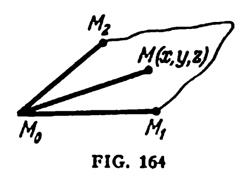


FIG. 164

§ 129. Plan passant par trois points

Si les points $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ne sont pas alignés, alors le plan (fig. 164) passant par ces trois points est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Elle exprime le fait que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$ sont coplanaires (cf. §§ 120 et 99).

EXEMPLE. Les points $M_0(1, 2, 3)$, $M_1(2, 1, 2)$, $M_2(3, 3, 1)$ ne sont pas alignés, car les vecteurs $\overrightarrow{M_0M_1}\{1, -1, -1\}$ et $\overrightarrow{M_0M_2}\{2, 1, -2\}$ ne sont pas colinéaires. Le plan $M_0M_1M_2$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

autrement dit

$$x + z - 4 = 0.$$

REMARQUE. Si les points M_0, M_1, M_2 sont alignés, l'équation (1) devient une identité, et on peut mener par ces points une infinité de plans.

§ 130. Segments déterminés sur les axes

Si le plan $Ax + By + Cz + D = 0$ n'est pas parallèle à l'axe OX (c'est-à-dire si $A \neq 0$; § 124), il détermine sur cet axe un segment $a = -\frac{D}{A}$. De manière analogue les segments déterminés sur les axes OY et OZ sont $b = -\frac{D}{B}$ (si $B \neq 0$) et $c = -\frac{D}{C}$ (si $C \neq 0$) (cf. § 32).

EXEMPLE. Le plan $3x + 5y - 4z - 3 = 0$ détermine sur les axes des segments $a = \frac{3}{3} = 1$, $b = \frac{3}{5}$, $c = -\frac{3}{4}$.

§ 131. Equation d un plan en fonction de ses coordonnées à l'origine

Si le plan détermine sur les axes des segments a, b, c (non nuls), on peut le représenter par l'équation

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \qquad (1)$$

appelée « équation du plan en fonction de ses coordonnées à l'origine ».

On peut obtenir l'équation (1) comme l'équation d'un plan passant par les trois points $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, c)$ (cf. § 129).

EXEMPLE. Ecrire l'équation du plan

$$3x - 6y + 2z - 12 = 0$$

sous la forme (1).

Nous trouvons (§ 130) $a = 4$, $b = -2$, $c = 6$. L'équation est

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{6} = 1.$$

REMARQUE 1. Le plan passant par l'origine des coordonnées ne peut être représenté sous la forme de l'équation (1) (cf. § 33, remarque 1).

REMARQUE 2. On peut représenter le plan parallèle à l'axe OX, mais non parallèle aux deux autres axes par l'équation $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, où b et c sont les segments déterminés sur les axes OY et OZ. Le plan parallèle aux axes OX et OY peut être représenté par l'équation $\frac{z}{c} = 1$. On peut représenter d'une manière analogue les plans parallèles aux autres axes, à l'un ou à deux d'entre eux (cf. § 33, remarque 2).

§ 132. Plan passant par deux points et perpendiculaire à un plan donné

Le plan P (fig. 165) passant par deux points $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et perpendiculaire au plan Q donné par l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Elle exprime (§ 120) le fait que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $N\{A, B, C\} = \overrightarrow{M_0K}$ sont coplanaires.

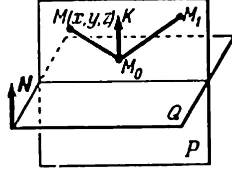


FIG. 165

Exemple. Le plan passant par deux points $M_0(1, 2, 3)$ et $M_1(2, 1, 1)$ et perpendiculaire au plan $3x + 4y + z - 6 = 0$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 1-2 & 1-3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire $x - y + z - 2 = 0$.

Remarque. Dans le cas où la droite M_0M_1 est perpendiculaire au plan Q, le plan P est indéterminé. Cela s'exprime par le fait que l'équation (1) devient une identité.

§ 133. Plan passant par un point donné et perpendiculaire à deux plans

Le plan P passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à deux plans (non parallèles) Q_1, Q_2:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Elle exprime le fait (fig. 166) que les vecteurs

$$\overrightarrow{M_0M}, \ \mathbf{N}_1\{A_1, B_1, C_1\}, \ \mathbf{N}_2\{A_2, B_2, C_2\} \ (*)$$

sont coplanaires.

Exemple. Le plan passant par le point (1, 3, 2) et perpendiculaire aux plans $x + 2y + z - 4 = 0$ et $2x + y + 3z + 5 = 0$ est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$5x - y - 3z + 4 = 0.$$

FIG. 166

(*) Le produit vectoriel $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ (fig. 166) est le vecteur normal au plan P. Cela signifie [§ 123 (1a)] que l'équation du plan P est $(\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2)(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, d'où nous retrouvons l'équation (1).

Remarque. Dans le cas où les plans Q_1, Q_2 sont parallèles, le plan P est indéterminé, ce qui se traduit par le fait que l'équation (1) devient une identité.

§ 134. Point d'intersection de trois plans

Trois plans peuvent ne pas avoir de points communs (si deux au moins d'entre eux sont parallèles ou si leurs droites d'intersection sont parallèles), ils peuvent avoir une infinité de points communs (s'ils passent tous par une même droite) ou n'en avoir qu'un seul. Dans le premier cas le système d'équations

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$$

n'a pas de solutions, dans le second cas il possède une infinité de solutions et dans le troisième une solution unique. Pour étudier ce système le plus commode est d'utiliser les déterminants (§§ 183, 190), mais on peut également se contenter de l'algèbre élémentaire.

Exemple 1. Les plans

$$7x - 3y + z - 6 = 0, \quad (1)$$
$$14x - 6y + 2z - 5 = 0, \quad (2)$$
$$x + y - 5z = 0 \quad (3)$$

n'ont pas de points communs, car les plans (1) et (2) sont parallèles (§ 125). Le système de ces équations est incompatible [les équations (1) et (2) sont contradictoires].

Exemple 2. Etablir si les trois plans

$$x + y + z = 1, \quad (4)$$
$$x - 2y - 3z = 5, \quad (5)$$
$$2x - y - 2z = 8. \quad (6)$$

ont des points communs.

Nous cherchons la solution du système (4)-(6). Eliminant z entre (4) et (5), nous obtenons $4x + y = 8$; éliminant z entre (4) et (6), nous obtenons $4x + y = 10$. Ces deux équations sont incompatibles. Cela signifie que les trois plans n'ont pas de points communs. Comme il n'y a pas parmi eux de plans parallèles, les trois droites d'intersection de ces plans sont parallèles.

EXEMPLE 3. Etablir si les trois plans

$$x + y + z = 1, \quad x - 2y - 3z = 5, \quad 2x - y - 2z = 6$$

ont des points communs.

En procédant de même que pour l'exemple 2, nous obtenons deux fois $4x + y = 8$, c'est-à-dire en fait non pas deux, mais une seule équation. Elle possède une infinité de solutions. Cela signifie que les trois plans possèdent une infinité de points communs, autrement dit ils passent par une même droite.

EXEMPLE 4. Les plans

$$x - y + 2 = 0, \quad x + 2y - 1 = 0, \quad x + y - z + 2 = 0$$

possèdent un seul point commun $(-1, 1, 2)$, car le système d'équations admet une solution unique $x = -1$, $y = 1$, $z = 2$.

§ 135. Position relative d'un plan et de deux points

On peut déterminer la position relative des points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ et du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

d'après les critères suivants (cf. § 27):

a) Les points M_1 et M_2 sont situés d'un même côté du plan (1) quand les nombres $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ et $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ sont de même signe.

b) M_1 et M_2 sont situés de part et d'autre du plan (1) quand ces nombres sont de signes contraires.

c) L'un des points M_1, M_2 (ou les deux) est situé dans le plan (1) si l'un de ces nombres (ou les deux) est nul.

EXEMPLE 1. Les points (2, 3, 3) et (1, 2, − 1) sont situés d'un même côté du plan $6x + 3y + 2z - 6 = 0$, car les nombres $6 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 - 6 = 21$ et $6 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2(-1) - 6 = 4$ sont tous deux positifs.

EXEMPLE 2. L'origine (0, 0, 0) et le point (2, 1, 1) sont situés de part et d'autre du plan $5x + 3y - 2z - 5 = 0$, car les nombres $5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 5 = -5$ et $5 \cdot 2 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 5 = 6$ sont de signes contraires.

§ 136. Distance d'un point à un plan

La distance d du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$ au plan

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1}$$

est égale (cf. § 28) à la valeur absolue de

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$d = |\delta| = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3}$$

EXEMPLE. Trouver la distance du point (3, 9, 1) au plan $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

SOLUTION.

$$\delta = \frac{x_1 - 2y_1 + 2z_1 - 3}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1\cdot 3 - 2\cdot 9 + 2\cdot 1 - 3}{3} = -5\frac{1}{3},$$

$$d = |\delta| = 5\frac{1}{3}.$$

REMARQUE 1. D'après le signe de δ on peut juger de la position relative du point M_1 et de l'origine O par rapport au plan (1) (cf. § 28, remarque 1).

REMARQUE 2. La formule (3) peut être établie analytiquement, en raisonnant comme nous l'avons fait dans la remarque 2 § 28. Il est commode de prendre l'équation de la droite passant par le point M_1 et perpendiculaire au plan (1) sous forme paramétrique (cf. §§ 153, 156).

§ 137. Paramètres polaires du plan (*)

On appelle *distance polaire* du plan UVW (fig. 167) la longueur p de la perpendiculaire OK menée de l'origine O sur ce plan. La distance polaire est positive ou nulle.

Si le plan UVW ne passe pas par l'origine, on adopte comme sens positif sur la perpendiculaire OK le sens du vecteur $\overrightarrow{OK}$. Si, par contre, UVW passe par l'origine, on choisit arbitrairement le sens positif sur la perpendiculaire.

On appelle *angles polaires* du plan UVW les angles

$$\alpha = \widehat{XOK}, \quad \beta = \widehat{YOK}, \quad \gamma = \widehat{ZOK},$$

compris entre le sens positif de la droite OK et les axes de coordonnées (on admet que ces angles sont positifs et n'excèdent pas 180°). Les angles α, β, γ sont liés (§ 101) par la relation

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

La distance polaire p et les angles polaires α, β, γ sont appelés les *paramètres polaires* du plan UVW.

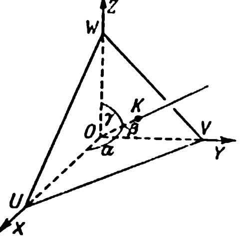


FIG. 167

(*) Cf. § 29.

Si le plan UVW est représenté par l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$, ses paramètres polaires sont déterminés par les formules

$$p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= \mp \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\beta &= \mp \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos\gamma &= \mp \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

où l'on choisit les signes supérieurs lorsque $D > 0$ et les signes inférieurs pour $D < 0$. Si $D = 0$, on choisit arbitrairement ou bien tous les signes supérieurs, ou bien tous les signes inférieurs.

EXEMPLE 1. Trouver les paramètres polaires du plan $x - 2y + 2z - 3 = 0$ ($A = 1$, $B = -2, C = 2, D = -3$).

SOLUTION. La formule (1) donne

$$p = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{3} = 1.$$

Les formules (2), où l'on doit choisir les signes inférieurs (puisque $D = -3 < 0$), donnent

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3},$$

$$\cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = -\frac{2}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Par conséquent,

$$\alpha \approx 70°32', \quad \beta \approx 131°49', \quad \gamma \approx 48°11'.$$

EXEMPLE 2. Trouver les paramètres polaires du plan

$$x - 2y + 2z = 0.$$

La formule (1) donne $p = 0$ (le plan passe par l'origine); on doit prendre dans les formules (2) ou bien tous les signes supérieurs, ou bien tous les signes inférieurs. Dans le premier cas

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}, \quad \cos\beta = +\frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = -\frac{2}{3},$$

par conséquent,

$$\alpha \approx 109°28', \quad \beta \approx 48°11', \quad \gamma \approx 131°49',$$

et dans le second cas

$$\alpha \approx 70°32', \quad \beta \approx 131°49', \quad \gamma \approx 48°11'.$$

§ 138. Equation normale du plan

Le plan dont la distance polaire est p (§ 137) et les angles polaires α, β, γ ($\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$; § 101) est représenté par l'équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0, \quad p > 0. \qquad (1)$$

Elle est appelée *équation normale* du plan.

EXEMPLE 1. Ecrire l'équation normale du plan dont la distance polaire est $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et tous les angles polaires obtus et égaux.

SOLUTION. Si $\alpha = \beta = \gamma$, la condition $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ donne $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$; comme les angles α, β, γ sont obtus, on doit prendre le signe moins. L'équation recherchée est $-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}y - \frac{1}{\sqrt{3}}z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$.

REMARQUE. Le même plan peut être représenté par l'équation

$$x + y + z + 1 = 0$$

(on l'obtient en multipliant les deux membres de l'équation initiale par $-\sqrt{3}$), mais ce n'est pas l'équation normale, car les coefficients des coordonnées ne sont pas les cosinus des angles polaires (la somme de leurs carrés n'est pas égale à 1) et de plus le terme indépendant des coordonnées est positif.

EXEMPLE 2. L'équation $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z + 5 = 0$ n'est pas normale, car bien que $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$, le terme indépendant des coordonnées est positif.

EXEMPLE 3. L'équation $-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z-5=0$ est normale; $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$; $\cos\beta=\frac{2}{3}$; $\cos\gamma=-\frac{2}{3}$, $p=5$ ($\alpha\approx 109°28'$, $\beta\approx 48°11'$, $\gamma\approx 131°49'$).

DÉDUCTION DE L'ÉQUATION (1). Le plan considéré (UVW sur la fig. 167) passe par le point $K(p\cos\alpha,\ p\cos\beta,\ p\cos\gamma)$ et est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{OK}$. On peut prendre au lieu de $\overrightarrow{OK}$ un vecteur **a** de même orientation et de longueur égale à l'unité graphique. Les coordonnées de **a** sont $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ (§ 101). Appliquant l'équation (1) du § 101, nous obtenons l'équation normale (1).

§ 139. Réduction de l'équation du plan à sa forme normale

Pour trouver l'équation normale du plan donné par l'équation $Ax+By+Cz+D=0$, il suffit de diviser les deux membres de cette équation par $\mp\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, en prenant le signe supérieur si $D>0$ et le signe inférieur si $D<0$; si $D=0$, on peut prendre n'importe quel signe. Nous obtenons l'équation

$$\mp\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x\mp\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y\mp\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z-\frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0.$$

Elle est normale, car les coefficients de x, y, z sont, en vertu de (2) § 137, respectivement égaux à $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ et le terme indépendant des coordonnées est, en vertu de (1) § 137, égal à $-p$.

EXEMPLE 1. Réduire l'équation

$$x-2y+2z-6=0 \qquad (1)$$

à sa forme normale.

Divisons les deux membres de l'équation par $+\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}=3$ (nous prenons le signe + devant le radical, le terme indépendant des coordonnées -6 étant négatif). Nous obtenons:

$$\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-2=0.$$

Par conséquent, $p=2$, $\cos\alpha=\frac{1}{3}$, $\cos\beta=-\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{2}{3}$ ($\alpha\approx 70°32'$, $\beta\approx 131°49'$, $\gamma\approx 48°11'$).

EXEMPLE 2. Réduire l'équation

$$x - 2y + 2z + 6 = 0 \qquad (2)$$

à sa forme normale.

Le terme indépendant des coordonnées est positif. C'est pourquoi nous divisons par $-\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = -3$. Nous obtenons:

$$-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 2 = 0.$$

Par conséquent, $p = 2$, $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$ ($\alpha \approx 109°28'$, $\beta \approx 48°11'$, $\gamma \approx 131°49'$).

EXEMPLE 3. Réduire l'équation

$$x - 2y + 2z = 0$$

à sa forme normale.

Comme $D = 0$ (le plan passe par l'origine), nous pouvons diviser soit par $+3$, soit par -3. Nous obtenons soit $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0$, soit $-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0$. Dans les deux cas $p = 0$. Les valeurs de α, β, γ sont dans le premier cas les mêmes que dans l'exemple 1, et dans le second cas les mêmes que dans l'exemple 2.

REMARQUE. Si dans l'équation $Ax + By + Cz + D = 0$ le terme indépendant des coordonnées est négatif et $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, alors l'équation est normale (§ 138, exemple 3) et il n'est pas besoin de la transformer.

§ 140. Equations d'une droite dans l'espace

Toute droite UV (fig. 168) peut être représentée par le système de deux équations:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (2)$$

dont chacune représente l'un de deux plans *(différents)* quelconques P_1 et P_2 passant par UV. Les équations (1) et (2) prises *ensemble* sont appelées les *équations de la droite UV*.

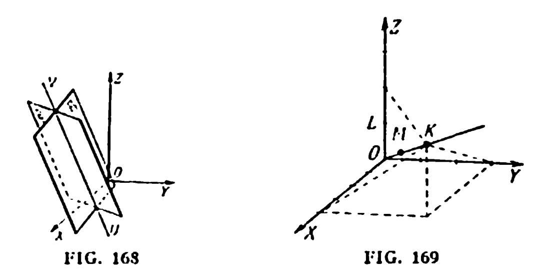


FIG. 168 FIG. 169

REMARQUE. L'expression « la droite UV peut être représentée par le système (1)-(2) » signifie que 1) les coordonnées x, y, z de tout point M de la droite UV vérifient les deux équations (1) et (2); 2) les coordonnées de tout point non situé sur UV ne vérifient pas simultanément les deux équations (1) et (2), bien qu'elles puissent vérifier l'une d'entre elles.

EXEMPLE 1. Ecrire les équations de la droite OK (fig. 169), passant par l'origine O et le point K (4, 3, 2).

SOLUTION. La droite OK est l'intersection des plans KOZ et KOX. Prenant sur l'axe OZ un point quelconque, par exemple L (0, 0, 1), nous formons l'équation du plan KOZ (passant par les trois points O, K, L; § 129). Nous obtenons:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{soit} \quad 3x - 4y = 0. \tag{3}$$

Nous trouvons de même l'équation

$$2y - 3z = 0 \tag{4}$$

pour le plan KOX. La droite OK est représentée par le système d'équations (3)-(4).

En effet, tout point M de la droite OK est situé dans le plan KOZ et dans le plan KOX; cela signifie que ses coordonnées vérifient simultanément les deux équations (3) et (4). D'autre part, un point N non situé sur OK ne peut appartenir simultanément aux plans KOZ et KOX; cela signifie que ses coordonnées ne peuvent vérifier simultanément les deux équations (3)-(4).

EXEMPLE 2. La droite OK de l'exemple 1 peut être représentée également par le système d'équations

$$\begin{cases} 3x - 4y = 0, & (3) \\ 2x - 4z = 0. & (5) \end{cases}$$

La première représente le plan KOZ, la seconde le plan KOY.

La même droite OK peut être représentée par le système

$$2y - 3z = 0, \quad 2x - 4z = 0.$$

Exemple 3. Vérifier si les points $M_1(2, 2, 3)$, $M_2(-4, -3, -3)$, $M_3(-8, -6, -4)$ sont situés sur la droite OK de l'exemple 1.

Les coordonnées du point M_1 ne vérifient ni l'équation (3), ni l'équation (4); le point M_1 n'est pas situé sur la droite UV. Les coordonnées du point M_2 vérifient l'équation (3), mais ne vérifient pas (4); le point M_2 est situé dans le plan KOZ, mais n'est pas situé dans le plan KOX; cela signifie que M_2 n'est pas situé sur OK. Le point M_3 est situé sur OK, car il vérifie les deux équations (3) et (4).

Exemple 4. L'équation $z = 0$ représente le plan XOY. L'équation $x + y - 1 = 0$ représente le plan P parallèle à l'axe OZ (§ 124, exemple). La droite d'intersection des plans XOY et P (KL sur la fig. 163) est représentée par le système

$$x + y - 1 = 0, \quad z = 0.$$

§ 141. Condition pour que deux équations du premier degré représentent une droite

Le système

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

représente une ligne droite si les coefficients A_1, B_1, C_1 ne sont pas proportionnels aux coefficients A_2, B_2, C_2 [dans ce cas les plans (1) et (2) ne sont pas parallèles (§ 125)].

Si les coefficients A_1, B_1, C_1 sont proportionnels aux coefficients A_2, B_2, C_2, mais les termes indépendants des coordonnées ne vérifient pas la même proportion

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 \neq D_2 : D_1,$$

le système n'est pas compatible et ne correspond à aucune image géométrique [les plans (1) et (2) sont parallèles et non confondus].

Si les quatre grandeurs A_1, B_1, C_1, D_1 sont proportionnelles aux grandeurs A_2, B_2, C_2, D_2 :

$$A_2 : A_1 = B_2 : B_1 = C_2 : C_1 = D_2 : D_1,$$

alors l'une des équations (1), (2) est la conséquence de l'autre et le système représente un plan [les plans (1) et (2) sont confondus].

Exemple 1. Le système

$$2x - 7y + 12z - 4 = 0, \quad 4x - 14y + 36z - 8 = 0$$

représente une droite (dans la seconde équation les coefficients A et B sont les doubles et le coefficient C le triple des coefficients correspondants de la première équation).

EXEMPLE 2. Le système

$$2x - 7y + 12z - 4 = 0, \quad 4x - 14y + 24z - 8 = 0$$

représente un plan (les quatre grandeurs A, B, C, D sont proportionnelles).

EXEMPLE 3. Le système

$$2x - 7y + 12z - 4 = 0, \quad 4x - 14y + 24z - 12 = 0$$

ne correspond à aucune image géométrique (les grandeurs A, B, C sont proportionnelles, mais D n'est pas soumise à cette proportion ; le système est incompatible).

§ 142. Intersection d'une droite et d'un plan

La droite L

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

et le plan P

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (3)$$

peuvent ne pas avoir de points communs (si L est parallèle à P), peuvent en avoir une infinité (si L est située dans P), ou un seul. Le problème se ramène (*) à rechercher les points communs des trois plans (1), (2), (3) (cf. § 134).

EXEMPLE 1. La droite

$$x + y + z - 1 = 0, \quad x - 2y - 3z - 5 = 0$$

n'a pas de points communs avec le plan

$$2x - y - 2z - 8 = 0$$

(elle est parallèle à ce plan) (cf. exemple 2 § 134).

EXEMPLE 2. La droite

$$x - 2y - 3z - 5 = 0, \quad 2x - y - 2z = 6$$

est située dans le plan $x + y + z = 1$ (cf. exemple 3 § 134).

EXEMPLE 3. La droite $x + y - z + 2 = 0$, $x - y + 2 = 0$ coupe le plan $x + 2y - 1 = 0$ au point $(-1, 1, 2)$ (cf. exemple 4 § 134).

(*) Les calculs sont simplifiés si les équations de la droite sont prises sous forme paramétrique (§ 152 et remarque du § 153).

EXEMPLE 4. Déterminer les coordonnées d'un point quelconque de la doite L:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z + 3 = 0, \\ 5x - y + z - 8 = 0. \end{cases}$$

Donnons à la coordonnée x une valeur quelconque, par exemple $x = 3$. Nous obtenons le système $-3y - z + 9 = 0$, $-y + z + 7 = 0$. En le résolvant nous trouvons: $y = 4$, $z = -3$. Le point $(3, 4, -3)$ est situé sur la droite L (à son intersection avec le plan $x=3$ parallèle à YOZ). De même en prenant $x = 0$, nous trouvons le point $\left(0, -\frac{5}{4}, \frac{27}{4}\right)$ qui est le point d'intersection de la droite L et du plan YOZ, etc. On peut également attribuer diverses valeurs à la coordonnée y ou z.

EXEMPLE 5. Déterminer les coordonnées d'un point quelconque de la droite L:

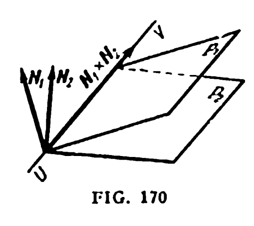
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 4 = 0, \\ 8x - 6y + 4z - 3 = 0. \end{cases}$$

A la différence de l'exemple précédent on ne peut ici donner une valeur arbitraire à la coordonnée x. En effet, pour $x = 0$, nous obtenons le système incompatible $-3y + 2z - 4 = 0$, $-6y + 4z - 3 = 0$. La droite L est parallèle au plan ZOY. La coordonnée y (ou z) peut prendre une valeur arbitraire, par exemple en posant $z = 0$, nous obtenons le point $\left(\frac{5}{2}, \frac{17}{6}, 0\right)$. On obtient toujours pour x la valeur $\frac{5}{2}$, car la droite L est située dans le plan $x = \frac{5}{2}$ parallèle à ZOY.

§ 143. Vecteur directeur

A. Tout vecteur (non nul) $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ situé sur la droite UV (ou parallèle à cette droite) est appelé *vecteur directeur* de cette droite. Les coordonnées l, m, n du vecteur directeur sont appelées *coefficients de direction* de la droite.

REMARQUE. En multipliant les coefficients de direction l, m, n par un même nombre k (non nul), nous obtenons les nombres lk, mk, nk, qui sont également des coefficients de direction (ce sont les coordonnées du vecteur $\mathbf{a}k$ colinéaire à $\mathbf{a}$).


FIG. 170

B. On peut choisir en tant que vecteur directeur de la droite UV

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

le produit vectoriel $\mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$, où $\mathbf{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ et $\mathbf{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ sont les vecteurs normaux aux plans P_1 et P_2 (fig. 170) représentés par les équations (1) et (2). En effet, la droite UV est perpendiculaire aux vecteurs normaux $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$.

EXEMPLE. Trouver les coefficients de direction de la droite

$$2x - 2y - z + 8 = 0, \qquad x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

SOLUTION. Nous avons $\mathbf{N}_1 = \{2, -2, -1\}$, $\mathbf{N}_2 = \{1, 2, -2\}$. Choisissons $\mathbf{a} = \mathbf{N}_1 \times \mathbf{N}_2$ pour vecteur directeur de la droite donnée. Nous trouvons:

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{6, 3, 6\}.$$

Les coefficients de direction sont $l = 6$, $m = 3$, $n = 6$.

REMARQUE. En multipliant ces nombres par $\frac{1}{3}$, nous trouvons les coefficients de direction $l' = 2$, $m' = 1$, $n' = 2$. On peut également prendre pour coefficients de direction les nombres -2, -1, -2, etc.

§ 144. Angles formés par une droite et les axes de coordonnées

Les angles α, β, γ formés par la droite L (par l'un de ses deux sens) et les axes de coordonnées sont déterminés à partir des relations

$$\cos\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}},$$

où l, m, n sont les coefficients de direction de la droite L.

Cela découle du § 101.

Les grandeurs $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sont appelées *cosinus directeurs* de la droite L.

Exemple. Trouver les angles formés par la droite

$$2x - 2y - z + 8 = 0, \qquad x + 2y - 2z + 1 = 0$$

et les axes de coordonnées.

Solution. On peut prendre comme coefficients de direction de cette droite (§ 143, exemple) les nombres $l = 2$, $m = 1$, $n = 2$. Donc,

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}, \; \cos\beta = \frac{1}{3}, \; \cos\gamma = \frac{2}{3}; \text{ d'où } \alpha \approx 48°11',$$

$\beta \approx 70°32'$, $\gamma = 48°11'$.

§ 145. Angle de deux droites

L'angle φ de deux droites L et L' (plus exactement l'un des deux angles qu'elles forment) est déterminé par la formule

$$\cos\varphi = \frac{ll' + mm' + nn'}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\;\sqrt{l'^2 + m'^2 + n'^2}}, \tag{1}$$

où l, m, n, l', m', n' sont les coefficients de direction des droites L et L', ou par la formule

$$\cos\varphi = \cos\alpha \quad \cos\alpha' + \cos\beta \quad \cos\beta' + \cos\gamma \quad \cos\gamma'. \tag{2}$$

Cela découle du § 109.

Exemple. Trouver l'angle de deux droites

$$\begin{cases} 2x - 2y - z + 8 = 0, \\ x + 2y - 2z + 1 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x + y + 3z - 21 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 15 = 0. \end{cases}$$

Solution. Les coefficients de direction de la première droite (§ 143, exemple) sont $l = 2$, $m = 1$, $n = 2$. Si l'on prend pour vecteur directeur de la seconde droite le produit vectoriel $\{4, 1, 3\} \times \{2, 2, -3\}$, ses coefficients de direction sont -9, 18, 6. Multiplions-les (pour avoir affaire à des nombres plus petits) par $\frac{1}{3}$ (§ 143, remarque), nous obtenons $l = -3$, $m = 6$, $n = 2$. Nous avons ainsi:

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot (-3) + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 2^2}} = \frac{4}{21},$$

d'où $\varphi \approx 79°01'$.

§ 146. Angle d'une droite et d'un plan

L'angle ψ formé par la droite L (de coefficients de direction l, m, n) et le plan $Ax + By + Cz + D = 0$ est donné par la formule

$$\sin\psi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Cela découle du § 145 (si φ est l'angle formé par la droite L et le vecteur normal $\{A, B, C\}$, alors $\varphi = 90° \pm \psi$).

Exemple. Trouver l'angle formé par la droite

$$3x - 2y = 24, \qquad 3x - z = -4$$

et le plan $6x + 15y - 10z + 31 = 0$. Nous avons $l = 2$, $m = 3$, $n = 6$ (§ 143). Nous trouvons:

$$\sin\varphi = \frac{|6\cdot 2 + 15\cdot 3 + (-10)\cdot 6|}{\sqrt{6^2 + 15^2 + (-10)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = \frac{3}{133},$$

d'où $\varphi \approx 1°18'$.

§ 147. Conditions de parallélisme et d'orthogonalité d'une droite et d'un plan

La condition de parallélisme d'une droite de coefficients de direction l, m, n *et du plan* $Ax + By + Cz + D = 0$ est

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{1}$$

Elle exprime le fait que la droite est *perpendiculaire* au vecteur normal $\{A, B, C\}$.

La condition d'orthogonalité d'une droite et d'un plan (les notations sont les mêmes) est

$$\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}. \tag{2}$$

Elle exprime le *parallélisme* de la droite et du vecteur normal.

§ 148. Faisceau de plans (*)

L'ensemble de tous les plans passant par une même droite UV est appelé *faisceau de plans*. La droite UV est appelée l'*axe* du faisceau.

(*) Cf. § 24.

Si l'on connaît les équations de deux plans distincts P_1 et P_2

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{2}$$

appartenant au faisceau (c'est-à-dire les équations de l'axe du faisceau; cf. § 140), on peut alors donner chaque plan du faisceau par une équation de la forme

$$m_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{3}$$

Inversement, l'équation (3) représente, pour des valeurs arbitraires de m_1 et m_2 (non simultanément nulles), un plan appartenant au faisceau dont l'axe est UV (*). En particulier, pour $m_1 = 0$ nous obtenons le plan P_2 et pour $m_2 = 0$ le plan P_1. L'équation (3) est appelée *équation du faisceau de plans* (**).

Quand $m_1 \neq 0$, nous pouvons diviser l'équation (3) par m_1. Introduisant la notation $m_2 : m_1 = \lambda$, nous obtenons l'équation

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{4}$$

On ne donne ici toutes les valeurs possibles qu'à la lettre λ; toutefois on ne peut obtenir de (4) l'équation du plan P_2.

EXEMPLE 1. Soient données les équations

$$5x - 3y = 0, \tag{5}$$

$$3z - 4x = 0 \tag{6}$$

de deux plans du faisceau, c'est-à-dire les équations de l'axe du faisceau. L'équation du faisceau est

$$m_1(5x - 3y) + m_2\,(3z - 4x) = 0. \tag{7}$$

Par exemple, en prenant $m_1 = 2$, $m_2 = -3$ nous avons:

$$2(5x - 3y) + (-3)\,(3z - 4x) = 0. \tag{8}$$

L'équation (8) ou, ce qui revient au même,

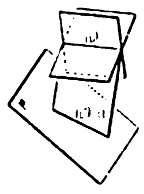
$$22x - 6y - 9z = 0 \tag{8a}$$

est celle de l'un des plans du faisceau.

EXPLICATION. Prenons sur la droite UV un point arbitraire $M(x, y, z)$. Ses coordonnées x, y, z vérifient les équations (5) et (6) et, par conséquent, l'équation (8). Cela signifie que le plan (8) passe par tout point M de la droite UV, autrement dit il appartient au faisceau.

(*) Cf. plus bas l'explication de l'exemple 1.

(**) Si les plans P_1 et P_2 sont parallèles (mais non confondus), l'équation (3) représente, pour toutes les valeurs possibles de m_1 et m_2, tous les plans parallèles aux deux plans donnés (*faisceau de plans parallèles*).


FIG. 171

EXEMPLE 2. Trouver l'équation du plan passant par la droite UV de l'exemple 1 et par le point (1, 0, 0).

SOLUTION. Le plan cherché est représenté par une équation de la forme (7). Cette dernière doit être vérifiée pour $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$. Portant ces valeurs dans (7) nous trouvons $5m_1 - 4m_2 = 0$, autrement dit $m_1 : m_2 = 4 : 5$. Nous obtenons l'équation

$$4(5x - 3y) + 5(3z - 4x) = 0,$$

c'est-à-dire

$$5z - 4y = 0.$$

EXEMPLE 3. Trouver l'équation de la projection de la droite L:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + 3y + 4z + 5 = 0, \\ x - 6y + 3z - 7 = 0 \end{array}\right\} \qquad (9)$$

sur le plan P

$$2x + 2y + z + 15 = 0. \qquad (10)$$

SOLUTION. La projection cherchée L' (fig. 171) est la droite d'intersection du plan P et du plan Q (mené par L perpendiculairement à P). Le plan Q appartient au faisceau d'axe L et est représenté par une équation de la forme

$$(2x + 3y + 4z + 5) + \lambda(x - 6y + 3z - 7) = 0. \qquad (11)$$

Pour trouver λ, mettons (11) sous la forme

$$(2 + \lambda)\, x + (3 - 6\lambda)\, y + (4 + 3\lambda)\, z + 5 - 7\lambda = 0 \qquad (11a)$$

et écrivons la condition d'orthogonalité des plans (10) et (11a):

$$2(2 + \lambda) + 2(3 - 6\lambda) + 1 \cdot (4 + 3\lambda) = 0.$$

Nous en tirons $\lambda = 2$. Portant dans (11a) nous obtenons l'équation du plan Q. La projection cherchée est ainsi donnée par le système d'équations

$$\begin{cases} 4x - 9y + 10z - 9 = 0, \\ 2x + 2y + z + 15 = 0. \end{cases}$$

§ 149. Projections d'une droite sur les plans de coordonnées

Soient

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & (1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

les équations d'une droite, où C_1 et C_2 ne sont pas simultanément nuls (on considère le cas $C_1 = C_2 = 0$ dans l'exemple 3). Pour trouver la

projection de la droite sur le plan XOY, il suffit d'éliminer z entre les équations (1)-(2). L'équation obtenue (avec l'équation $z = 0$) représente la projection cherchée [*]. On trouve de manière analogue les projections sur les plans YOZ et ZOX.

EXEMPLE 1. Trouver la projection de la droite L

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z - 12 = 0, & (3) \\ x - 2y + 4z - 10 = 0 & (4) \end{cases}$$

sur le plan XOY.

SOLUTION. Pour éliminer z, multiplions la première équation par 4, la seconde par 3 et additionnons. Nous obtenons:

$$4(2x + 4y - 3z - 12) + 3(x - 2y + 4z - 10) = 0, \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$11x + 10y - 78 = 0. \tag{6}$$

Cette équation représente avec l'équation

$$z = 0 \tag{7}$$

la projection L' de la droite L sur le plan XOY.

EXPLICATION. Le plan (5) passe par la droite L (§ 148). D'autre part, comme il apparaît de (6) (qui ne contient pas z), ce plan (§ 124, 2) est perpendiculaire au plan XOY. Cela signifie que la droite d'intersection du plan (6) et du plan (7) est la projection de la droite L sur le plan (7) (cf. § 148, exemple 3).

EXEMPLE 2. La projection de la droite L

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z - 12 = 0, & (8) \\ 2x - 5y - 4 \quad = 0 & (9) \end{cases}$$

sur le plan $z = 0$ est représentée (dans le système plan de coordonnées XOY) par l'équation (9). Il n'est pas nécessaire d'éliminer la coordonnée z, puisqu'elle est absente dans l'équation (9). Le plan (9) est perpendiculaire au plan XOY; il projette la droite L sur XOY.

EXEMPLE 3. Trouver les projections de la droite L

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0, & (10) \\ x + y - 4 = 0 & (11) \end{cases}$$

sur les plans de coordonnées.

SOLUTION. Dans les deux équations la coordonnée z est absente, de sorte que les deux plans P_1 et P_2 (fig. 172) sont perpendiculaires au plan XOY. La droite L est per-

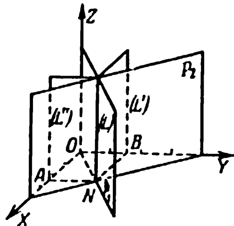


FIG. 172

[*] Cf. plus bas l'explication de l'exemple 1.

pendiculaire à XOY et est projetée sur le plan XOY au point N de coordonnée $z_N = 0$. Nous trouvons du système (10)-(11)

$$x_N = \frac{12}{5}, \quad y_N = \frac{8}{5}.$$

On peut trouver l'équation de la projection L' sur le plan YOZ par le procédé général en éliminant x entre (10) et (11). On obtient alors $y = \frac{8}{5}$, c'est-à-dire la même égalité que l'on a trouvée pour y_N (on voit de la figure que la droite L' est éloignée de OZ à une distance OB égale à $y_N = AN$). L'équation de la projection L'' sur le plan XOZ est $x = \frac{12}{5}$.

§ 150. Equations canoniques d'une droite

La droite L passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et dont le vecteur directeur est $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ (§ 143) est représentée par les équations

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{1}$$

exprimant le fait que $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ et $\overrightarrow{M_0M}\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$ sont colinéaires (fig. 173). Elles sont appelées *équations canoniques* (ou *symétriques*) de la droite.

REMARQUE 1. Comme on peut prendre pour point M_0 tout point de la droite L et que l'on peut remplacer le vecteur directeur $\mathbf{a}$ par le vecteur directeur $k\mathbf{a}$ (§ 143), on peut donner séparément à chacune des grandeurs x_0, y_0, z_0, l, m, n une valeur arbitraire.

EXEMPLE 1. Ecrire les équations canoniques de la droite passant par les points A (5, — 3, 2) et B (3, 1, — 2). On peut prendre pour M_0 le point A et pour $\mathbf{a}$ le vecteur $\overrightarrow{AB} = \{-2, 4, -4\}$. Les équations canoniques sont:

$$\frac{x - 5}{-2} = \frac{y + 3}{4} = \frac{z - 2}{-4}. \tag{2}$$

Si l'on prend pour M_0 le point B et pour $\mathbf{a}$ le vecteur $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \{1, -2, 2\}$, les équations canoniques sont:

$$\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 1}{-2} = \frac{z + 2}{2}. \tag{3}$$

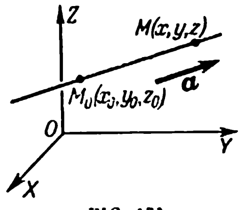


FIG. 173

REMARQUE 2. Parmi les trois équations

$$\frac{x-5}{-2}=\frac{y+3}{4},\quad \frac{x-5}{-2}=\frac{z-2}{-4},\quad \frac{y+3}{4}=\frac{z-2}{-4},\tag{4}$$

contenues dans (2), *seules deux* (arbitrairement choisies) sont indépendantes et la troisième découle de ces deux-là ; par exemple, en retranchant de la première équation la seconde nous trouvons la troisième. Chacune des équations (4) représente un plan passant par la droite AB et perpendiculaire à l'un des plans de coordonnées; en même temps elle représente la projection de la droite AB sur le plan de coordonnées correspondant (§ 149).

EXEMPLE 2. Les équations canoniques de la droite passant par les points $M_0(5, 0, 1)$, $M_1(5, 6, 5)$ sont:

$$\frac{x-5}{0}=\frac{y-0}{6}=\frac{z-1}{4}.\tag{5}$$

L'expression $\frac{x-5}{0}$ est conventionnelle ; elle signifie (§ 102, remarque) que $x-5=0$, de sorte que l'on peut remplacer (5) par le système

$$x=5,\quad \frac{y}{6}=\frac{z-1}{4}.\tag{6}$$

La droite M_0M_1 est perpendiculaire à l'axe OX (car $l=0$).

EXEMPLE 3. Les équations canoniques de la droite passant par les points A (2, 4, 3) et B (2, 4, 5) sont:

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-4}{0}=\frac{z-3}{2}.$$

Cette écriture signifie que $x=2$ et $y=4$.

La grandeur z prend diverses valeurs (arbitraires) pour les différents points de la droite AB. La droite AB est parallèle à l'axe OZ (puisque $l=m=0$).

§ 151. Reduction des équations d'une droite à la forme canonique

Pour réduire les équations de la droite

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\tag{1}$$

$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\tag{2}$$

à la forme canonique (§ 150), il faut déterminer les coordonnées x_0, y_0, z_0 d'un point quelconque situé sur cette droite (exemples 4 et 5 § 142) et les coefficients de direction l, m, n (§ 143).

EXEMPLE 1. Réduire les équations de la droite

$$2x-3y-z+3=0,\qquad 5x-y+z-8=0$$

à la forme canonique.

SOLUTION. Nous trouvons de même qu'au § 142 (exemple 4) un point $M_0(3, 4, -3)$ sur la droite donnée, $x_0 = 3$, $y_0 = 4$, $z_0 = -3$. En calculant les coefficients de direction

$$l = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4, \qquad m = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7, \qquad n = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 13,$$

nous obtenons les équations canoniques

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-4}{-7} = \frac{z+3}{13}.$$

EXEMPLE 2. Réduire les équations

$$x + 2y - 3z - 2 = 0, \qquad -3x + 4y - 6z + 21 = 0$$

à la forme canonique.

Donnons à la coordonnée y ou z une valeur arbitraire (on ne peut donner une valeur arbitraire à la coordonnée x; cf. § 142, exemple 5); posons, par exemple, $y = 0$. Nous obtenons le point $M_0(5, 0, 1)$. Les coefficients de direction sont $l = 0$, $m = 15$, $n = 10$ ou $\left(\text{en multipliant par } \frac{1}{5}\right)$ $l = 0$, $m = 3$, $n = 2$. Nous obtenons les équations canoniques

$$\frac{x-5}{0} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{2}$$

(cf. § 150, exemple 2).

EXEMPLE 3. Idem pour la droite

$$x + y - 6 = 0, \qquad x - y + 2 = 0. \tag{3}$$

Les valeurs x_0 et y_0 sont entièrement déterminées par les équations (3): $x_0 = 2$, $y_0 = 4$. On peut donner à la coordonnée z_0 une valeur arbitraire, par exemple $z_0 = 3$. Nous trouvons ensuite les coefficients de direction $l = 0$, $m = 0$, $n = 2$. Nous obtenons les équations canoniques (cf. § 150, exemple 3):

$$\frac{x-2}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-3}{2}.$$

§ 152. Equations paramétriques d'une droite

Chacun des rapports $\frac{x-x_0}{l}$, $\frac{y-y_0}{m}$, $\frac{z-z_0}{n}$ (§ 150) est égal au quotient (§ 90) du vecteur

$$\overrightarrow{M_0M}\{x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0\}$$

par le vecteur (colinéaire) $\mathbf{a}\{l, m, n\}$. Désignons ce quotient par t. Nous avons alors

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt, \\ y &= y_0 + mt, \\ z &= z_0 + nt. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ces équations sont appelées *équations paramétriques de la droite*; quand la grandeur t (le *paramètre*) prend diverses valeurs, le point $M(x, y, z)$ se déplace sur la droite. Lorsque $t = 0$, il coïncide avec M_0; aux valeurs positives et négatives de t correspondent des points situés de part et d'autre de M_0 sur la droite.

Sous forme vectorielle les trois équations (1) sont remplacées par une seule:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \quad (2)$$

§ 153. Intersection d'un plan et d'une droite donnée sous forme paramétrique

On détermine le point commun (s'il existe) du plan P

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

et de la droite L

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt \quad (2)$$

à l'aide des formules (2) en y portant la valeur de t définie à l'aide de l'équation (*)

$$(Al + Bm + Cn)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

Cette équation s'obtient en portant les expressions (2) dans (1).

Exemple 1. Trouver le point d'intersection du plan

$$2x + 3y + 3z - 8 = 0$$

et de la droite

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{2}.$$

Solution. Les équations paramétriques de la droite sont:

$$x = -5 + 3t, \quad y = 3 - t, \quad z = -3 + 2t. \quad (4)$$

En y portant $2x + 3y + 3z - 8 = 0$, nous obtenons $9t - 18 = 0$, d'où $t = 2$. Portant cette valeur de t dans (4), nous obtenons $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$. Le point cherché est $(1, 1, 1)$.

(*) L'équation (3) peut, dans des cas exceptionnels, ne pas avoir de solution (cf. plus bas exemple 2) ou en avoir une infinité (cf. plus bas exemple 3).

EXEMPLE 2. Trouver le point d'intersection du plan $3x + y - 4z - 7 = 0$ et de la droite de l'exemple 1.

SOLUTION. Nous obtenons de la même manière $0 \cdot t - 7 = 0$; cette équation n'a pas de solution. Il n'y a pas de point d'intersection (la droite est parallèle au plan).

EXEMPLE 3. Trouver le point d'intersection du plan $3x + y - 4z = 0$ et de la droite de l'exemple 1.

SOLUTION. Nous obtenons de même $0 \cdot t + 0 = 0$; cette équation possède une infinité de solutions (la droite est située dans le plan).

REMARQUE. En utilisant les équations paramétriques (4), nous avons introduit une quatrième inconnue t et nous avons obtenu quatre équations (au lieu de trois équations données). En revanche le système se résout plus facilement.

§ 154. Equations d'une droite passant par deux points donnés

La droite passant par les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$ est représentée par les équations

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (1)$$

Les exemples sont donnés au § 150.

§ 155. Equation d'un plan passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée

Le vecteur normal au plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire à la droite

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

est $\{l_1, m_1, n_1\}$; l'équation de ce plan est donc

$$l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) = 0$$

ou, sous forme vectorielle,

$$\mathbf{a}_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0.$$

EXEMPLE. Le plan passant par le point $(-1, -5, 8)$ et perpendiculaire à la droite $\frac{x}{0} = \frac{y}{2} = \frac{z - 3}{5}$ est représenté par l'équation $2(y + 5) + 5(z - 8) = 0$, c'est-à-dire

$$2y + 5z - 30 = 0.$$

§ 156. Equation d'une droite passant par un point donné et perpendiculaire à un plan donné

La droite passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et perpendiculaire au plan $Ax + By + Cz + D = 0$ possède le vecteur directeur $\{A, B, C\}$ et, par conséquent, est représentée (§ 150) par les équations canoniques

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}. \qquad (1)$$

EXEMPLE. La droite passant par l'origine des coordonnées et perpendiculaire au plan $3x + 5z - 5 = 0$ est représentée par les équations canoniques $\frac{x}{3} = \frac{y}{0} = \frac{z}{5}$ ou par les équations paramétriques (§ 152) $x = 3t$, $y = 0$, $z = 5t$.

§ 157. Equation d'un plan passant par un point donné et une droite donnée

Le plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et la droite L

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} \qquad (1)$$

ne passant pas par le point M_0 est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \qquad (2)$$

ou, sous forme vectorielle,

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \mathbf{a}] = 0. \qquad (2a)$$

L'équation (2) ou (2a) exprime le fait que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\overrightarrow{M_0M_1}$ et $\mathbf{a}\{l, m, n\}$ sont coplanaires (fig. 174).

EXEMPLE. Le plan passant par le point $M_0(5, 2, 3)$ et la droite

$$\frac{x + 1}{2} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 5}{3}$$

est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - 5 & y - 2 & z - 3 \\ -6 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

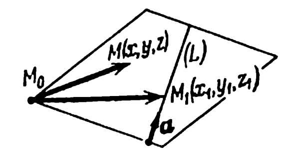


FIG. 174

c'est-à-dire

$$x - 2y - 1 = 0.$$

REMARQUE. Si la droite (1) passe par le point M_0, l'équation (2) devient une identité et le problème possède une infinité de solutions (nous obtenons un faisceau de plans d'axe L; § 148).

§ 158. Equation d'un plan passant par un point donné et parallèle à deux droites données

Le plan passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et parallèle à deux droites données (non parallèles) L_1 et L_2 (ou aux vecteurs $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$) est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

où l_1, m_1, n_1 et l_2, m_2, n_2 sont les coefficients de direction de ces deux droites (ou les coordonnées des vecteurs donnés). Sous forme vectorielle, on a

$$[(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 0. \qquad (1a)$$

L'équation (1) ou (1a) exprime le fait que les vecteurs $\overrightarrow{M_0M}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ (M est un point arbitraire du plan cherché) sont coplanaires.

REMARQUE. Si les droites L_1 et L_2 sont parallèles, c'est-à-dire si $\mathbf{a}_1$ et $\mathbf{a}_2$ sont colinéaires, l'équation (1) devient une identité et le problème possède une infinité de solutions (nous obtenons un faisceau de plans dont l'axe passe par le point M_0 parallèlement aux droites données).

§ 159. Equation d'un plan passant par une droite donnée et parallèle à une autre droite donnée

Soient L_1 et L_2 deux droites non parallèles et non concourantes. Le plan passant par la droite L_1 et parallèle à la droite L_2 est donné par l'équation

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad (1)$$

où x_1, y_1, z_1 sont les coordonnées d'un point arbitraire M_1 de la droite L_1. Nous avons ici le cas particulier du § 158 (le rôle du point M_0 est joué par le point M_1). La remarque faite au § 158 reste en vigueur.

§ 160. Equation d'un plan passant par une droite donnée et perpendiculaire à un plan donné

Le plan P passant par la droite donnée L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

et perpendiculaire au plan donné Q

$$Ax+By+Cz+D=0 \tag{2}$$

(non perpendiculaire à L_1) est représenté par l'équation

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \tag{3}$$

ou, sous forme vectorielle,

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1),\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{N}]=0. \tag{3a}$$

Explication. Le plan P passe par la droite L_1 et est parallèle à la normale $N\{A,\ B,\ C\}$ du plan Q (cf. § 159).

Remarque. Si le plan (2) est perpendiculaire à la droite (1), l'équation (3) devient une identité et le problème admet une infinité de solutions (cf. § 158, remarque).

Projection d'une droite sur un plan arbitraire. Le plan (3) projette la droite L_1 sur le plan Q. Donc, la droite L', qui est la projection de la droite L_1 sur le plan Q, est représentée par le système d'équations (2)-(3) (cf. § 149).

§ 161. Equations d'une perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite donnée

La perpendiculaire abaissée du point $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ sur la droite L_1

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{1}$$

(ne passant pas par le point M_0) est représentée par les équations

$$\begin{cases} l_1(x-x_0)+m_1(y-y_0)+n_1(z-z_0)=0, & (2) \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}=0 & (3) \end{cases}$$

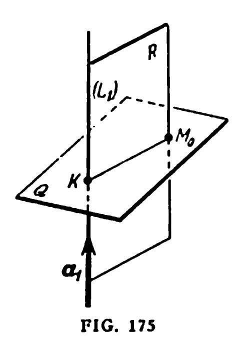


FIG. 175

ou, sous forme vectorielle,

$$\begin{cases} \mathbf{a}_1(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) = 0, & (2a) \\ [(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0),\ (\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0),\ \mathbf{a}_1] = 0. & (3a) \end{cases}$$

L'équation (2) prise séparément représente le plan Q (fig. 175) passant par M_0 perpendiculairement à L_1 (§ 155) et l'équation (3) prise séparément le plan R passant par le point M_0 et la droite L_1 (§ 157).

REMARQUE. Si la droite L_1 passe par le point M_0, l'équation (3) devient (§ 120) une identité (par un point pris sur la droite L_1 on peut mener une infinité de perpendiculaires à L).

EXEMPLE. Trouver l'équation de la perpendiculaire abaissée du point (1, 0, 1) sur la droite

$$x = 3z + 2, \qquad y = 2z. \tag{1a}$$

Trouver également le pied de cette perpendiculaire.

SOLUTION. On peut écrire les équations (1a) sous forme canonique (§ 151) de la manière suivante:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}. \tag{1b}$$

La perpendiculaire cherchée est représentée par les équations

$$\begin{cases} 3(x-1) + 2(y-0) + 1(z-1) = 0, & (2b) \\ \begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 2-1 & 0 & 0-1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 & (3b) \end{cases}$$

ou, après simplifications,

$$3x + 2y + z - 4 = 0, \tag{2c}$$

$$x - 2y + z - 2 = 0. \tag{3c}$$

Nous trouvons les coordonnées du pied K de la perpendiculaire en résolvant le système de trois équations (1b), (2c). L'équation (3c) doit alors être vérifiée. Nous obtenons $K\left(\frac{11}{7},\ -\frac{2}{7},\ -\frac{1}{7}\right)$.

REMARQUE. Le système de trois équations (1b), (3c) possède une infinité de solutions (car le plan R passe par la droite L_1, mais ne la coupe pas).

§ 162. Longueur d'une perpendiculaire abaissée d'un point donné sur une droite donnée

Étant donnés le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et la droite L_1 représentée par l'équation (1) § 161, on demande de trouver la distance du point M_0 à la droite L_1, c'est-à-dire la longueur de la perpendiculaire M_0K (fig. 175) abaissée du point M_0 sur la droite L_1.

On peut trouver le pied K de la perpendiculaire (§ 161, exemple), puis la longueur du segment M_0K, mais il est plus simple d'utiliser la formule (avec les notations du § 161)

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}}, \quad (1)$$

c'est-à-dire sous forme vectorielle

$$d = \frac{\sqrt{[(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a}_1]^2}}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2}}. \quad (1a)$$

Le numérateur de l'expression (1a) est (§ 111) l'aire du parallélogramme M_1M_0BA (fig. 176, où $M_1A = \mathbf{a}_1$) et le dénominateur la longueur de M_1A. Par conséquent, la fraction est égale à la hauteur M_0K du parallélogramme.

EXEMPLE. Trouver la longueur de la perpendiculaire abaissée du point $M_0(1, 0, 1)$ sur la droite $x = 3z + 2$, $y = 2z$.

SOLUTION. Dans l'exemple du § 161 nous avons trouvé

$$K\left(\frac{11}{7}, \ -\frac{2}{7}, \ -\frac{1}{7}\right).$$

Cela signifie que

$$d = |M_0K| = \sqrt{\left(\frac{11}{7} - 1\right)^2 + \left(-\frac{2}{7}\right)^2 + \left(-\frac{1}{7} - 1\right)^2} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Appliquons maintenant la formule (1). En vertu de (1b) § 161 nous avons $x_1 = 2$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, $l_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, de sorte que

$$\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ m_1 & n_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$\begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ n_1 & l_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ l_1 & m_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

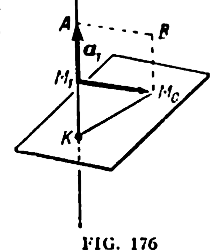


FIG. 176

Nous obtenons:

$$d = \frac{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = 2\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

§ 163. Condition d'intersection et de coplanarité de deux droites

Si les droites

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}, \qquad (1)$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2} \qquad (2)$$

sont coplanaires, on a

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

ou, sous forme vectorielle,

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1),\ \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = 0. \qquad (3a)$$

Inversement, si la condition (3) est vérifiée, les droites sont coplanaires.

Explication. Si les droites (1) et (2) sont situées dans un même plan, la droite M_1M_2 est aussi située dans ce plan (fig. 177), autrement dit les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ sont coplanaires (et inversement). C'est ce qu'exprime l'équation (3) (cf. § 120).

Remarque. Si $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$ [dans ce cas (3) est nécessairement vérifiée], les droites sont parallèles. Dans le cas contraire, les droites vérifiant la condition (3) se coupent.

Exemple. Déterminer si les droites

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}, \qquad (1)$$

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4} \qquad (2)$$

se coupent, et si oui en quel point.

FIG. 177

Solution. Les droites (1) et (2) sont coplanaires, car le déterminant (3) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

s'annule. Ces droites ne sont pas parallèles (les coefficients de direction ne sont pas proportionnels). Pour trouver le point d'intersection on doit résoudre le système de quatre équations (1), (2) portant sur trois inconnues. En règle générale, un système de ce genre n'a pas de solutions, mais dans le cas considéré [vu que la condition (3) est vérifiée] la solution existe. Résolvant le système formé par trois quelconques des quatre équations nous obtenons $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. La quatrième équation est alors vérifiée. Le point d'intersection est (1, 2, 3).

§ 164. Equations d'une perpendiculaire commune à deux droites données

La droite UV coupant deux droites non parallèles et non concourantes (L_1 et L_2 sur la fig. 178)

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

et perpendiculaire à ces droites est représentée (sous forme vectorielle) par les équations

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1),\ \mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}]=0, \qquad (1)$$

$$[(\mathbf{r}-\mathbf{r}_2),\ \mathbf{a}_2,\ \mathbf{a}]=0, \qquad (2)$$

où

$$\mathbf{a}_1=\{l_1, m_1, n_1\}, \quad \mathbf{a}_2=\{l_2, m_2, n_2\} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2.$$

Prise séparément l'équation (1) représente le plan P_1, mené par la droite L_1 parallèlement au vecteur $\mathbf{a}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$ (§ 159). De même, (2) représente le plan P_2 mené par L_2 parallèlement à $\mathbf{a}$.

Le point K_1 en lequel UV coupe L_1 est le point d'intersection de L_1 et du plan P_2. On trouve de manière analogue le point K_2, ce qui permet de trouver la longueur de la perpendiculaire K_1K_2.

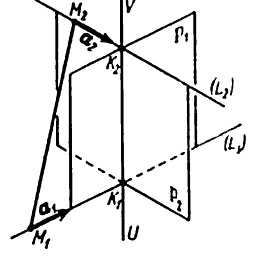


FIG. 178

REMARQUE. Dans le cas où L_1 et L_2 sont parallèles [alors $\mathbf{a}=0$ et les équations (1) et (2) deviennent des identités] il existe une infinité de droites UV. Pour obtenir l'équation de l'une d'entre elles nous pre-

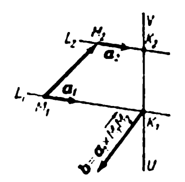


FIG. 179

nons sur L_1 (fig. 179) un point arbitraire K_1 et nous formons l'équation de la droite passant par K_1 dans la direction du vecteur $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}$, où $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$.

EXEMPLE 1. Trouver l'équation de la perpendiculaire commune aux droites

$$x = 2 + 2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = -1 - t, \tag{3}$$

$$x = -31 + 3t', \quad y = 6 + 2t', \quad z = 3 + 6t'. \tag{4}$$

SOLUTION. Nous avons $\mathbf{a}_1 = \{2, 4, -1\}$, $\mathbf{a}_2 = \{3, 2, 6\}$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \{26, -15, -8\}$.

La perpendiculaire cherchée est donnée par les équations

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} x+31 & y-6 & z-3 \\ 3 & 2 & 6 \\ 26 & -15 & -8 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, après simplifications,

$$\begin{cases} 47x + 10y + 134z + 30 = 0, & (5) \\ 74x + 180y - 97z + 1505 = 0. & (6) \end{cases}$$

Nous trouvons le point K_1, en lequel la perpendiculaire commune coupe la droite (3), à partir du système (3)-(6). Nous obtenons $K_1\,(-2, -7, 1)$. Nous avons de même $K_2\,(-28, 8, 9)$. La longueur d de la perpendiculaire commune est par conséquent égale à

$$d = \sqrt{(-2 + 28)^2 + (-7 - 8)^2 + (1 - 9)^2} = \sqrt{965}.$$

EXEMPLE 2. Trouver les équations de la perpendiculaire commune aux droites

$$x = 2 + 2t, \qquad y = 3 + 2t, \qquad z = t, \tag{7}$$

$$x = 5 + 2t', \qquad y = 4 + 2t', \qquad z = 1 + t'. \tag{8}$$

Les droites sont parallèles: $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \{2, 2, 1\}$, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \{3, 1, 1\}$, $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \{1, 1, -4\}$. Le vecteur directeur de la perpendiculaire commune est $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b} = \{-9, 9, 0\}$ ou, en multipliant par $\frac{1}{9}$, $\{-1, 1, 0\}$. Prenons pour point initial un point arbitraire $K_1(2 + 2t,\ 3 + 2t,\ t)$ de la droite (7). Nous obtenons l'équation de la perpendiculaire commune

$$\frac{x - (2 + 2t)}{-1} = \frac{y - (3 + 2t)}{1} = \frac{z - t}{0}, \tag{9}$$

où t est un nombre arbitraire. Pour trouver le point K_2, point d'intersection de la perpendiculaire commune (9) et de la droite (8), il faut porter les expressions (8) dans l'équation (9). Nous obtenons:

$$\frac{3+2(t'-t)}{-1}=\frac{1+2(t'-t)}{1}=\frac{1+(t'-t)}{0}.$$

Chacune de ces équations donne $t'=t-1$; en portant cette valeur dans (8), nous trouvons $K_2(3+2t, 2+2t, t)$, de sorte que

$$d=|K_1K_2|=\sqrt{[(3+2t)-(2+2t)]^2+[(2+2t)-(3+2t)]^2+[t-t]^2}=\sqrt{2}.$$

§ 165. La plus courte distance de deux droites

La plus courte distance entre les droites L_1 et L_2 est la longueur d de leur perpendiculaire commune. On peut la trouver en formant les équations de la perpendiculaire commune (§ 164, exemples 1 et 2). Or, il est plus simple de trouver d directement.

1) Si les droites L_1 et L_2 sont non parallèles et non concourantes (fig. 180), alors

$$d=\frac{|[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}{|\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2|}=\frac{|[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}{\sqrt{(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)^2}} \tag{1}$$

($\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ sont les rayons vecteurs des points M_1, M_2; $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ sont les vecteurs directeurs des droites L_1, L_2).

Le numérateur de la fraction (1) est (§ 121) le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Le dénominateur est égal à l'aire de sa base (§ 111). Par conséquent, la fraction est égale à sa hauteur $K_1K_2=d$.

Pour des droites concourantes (les vecteurs $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ sont coplanaires) la formule (1) donne $d=0$. Pour des droites parallèles (les vecteurs $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ sont colinéaires) elle n'est pas applicable $\left(\text{elle se ramène à l'indétermination } \frac{0}{0}\right)$.

2) Si les droites L_1, L_2 sont parallèles (fig. 181), alors on a

$$d=\frac{|(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1|}{|\mathbf{a}_1|}=\frac{\sqrt{[(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}_1]^2}}{\sqrt{\mathbf{a}_1^2}} \tag{2}$$

(on peut prendre $\mathbf{a}_2$ au lieu de $\mathbf{a}_1$).

Le numérateur de la fraction (2) est égal à l'aire du parallélogramme M_1M_2DC, le dénominateur à la longueur de la base M_1C. La fraction est donc égale à la hauteur $K_1K_2=d$.

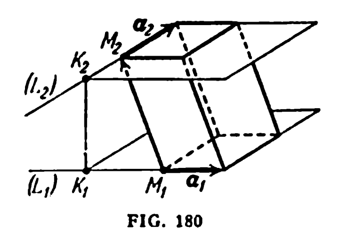


FIG. 180

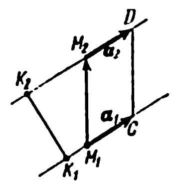


FIG. 181

EXEMPLE 1. Trouver la plus courte distance entre les droites de l'exemple 1 § 164 $[\mathbf{r}_1 = \{2, 1, -1\}, \mathbf{r}_2 = \{-31, 6, 3\}, \mathbf{a}_1 = \{2, 4, -1\}, \mathbf{a}_2 = \{3, 2, 6\}]$.

SOLUTION. Les droites données ne sont pas parallèles. Nous avons:

$$\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right\} = \{26, -15, -8\}$$

$$[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = -33 \cdot 26 + 5 \cdot (-15) + 4 \cdot (-8) = -965.$$

On obtient alors de la formule (1):

$$d = \frac{965}{\sqrt{26^2 + (-15)^2 + (-8)^2}} = \frac{965}{\sqrt{965}} = \sqrt{965}.$$

EXEMPLE 2. Trouver la plus courte distance entre les droites de l'exemple 2 § 164 $[\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \{2, 2, 1\}, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \{3, 1, 1\}]$.

SOLUTION. Les droites sont parallèles; la formule (2) donne:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1}} = \sqrt{2}.$$

REMARQUE. On peut affecter la plus courte distance entre deux droites (si elles ne sont ni orthogonales ni parallèles) d'un signe (cf. § 165a).

§ 165a. Couples de droites de sens direct et indirect

DÉFINITION. Le couple de droites croisées L_1, L_2 (fig. 180) est dit *de sens direct* si, pour un observateur placé sur le prolongement d'une sécante arbitraire K_1K_2 au-delà de la droite L_2, la rotation la plus courte amenant la droite L_1 à une position parallèle à L_2 est effectuée dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Dans le cas contraire, le couple de droites L_1, L_2 est dit *de sens indirect*.

REMARQUE 1. Les couples de sens direct et indirect restent tels indépendamment du choix des points K_1, K_2 sur les droites L_1, L_2 et de la notation de ces droites (on peut noter L_2 la première et L_1 la seconde). En effet, bien que dans ce cas la rotation s'effectue dans le sens opposé, l'observateur est maintenant placé sur le prolongement de la sécante au-delà de la droite L_1, de sorte que pour lui le sens de la rotation reste le même que dans le premier cas.

REMARQUE 2. Pour des droites L_1, L_2 situées dans un même plan, ainsi que pour des droites orthogonales, les notions de couples de sens direct et indirect perdent leur sens.

EXEMPLE. Lorsqu'en enfonçant ou en retirant un tire-bouchon, on tourne son manche d'un angle de 60°, les positions initiale et finale de l'axe du manche forment un couple de droites de sens direct (si l'on prend pour L_1 l'axe du manche dans sa position supérieure, l'observateur doit regarder d'en bas, dans le cas contraire d'en haut). Lors d'une rotation du manche du tire-bouchon d'un angle de 120° les positions initiale et finale de son axe forment un couple de sens indirect.

CRITÈRE POUR ÉTABLIR SI LE COUPLE EST DE SENS DIRECT OU DE SENS INDIRECT. Soient $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ deux vecteurs arbitraires (non nuls), colinéaires aux droites L_1, L_2. Si le produit mixte $(\overrightarrow{K_1K_2}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ possède le même signe que le produit scalaire $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, alors L_1, L_2 est un couple de sens direct; si les signes sont contraires, c'est un couple de sens indirect.

Quand $(\overrightarrow{K_1K_2}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$, les droites L_1, L_2 sont situées dans un même plan; quand $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = 0$, les droites L_1, L_2 sont orthogonales. Dans ces deux cas le couple L_1, L_2 n'est ni un couple de sens direct, ni un couple de sens indirect (cf. remarque 2).

SIGNE DE LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX DROITES. On peut affecter d'un signe la plus courte distance de deux droites croisées non orthogonales en estimant cette distance positive si ce couple de droites est de sens direct et négative si ce couple est de sens indirect.

Désignant par la lettre δ la plus courte distance entre les droites en tenant compte de son signe, nous avons, au lieu de (1) § 165, la formule suivante:

$$\delta = \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|} \cdot \frac{[(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}. \tag{1}$$

Elle est également valable pour les droites concourantes (mais non orthogonales) et dans ce cas donne $\delta = 0$. Pour les droites orthogonales la formule (1) n'est pas valable, car le premier facteur $\frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2|}$ devient une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ (si les droites ne sont pas

orthogonales, le premier facteur est égal soit à $+1$, soit à -1). Pour les droites parallèles la formule (1) n'est pas valable non plus, car le second facteur est indéterminé. Cf. remarque 2.

§ 166. Transformation des coordonnées

1. Translation de l'origine. Lors du passage du système de coordonnées $OXYZ$ à un nouveau système $O'X'Y'Z'$ dont les axes ont la même orientation que les axes du système $OXYZ$, les anciennes coordonnées (x, y, z) du *point* s'expriment en fonction des nouvelles (x', y', z') par les formules

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z', \tag{1}$$

où a, b, c sont les coordonnées de la nouvelle origine O' dans l'ancien système (cf. § 35).

Cette transformation laisse inchangées les coordonnées de tout *vecteur*.

2. Rotation des axes. Lors du passage du système $OXYZ$ à un nouveau système $O'X''Y''Z'$ de même origine, les anciennes coordonnées du point s'expriment en fonction des nouvelles à l'aide des formules

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}', \mathbf{i}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{i}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}', \mathbf{i}}),\\ y &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}', \mathbf{j}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{j}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}', \mathbf{j}}),\\ z &= x'\cos(\widehat{\mathbf{i}', \mathbf{k}}) + y'\cos(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{k}}) + z'\cos(\widehat{\mathbf{k}', \mathbf{k}}), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

où $(\widehat{\mathbf{i}', \mathbf{i}})$ est l'angle entre les vecteurs $\mathbf{i}'$ et $\mathbf{i}$, c'est-à-dire entre l'ancien et le nouvel axe des abscisses, $(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{i}})$ l'angle entre le nouvel axe des ordonnées et l'ancien axe des abscisses, etc. (*).

Les coordonnées de tout vecteur au cours d'une telle transformation des coordonnées sont transformées d'après les mêmes formules.

Remarque. Parmi les neuf grandeurs $\cos(\widehat{\mathbf{i}', \mathbf{i}})$, $\cos(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{j}})$, etc., trois peuvent être données arbitrairement, les six autres vérifient les six relations

$$\left.\begin{aligned} \cos^2(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{k}'}) &= 1,\\ \cos^2(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{k}'}) &= 1,\\ \cos^2(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{i}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{j}'}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

et

$$\left.\begin{aligned} \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{j}', \mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{k}'}) &= 0,\\ \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}) &= 0,\\ \cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{i}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{i}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{j}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{j}'}) + \cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{k}'})\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les relations (3) découlent de (4) § 101, les relations (4) de (2) § 145.

(*) Chacun des coefficients des nouvelles coordonnées est le cosinus de l'angle entre le nouvel axe correspondant et celui des axes de l'ancien système qui correspond à la coordonnée figurant dans le premier membre.

§ 167. Equation d'une surface

Une équation reliant les coordonnées x, y, z est appelée *équation de la surface* S si les deux conditions suivantes sont vérifiées: 1) les coordonnées x, y, z de tout point de la surface S vérifient cette équation, 2) les coordonnées x, y, z de tout point non situé sur la surface S ne vérifient pas cette équation (cf. § 7).

REMARQUE. Si l'on transforme le système de coordonnées, l'équation de la surface l'est également (la nouvelle équation s'obtient de l'ancienne à l'aide des formules de transformation des coordonnées, § 166).

EXEMPLE 1. L'équation $x + y + z - 1 = 0$ est l'équation d'une surface plane. On peut représenter cette même surface à l'aide de n'importe quelle autre équation du premier degré en choisissant de manière adéquate le système rectangulaire de coordonnées.

EXEMPLE 2. La surface d'une boule (sphère) de rayon R et centrée à l'origine des coordonnées est représentée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \tag{1}$$

car 1) si un point $M(x, y, z)$ est situé sur cette surface, la distance $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est égale au rayon R et, par conséquent, l'équation (1) est vérifiée; 2) si M n'est pas situé sur la sphère, alors $OM \neq R$, et l'équation (1) n'est pas vérifiée.

EXEMPLE 3. La sphère de rayon R et de centre au point $C(a, b, c)$ est représentée par l'équation

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \tag{2}$$

L'équation reliant les coordonnées x, y, z peut correspondre non pas à une surface, mais à d'autres images géométriques ou ne correspondre à aucune image (cf. § 58).

EXEMPLE 4. L'équation $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ ne correspond à aucune image géométrique, car elle ne possède pas de solutions (réelles).

EXEMPLE 5. L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ possédant une solution réelle unique $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ représente un seul point.

EXEMPLE 6. L'équation $(x - y)^2 + (z - y)^2 = 0$ n'est vérifiée que dans le cas où $x - y = 0$ et $z - y = 0$ simultanément; elle représente la droite $x = y = z$.

§ 168. Surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles à l'un des axes de coordonnées

On appelle *surface cylindrique* la surface engendrée par une droite *(génératrice)* qui se déplace parallèlement à une droite immobile et rencontre une courbe *(directrice)*.

Toute équation ne contenant pas la coordonnée z et représentant dans le plan XOY une certaine courbe L représente dans l'espace une

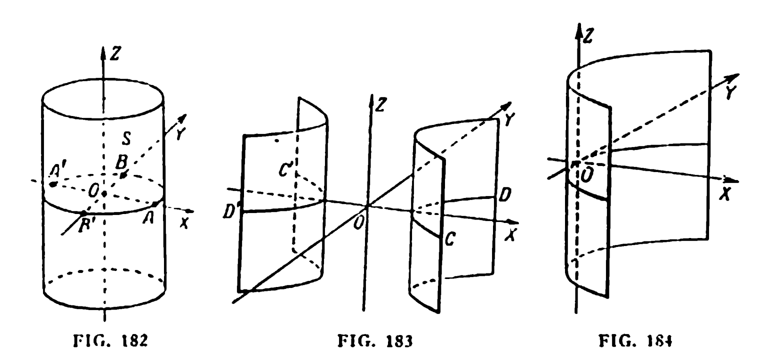


FIG. 182 FIG. 183 FIG. 184

surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe OZ et la directrice est la courbe L.

EXEMPLE 1. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{1}$$

représente dans le plan XOY l'ellipse $ABA'B'$ (fig. 182) dont les demi-axes sont $a = OA, b = OB$. Dans l'espace elle représente une surface cylindrique S dont les génératrices sont parallèles à l'axe OZ et la directrice est l'ellipse $ABA'B'$ *(cylindre elliptique)*.

EXEMPLE 2. L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ représente une surface cylindrique (fig. 183) dont les génératrices sont parallèles à l'axe OZ et la directrice est l'hyperbole $CDC'D'$ *(cylindre hyperbolique)*.

EXEMPLE 3. L'équation $y^2 = 2px$ représente un *cylindre parabolique* (fig. 184).

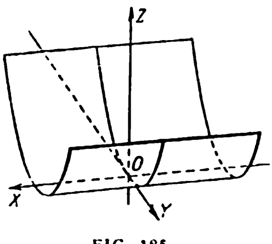


FIG. 185

L'équation ne contenant pas la coordonnée x (ou y) représente une surface cylindrique dont la génératrice est parallèle à l'axe OX (ou OY).

EXEMPLE 4. L'équation $y^2 = 2pz$ représente le cylindre parabolique disposé comme l'indique la fig. 185.

REMARQUE. Si la directrice est une droite, la surface cylindrique est plane. Cela fait que l'équation $Ax + By + D = 0$ représente dans l'espace un plan parallèle à l'axe OZ (cf. § 124, remarque).

§ 169. Equations d'une courbe

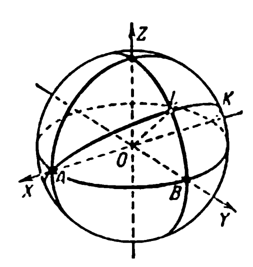


FIG. 186

On peut considérer une courbe comme l'intersection de deux surfaces et, partant, la représenter par un système de deux équations.

Deux équations (prises ensemble) reliant les coordonnées x, y, z sont appelées *équations de la courbe L* si les deux conditions suivantes sont vérifiées: 1) les coordonnées de tout point M de la courbe L vérifient les deux équations, 2) les coordonnées de tout point non situé sur la courbe L ne vérifient pas simultanément les deux équations (bien qu'elles puissent vérifier l'une d'entre elles; cf. § 140).

EXEMPLE 1. Les équations $y - z = 0$, $x - z = 0$ représentent une ligne droite en tant qu'intersection de deux plans (cf. exemple 1 § 140).

EXEMPLE 2. Les deux équations $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y = z$ représentent: la première une sphère de rayon a (fig. 186) et de centre à l'origine O, la seconde le plan LOX (la droite OL est la bissectrice de l'angle YOZ). Prises ensemble, ces deux équations représentent la circonférence ALK du grand cercle.

REMARQUE 1. Une même courbe peut être représentée par des systèmes d'équations différents (équivalents), car elle peut être obtenue par l'intersection de divers couples de surfaces.

REMARQUE 2. Le système de deux équations peut représenter non seulement une courbe, mais correspondre à d'autres images géométriques; il peut également ne correspondre à aucune image géométrique.

EXEMPLE 3. Le système d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 5$ représente le point $(0, 0, 5)$ en lequel le plan $z = 5$ est tangent à la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

EXEMPLE 4. Le système d'équations $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $x + y + z = 1$ ne correspond à aucune image géométrique, car la première équation n'est vérifiée que par les valeurs $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, qui ne vérifient pas la seconde équation.

§ 170. Projection d'une courbe sur le plan de coordonnées

1. Supposons que la courbe L soit représentée par deux équations dont l'une contient z et l'autre ne la contient pas (*). La seconde représente alors une surface cylindrique « verticale » et, dans le plan XOY, la di-

---

(*) Si les deux équations ne contiennent pas z, la courbe L est une droite verticale (ou plusieurs droites verticales); elle est projetée sur XOY par des points (cf. § 149, exemple 3).

rectrice L_1 de cette surface (§ 168); la projection de la courbe L sur le plan XOY est située sur la courbe L_1 (la recouvrant entièrement ou partiellement).

EXEMPLE 1. Les équations

$$z = y + \frac{3}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1$$

représentent (fig. 187) la courbe ABA_1B_1 (ellipse), suivant laquelle se coupent le plan $z = y + \frac{3}{2}$ (le plan P sur la fig. 187) et la surface cylindrique circulaire $x^2 + y^2 = 1$. Dans le plan XOY l'équation $x^2 + y^2 = 1$ représente la circonférence $A'B'A'_1B'_1$. La projection de la courbe ABA_1B_1 coïncide avec la courbe $A'B'A'_1B'_1$.

EXEMPLE 2. Les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad y = mx$$

représentent (fig. 188) le grand cercle (la méridienne) $APA'P'$ de la sphère O comme l'intersection de cette sphère avec le plan $y = mx$ (le plan R sur la fig. 188). L'équation $y = mx$ représente dans le plan XOY la droite UV. La projection de la méridienne $APA'P'$ sur le

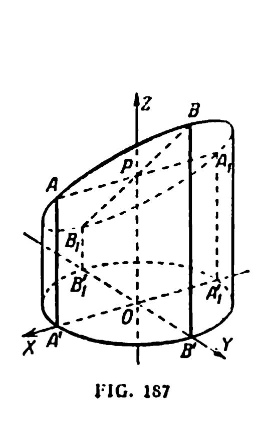


FIG. 187

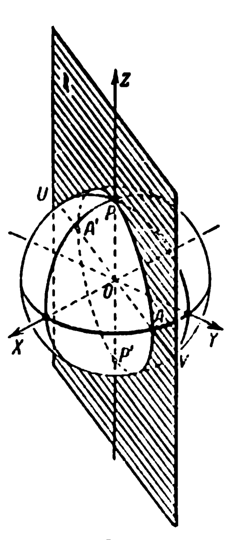


FIG. 188

plan XOY est située sur la droite UV, mais ne recouvre qu'une partie de cette droite, précisément le segment AA'.

2. Supposons que les deux équations représentant la courbe L contiennent z; pour rechercher la projection de la courbe L sur le plan XOY il faut éliminer z entre les équations considérées (*). L'équation qui en résulte représente dans le plan XOY la courbe L' sur laquelle est située la projection cherchée (la recouvrant entièrement ou partiellement). On trouve d'une manière analogue les projections de la courbe sur les plans XOZ et YOZ.

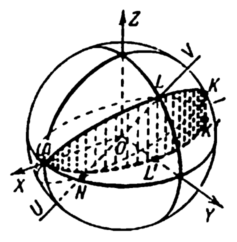


FIG. 189

Cela découle de 1.

EXEMPLE 3. Considérons la circonférence (ALK sur la fig. 189) représentée (cf. § 169, exemple 2) par les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \tag{1}$$

$$y = z. \tag{2}$$

Pour trouver sa projection sur le plan XOY éliminons z entre (1) et (2). Nous obtenons l'équation

$$x^2 + 2y^2 = a^2. \tag{3}$$

Elle représente dans le plan XOY l'ellipse $AL'K'$ de demi-axes $OA = a$, $OL' = \frac{a}{\sqrt{2}}$. La projection de la circonférence ALK recouvre entièrement l'ellipse $AL'K'$.

Pour trouver la projection de la circonférence ALK sur le plan XOZ il faut éliminer y entre (1) et (2). Nous obtenons l'équation

$$x^2 + 2z^2 = a^2, \tag{4}$$

représentant dans le plan XOZ une ellipse de mêmes dimensions que $AL'K'$. La projection de la circonférence recouvre entièrement cette ellipse.

Pour trouver la projection de la circonférence ALK sur le plan YOZ, il n'est pas besoin d'éliminer x, car l'une des équations considérées ($y =$ $= z$) ne contient pas x. L'équation $y = z$ représente dans le plan YOZ la droite UV toute entière, mais la projection cherchée ne recouvre qu'un segment de cette droite (NL).

(*) Eliminer z entre deux équations signifie trouver une troisième équation ne contenant pas z et vérifiée pour toutes les valeurs de x, y qui vérifient le système des deux équations données.

§ 171. Surfaces algébriques et leur degré

On appelle *équation algébrique du second degré* (à trois inconnues x, y, z) toute équation de la forme $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0$, où l'une au moins des six grandeurs A, B, C, D, E, F n'est pas nulle. On définit de manière analogue une équation algébrique de degré quelconque (cf. § 37).

Si une certaine surface S est représentée dans un système rectangulaire de coordonnées par une équation du n-ième degré, alors dans tout autre système rectangulaire de coordonnées elle est représentée par une équation du même degré (cf. § 37).

La surface que l'on peut représenter par une équation du n-ième degré est appelée *surface algébrique du n-ième degré*. Toute surface du premier degré est un plan. Nous allons considérer dans les paragraphes suivants les surfaces du second degré (quadriques).

§ 172. Sphère

L'équation du second degré

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{1}$$

représente (§ 167, exemple 2) une sphère de rayon R et de centre à l'origine des coordonnées. Si l'origine ne coïncide pas avec le centre de la sphère, cette dernière est également représentée par une équation du second degré

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, \tag{2}$$

où a, b, c sont les coordonnées du centre de la sphère (cf. § 38).

L'équation du second degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0 \tag{3}$$

ne représente une sphère que si les conditions

$$A = B = C, \tag{4}$$

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0, \tag{5}$$

$$G^2 + H^2 + K^2 - 4AL > 0 \tag{6}$$

sont vérifiées (cf. § 39). Dans ces conditions nous avons:

$$a = -\frac{G}{2A}, \quad b = -\frac{H}{2A}, \quad c = -\frac{K}{2A},$$

$$R^2 = \frac{G^2 + H^2 + K^2 - 4AL}{4A^2}. \tag{7}$$

EXEMPLE. L'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

$$(A = B = C = 1, \quad D = E = F = 0, \quad G = -2, \quad H = -4,$$
$$K = 0, \quad L = -4)$$

représente une sphère. Complétant les expressions $x^2 - 2x$ et $y^2 - 4y$ jusqu'aux carrés parfaits et ajoutant, pour compenser, les nombres 1^2 et 2^2 au second membre, nous obtenons l'équation

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9,$$

c'est-à-dire $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $R = 3$.

Nous aurions trouvé le même résultat en appliquant les formules (7).

§ 173. Ellipsoïde

La surface représentée par l'équation (*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1}$$

est appelée *ellipsoïde* (**) (fig. 190). La ligne d'intersection $ABA'B'$ de l'ellipsoïde (1) et du plan XOY est représentée (§ 169) par le système

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = 0.$$

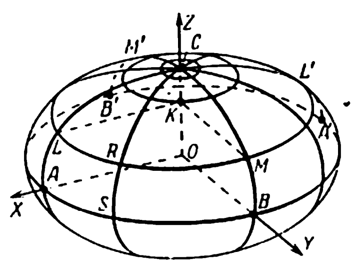


FIG. 190

(*) Ici et dans ce qui suit, nous désignerons par les lettres a, b, c les longueurs de certains segments, de sorte que les nombres a, b, c sont positifs.

(**) Le mot « ellipsoïde » (« qui a la forme d'une ellipse ») convient mal pour désigner une surface, mais il est consacré par l'usage. Les géomètres de la Grèce antique appelaient les ellipsoïdes de révolution (ils n'en avaient pas étudié d'autres) des « sphéroïdes », terme usité encore de nos jours.

Il est équivalent au système

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = 0,$$

de sorte que $ABA'B'$ est une ellipse de demi-axes $OA = a$, $OB = b$.

Les sections de l'ellipsoïde (1) par les plans YOZ, XOZ sont l'ellipse $M'CMB$ de demi-axes (*) $OB = b$, $OC = c$ et l'ellipse $L'CLA$ de demi-axes $OA = a$, $OC = c$.

La section de l'ellipsoïde par le plan $z = h$ ($LML'M'$ sur la fig. 190) est représentée par le système

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}, \tag{2}$$

$$z = h. \tag{3}$$

Toutefois si $|h| > c$, l'équation (2) ne représente aucun lieu géométrique (« cylindre elliptique imaginaire »; cf. § 58, exemple 5). Dans ce cas le plan ne coupe pas l'ellipsoïde. Quand $|h| = c$, l'équation (2) représente l'axe OZ ($x = 0$, $y = 0$; cf. § 58, exemple 4). Cela signifie que le plan $z = c$ n'a qu'un point commun $C(0, 0, c)$ (point de contact) avec l'ellipsoïde; de même, le plan $z = -c$ est tangent à l'ellipsoïde au point C' $(0, 0, -c)$ (non indiqué sur la figure).

Si par contre $|h| < c$, la section considérée est une ellipse de demi-axes

$$KL = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \quad KM = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}} \tag{4}$$

proportionnels à a et b.

Au fur et à mesure que la section s'éloigne du plan XOY, ses dimensions diminuent (elles sont par ailleurs toutes semblables).

Le même tableau se présente pour les sections parallèles aux plans YOZ, ZOX.

Le point O est le centre de symétrie de l'ellipsoïde (1). Les plans XOY, YOZ, XOZ sont les plans de symétrie, les axes OX, OY, OZ les axes de symétrie.

Ellipsoïde à trois axes inégaux. Il peut arriver que les trois grandeurs a, b, c sont différentes, c'est-à-dire qu'aucune des ellipses $A'CA$, $B'CB$, ABA' ne se transforme en une circonférence. Les ellipses $A'CA$, $B'CB$, $A'BA$ sont appelées ellipses *principales* et leurs sommets [$A(a, 0, 0)$, $A'(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$, $C(0, 0, c)$, C' $(0, 0, -c)$] *sommets* de l'ellipsoïde. Les segments AA', BB', CC'

(*) Plus haut (§ 41), nous avons noté c la demi-distance focale [$c = \sqrt{a^2 - b^2}$, de sorte que $c < a$]. Ici c a un autre sens et peut prendre n'importe quelle valeur.

(les axes des ellipses principales) ainsi que leurs longueurs sont appelés ***axes de l'ellipsoïde***. Si $a > b > c$, alors $2a$ désigne le ***grand axe***, $2b$ l'***axe moyen*** et $2c$ le ***petit axe***.

ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION. Si deux quelconques des grandeurs a, b, c, par exemple a et b, sont égales, alors l'ellipse principale correspondante $A'BA$ et toutes les sections qui lui sont parallèles se transforment en circonférences. On peut obtenir toute section CRS passant par l'axe OZ par une rotation de l'ellipse CLA autour de l'axe OZ, autrement dit l'ellipsoïde est une surface de révolution (les ellipses CLA, CRS, CMB, etc. sont les ***méridiennes***, et la circonférence $A'BA$ l'***équateur***). Un tel ellipsoïde est dit ***ellipsoïde de révolution***. Son équation est de la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (5)$$

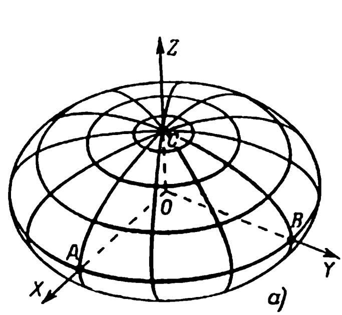
Si $a > c$, on a l'ellipsoïde de révolution ***aplati*** (fig. 191, *a*), si $a < c$, l'ellipsoïde ***allongé*** (fig. 191, *b*). La position des deux axes de l'ellipsoïde de révolution est indéterminée.

Si $a = b = c$, l'ellipsoïde se transforme en sphère, et la position des trois axes est indéterminée.

REMARQUE 1. On peut définir l'ellipsoïde de révolution comme la surface engendrée par la compression uniforme d'une sphère vers l'équateur (cf. § 40). On obtient un ellipsoïde de révolution aplati si le coefficient de compression $k < 1$ et un ellipsoïde allongé si $k > 1$.

On peut définir l'ellipsoïde à trois axes inégaux comme la surface engendrée par la compression uniforme de l'ellipsoïde de révolution vers sa méridienne.

REMARQUE 2. L'ellipsoïde est représenté par l'équation (1) si les axes de coordonnées coïncident avec les axes de l'ellipsoïde. Dans les autres cas l'ellipsoïde est représenté par d'autres équations.



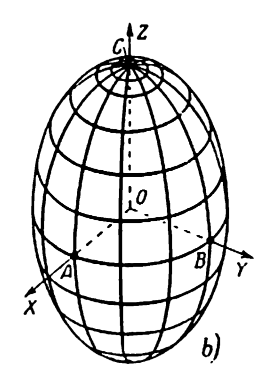


FIG. 191

EXEMPLE 1. Déterminer la surface représentée par l'équation

$$16x^2 + 3y^2 + 16z^2 - 48 = 0.$$

SOLUTION. Cette équation peut être ramenée à la forme suivante

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{3} = 1.$$

Elle représente un ellipsoïde de révolution allongé de demi-axes $a = c = \sqrt{3}$, $b = 4$. L'axe de révolution est Oy.

EXEMPLE 2. Déterminer la surface représentée par l'équation $x^2 - 6x + 4y^2 + 9z^2 + 36z - 99 = 0$.

SOLUTION. Nous ramenons cette équation à la forme

$$(x - 3)^2 + 4y^2 + 9(z + 2)^2 = 144.$$

Déplaçons l'origine au point (3, 0, —2); nous obtenons alors (§ 166) l'équation $x'^2 + 4y'^2 + 9z'^2 = 144$ ou

$$\frac{x'^2}{144} + \frac{y'^2}{36} + \frac{z'^2}{16} = 1.$$

Cette équation représente un ellipsoïde de demi-axes $a = 12$, $b = 6$, $c = 4$; son centre coïncide avec le point (3, 0, — 2), ses axes sont parallèles aux axes de coordonnées.

§ 174. Hyperboloïde à une nappe

La surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (1)$$

est appelée *hyperboloïde à une nappe* (fig. 192).

La dénomination « hyperboloïde » tient à ce que parmi les sections de cette surface il y a des hyperboles. Telles sont les sections par les plans $x = 0$ ($MNN'M'$ sur la fig. 192) et $y = 0$ ($KLL'K'$). Ces sections sont représentées (dans leurs plans) par les équations

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (3)$$

Le terme « à une nappe » souligne le fait que la surface (1), à la différence de la surface de *l'hyperboloïde à deux nappes* (cf. § 175), n'est pas séparée en deux parties, mais représente un tube continu le long de l'axe OZ.

Le plan

$$z = h \tag{4}$$

coupe, pour toute valeur de h (cf. § 173), la surface (1) suivant l'ellipse (*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \tag{5}$$

de demi-axes $a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}}$. Toutes les ellipses (5) sont semblables, leurs sommets sont situés sur les hyperboles (2) et (3); les dimensions des ellipses augmentent à mesure que la section s'éloigne du plan XOY. La section par le plan XOY est l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{5'}$$

(l'ellipse *de gorge* $ABA'B'$).

FIG. 192

Les hyperboles (2) et (3) ainsi que l'ellipse (5') sont appelées *sections principales* et leurs sommets A $(a, 0, 0)$, A' $(-a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $B'(0, -b, 0)$ *sommets* de l'hyperboloïde à une nappe. Les segments $AA' = 2a$, $BB' = 2b$ (les axes réels des hyperboles principales) et souvent les droites AA', BB' sont appelés *axes transverses*. Le segment $CC' = 2OC = 2c$, porté sur l'axe OZ (l'axe imaginaire de chacune des hyperboles principales), est appelé *axe non transverse* de l'hyperboloïde à une nappe.

Le point O est le centre de symétrie de l'hyperboloïde à une nappe (1), les plans XOY, YOZ, ZOX les plans de symétrie, les axes OX, OY, OZ les axes de symétrie.

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION À UNE NAPPE. Si $a = b$, l'équation (1) devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6}$$

L'ellipse de gorge $ABA'B'$ devient une *circonférence de gorge* de rayon a. Toutes les sections parallèles à XOY sont également des circonférences. Les sections $KLL'K'$ et $MNN'M'$ (et en général toutes les sections passant par l'axe non transverse) sont des hyperboles égales, et on peut obtenir la surface (6) par une rotation de l'hyperbole $KLL'K'$ autour de l'axe non transverse. La surface (6) est appelée *hyperboloïde*

(*) On suppose ici que $a \neq b$. Dans le cas $a = b$ les ellipses (5) se transforment en circonférences; cf. plus bas l'équation (6).

de révolution à une nappe. La position de deux de ses axes (axes transverses) devient indéterminée, le troisième axe (axe non transverse) coïncide avec l'axe imaginaire de l'hyperbole en rotation. A la différence de l'hyperboloïde de révolution ($a = b$) l'hyperboloïde à une nappe (1) a pour $a \neq b$ *trois axes inégaux.*

REMARQUE. On peut définir l'hyperboloïde de révolution à une nappe comme la surface engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de son axe imaginaire et l'hyperboloïde à une nappe comme la surface obtenue par la compression uniforme de l'hyperboloïde de révolution à une nappe vers le plan d'une méridienne quelconque.

EXEMPLE. Déterminer la surface

$$x^2 - 4y^2 - 4z^2 + 16 = 0.$$

SOLUTION. Cette équation peut être ramenée à la forme

$$-\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1.$$

Elle représente un hyperboloïde de révolution à une nappe de centre au point (0, 0, 0); l'axe de rotation est OX (puisque le coefficient négatif est celui de x^2). Le rayon de la circonférence de gorge est $r = 2$, le demi-axe non transverse est égal à 4.

§ 175. Hyperboloïde à deux nappes

La surface représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{1}$$

est appelée *hyperboloïde à deux nappes* (fig. 193).

Les sections par les plans XOZ et YOZ sont représentées par les équations

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{2}$$

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3}$$

Ce sont des hyperboles ($KK'L'L$ et $MM'N'N$ sur la fig. 193). Pour chacune d'elles l'axe OZ est un *axe réel* (cf. § 174).

Les plans $z = h$ ne rencontrent pas l'hyperboloïde (1) quand $|h| < c$ (cf. § 174). Quand $h = \pm c$, ils sont en contact avec l'hyperboloïde aux points C (0, 0, c) et C' (0, 0, $-c$). Quand $|h| > c$, les sections

sont les ellipses [*]

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \qquad (4)$$

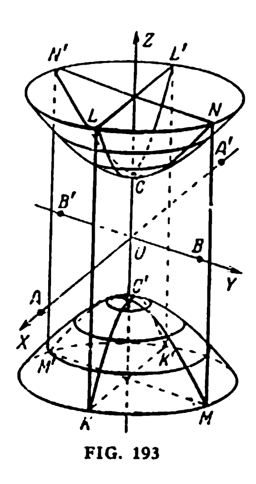


FIG. 193

semblables ($KMK'M'$, $LNL'N'$, etc.). Leurs dimensions augmentent au fur et à mesure qu'on s'éloigne du plan XOY.

Ainsi, la surface (1) se compose de deux nappes séparées.

Les hyperboles (2) et (3) sont appelées *sections principales*, leurs sommets communs C et C' *sommets* de l'hyperboloïde à deux nappes et leur axe réel CC' *axe non transverse* de l'hyperboloïde à deux nappes; les axes imaginaires $AA' = 2a$ et $BB' = 2b$ sont dits *axes transverses de symétrie*.

L'hyperboloïde à deux nappes possède un centre O, des axes de symétrie OX, OY, OZ et des plans de symétrie XOY, YOZ, ZOX. Les deux nappes de l'hyperboloïde sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan XOY.

HYPERBOLOÏDE DE RÉVOLUTION À DEUX NAPPES. L'équation (1) devient, pour $a = b$:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

et représente la surface engendrée par la rotation d'une hyperbole autour de son axe réel. Cette surface est appelée *hyperboloïde de révolution à deux nappes*. L'hyperboloïde à deux nappes dont les demi-axes transverses a et b ne sont pas égaux est dit *à trois axes inégaux*.

EXEMPLE 1. Déterminer la surface

$$3x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 30 = 0.$$

SOLUTION. Ramenons l'équation considérée à la forme

$$\frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{15} - \frac{x^2}{10} = -1.$$

Nous avons un hyperboloïde à deux nappes (à trois axes inégaux). L'axe non transverse est égal à $\sqrt{10}$ et coïncide avec l'axe OX, l'un des axes transverses est égal à $\sqrt{6}$ et est dirigé suivant l'axe OY, l'autre est égal à $\sqrt{15}$ et est dirigé suivant l'axe OZ.

---

[*] Cf. renvoi page 213.

Exemple 2. L'équation

$$x^2 - y^2 - z^2 = -1$$

représente un hyperboloïde *à une nappe* (et non à deux nappes) (le second membre a beau contenir -1 et non $+1$, le premier membre contient deux termes négatifs). Mettant cette équation sous la forme $y^2 + z^2 - x^2 = 1$, nous voyons que l'hyperboloïde est engendré par la rotation d'une hyperbole équilatère autour de son axe imaginaire (coïncidant avec l'axe OX).

§ 176. Cône du second degré

On appelle *surface conique* toute surface engendrée par le déplacement d'une ligne droite *(génératrice)* passant par un point immobile *(sommet* de la surface conique). Toute courbe (ne passant pas par le sommet) qui coupe la génératrice occupant une position quelconque est appelée *directrice*.

La surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{1}$$

qui, comme nous le montrerons plus bas, est conique, est appelée *cône du second degré* (fig. 194).

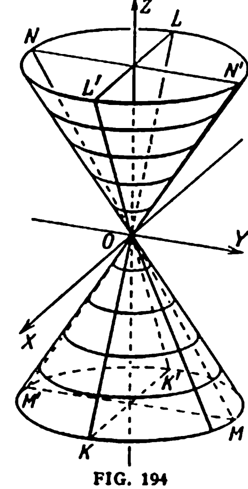
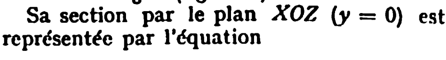


FIG. 194



Sa section par le plan XOZ ($y = 0$) est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 0. \tag{2}$$

C'est un couple de droites (KL et $K'L'$) passant par l'origine (§ 58). En la coupant par le plan YOZ nous obtenons un couple de droites (MN et $M'N'$):

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = 0. \tag{3}$$

La section par tout autre plan $y = kx$ passant par l'axe OZ est représentée (§ 169) par le système

$$y = kx, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{4}$$

C'est aussi un couple de droites:

$$y = kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} + \frac{z}{c} = 0 \tag{5}$$

et

$$y = kx, \quad x\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{k^2}{b^2}} - \frac{z}{c} = 0 \tag{6}$$

passant par l'origine. Cela signifie que la surface (1) est conique; le point O est son sommet.

La section du cône (1) par un plan quelconque $z = h$ (quand $h \neq 0$) donne une ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}; \tag{7}$$

elle se réduit au point O (0, 0, 0) quand $h = 0$. Toutes les ellipses (7) sont semblables, leurs sommets sont situés sur les sections (2) et (3).

Quand $a = b$, les ellipses (7) se transforment en circonférences et le cône du second degré en cône circulaire

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{8}$$

On peut définir le cône du second degré comme la surface obtenue en comprimant uniformément un cône circulaire vers le plan de la section axiale.

Les sections du cône (1) par des plans parallèles au plan XOZ (ou au plan YOZ) sont des hyperboles.

Remarque. Les sections de tout cône du second degré par des plans ne passant pas par le sommet sont des circonférences (*), des ellipses, des hyperboles et des paraboles. Chacune de ces courbes peut être prise pour directrice. C'est pourquoi il est rationnel d'appeler le cône du second degré cône « elliptique ».

Exemple 1. L'équation $x^2 + y^2 = z^2$ représente un cône circulaire; la section par le plan XOZ est un couple de droites $x = \pm z$. Les génératrices et l'axe forment un angle de 45°.

Exemple 2. L'équation $-x^2 + 9y^2 + 3z^2 = 0$ représente un cône (non circulaire) du second degré. La section par tout plan $z = h$ ($h \neq 0$) est une hyperbole $x^2 - 9y^2 = 3h^2$; pour $h = 0$ elle se transforme en un couple de génératrices. La même chose pour les sections $y = l$. Les sections $x = d$ ($d \neq 0$) sont des ellipses.

(*) Le cône circulaire possède un système de sections circulaires parallèles, et le cône non circulaire en possède deux.

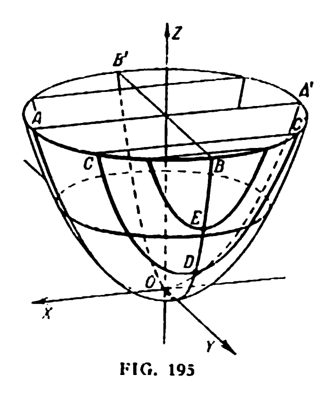


FIG. 195

§ 177. Paraboloïde elliptique

La surface représentée par l'équation

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \qquad (1)$$

($p > 0$, $q > 0$) est appelée *paraboloïde elliptique* (fig. 195).

Les sections par les plans XOZ et YOZ (sections principales) sont des paraboles (AOA' et BOB')

$$x^2 = 2pz, \qquad (2)$$

$$y^2 = 2qz, \qquad (3)$$

dont la concavité est tournée vers le haut.

Le plan $z = 0$ est tangent au paraboloïde au point O, les plans $z = h$, pour $h > 0$, coupent le paraboloïde suivant des ellipses semblables

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h \qquad (4)$$

de demi-axes $\sqrt{2ph}$, $\sqrt{2qh}$. Pour $h < 0$, ces plans ne rencontrent pas le paraboloïde.

Le paraboloïde elliptique ne possède pas de centre de symétrie; il est symétrique par rapport aux plans XOZ, YOZ et par rapport à l'axe OZ. La droite OZ est appelée *axe* du paraboloïde elliptique, le point O son *sommet*, les grandeurs p et q ses *paramètres*.

Pour $p = q$, les paraboles (2) et (3) sont égales, les ellipses (4) se transforment en circonférences et le paraboloïde (1) devient la surface engendrée par la rotation d'une parabole autour de son axe (*paraboloïde de révolution*) (*).

On peut définir le paraboloïde elliptique comme la surface que l'on obtient en comprimant uniformément un paraboloïde de révolution vers l'une de ses méridiennes.

EXEMPLE. La surface $z = x^2 + y^2$ est un paraboloïde de révolution engendé par la rotation de la parabole $z = x^2$ autour de son axe (l'axe OZ).

(*) Les glaces des réflecteurs ont la forme d'un paraboloïde de révolution (elles transforment les rayons issus du foyer en un faisceau de rayons parallèles).

La surface $x = y^2 + z^2$ est ce même paraboloïde, mais autrement disposé (l'axe de rotation coïncide avec l'axe OX).

REMARQUE. Le plan $y = f$ coupe le paraboloïde elliptique suivant la courbe $z = \frac{x^2}{2p} + \frac{f^2}{2q}$ (CDC'); c'est une parabole égale (§ 50) à la parabole AOA' $\left(z = \frac{x^2}{2p}\right)$; son axe est aussi orienté « vers le haut » et son sommet est le point $D\left(0, f, \frac{f^2}{2q}\right)$. Les coordonnées du point D vérifient les équations $x = 0$, $y^2 = 2qz$, autrement dit D est situé sur la parabole BOB'. Cela signifie que le paraboloïde elliptique est la surface engendrée par translation d'une parabole (AOA') par laquelle son sommet se déplace suivant une autre parabole (BOB'). Les plans des paraboles mobile et immobile sont alors orthogonaux, et les axes identiquement orientés.

§ 178. Paraboloïde hyperbolique

La surface représentée par l'équation

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \qquad (1)$$

$(p > 0, q > 0)$ est appelée *paraboloïde hyperbolique* (fig. 196).

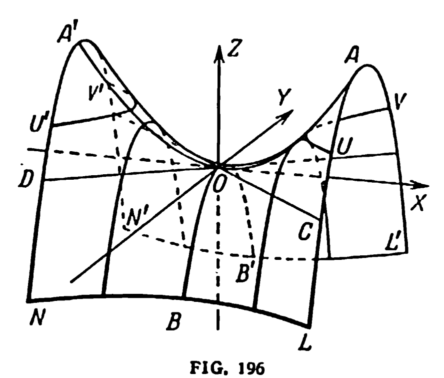


FIG. 196

Les sections par les plans XOZ et YOZ (*sections principales*) sont des paraboles (AOA', BOB')

$$x^2 = 2pz, \tag{2}$$

$$y^2 = -2qz. \tag{3}$$

A la différence des sections principales du paraboloïde elliptique (§ 177), les concavités des paraboles (2) et (3) sont différemment orientées (pour la parabole AOA' « vers le haut », pour la parabole BOB' « vers le bas »). La surface (1) a la forme d'une selle.

La section du paraboloïde hyperbolique (1) par le plan XOY ($z = 0$) est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0. \tag{4}$$

C'est un couple de droites (*) OD, OC (§ 58, exemple 1).

Les plans $z = h$, parallèles à XOY, coupent le paraboloïde hyperbolique suivant des hyperboles

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h, \quad z = h. \tag{5}$$

Quand $h > 0$, l'axe réel de ces hyperboles (par exemple de l'hyperbole $UVV'U'$) est parallèle à l'axe OX; quand $h < 0$ (l'hyperbole $LNN'L'$), l'axe réel est parallèle à OY. Toutes les hyperboles (5) situées d'un même côté du plan XOY sont semblables; elles sont conjuguées deux à deux (§ 47) des hyperboles (5) situées de l'autre côté de XOY.

Le paraboloïde hyperbolique ne possède pas de centre; il est symétrique par rapport aux plans XOZ et YOZ et par rapport à l'axe OZ. La droite OZ est appelée *axe* du paraboloïde hyperbolique, le point O son *sommet*, les grandeurs p et q ses *paramètres*.

REMARQUE 1. Pour aucunes valeurs de p et q le paraboloïde hyperbolique (à la différence des surfaces du second degré considérées plus haut) ne représente une surface de révolution.

REMARQUE 2. Le paraboloïde hyperbolique, tout comme le paraboloïde elliptique, peut être obtenu par translation d'une section principale (par exemple BOB') le long de l'autre (AOA'). Mais maintenant les paraboles mobile et immobile tournent leur concavité dans des sens opposés.

(*) Le paraboloïde hyperbolique comporte une infinité de lignes droites; cf. § 180.

EXEMPLE. La surface $z = x^2 - y^2$ est un paraboloïde hyperbolique; ses deux sections principales sont des paraboles égales, mais orientées dans des sens opposés. On peut obtenir cette surface par translation de l'une de ces paraboles le long de l'autre. La section par le plan $z = h$ ($h \neq 0$) est une hyperbole équilatère de demi-axes $a = \sqrt{|h|}$, $b = \sqrt{|h|}$. Pour $h = 0$ elle se transforme en un couple de droites orthogonales ($x + y = 0$, $x - y = 0$). Si l'on considère ces droites comme axes de coordonnées OX', OY', le paraboloïde hyperbolique considéré est représenté (§ 36) par l'équation $z = 2x'y'$.

En fait, l'équation $z = \frac{xy}{a}$ représente le même paraboloïde hyperbolique que l'équation $z = \frac{x^2}{2a} - \frac{y^2}{2a}$, mais dans le premier cas les axes OX et OY coïncident avec les génératrices rectilignes (§ 180) passant par le sommet.

§ 179. Liste des quadriques

On peut ramener toute équation du second degré

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

à l'aide des formules de transformation des coordonnées (§ 166), à l'une des 17 équations dites *canoniques*. Dans ces cas l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ (n° 14) représente non pas une surface, mais une ligne droite ($x = 0$, $y = 0$). On dit toutefois qu'elle représente un *couple de plans imaginaires* (se coupant suivant une droite réelle) (cf. § 58, exemple 4). L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ (n° 13) représente un point (0, 0, 0). Toutefois (par analogie avec l'équation n° 4) on dit que l'équation n° 13 représente un *cône imaginaire du second degré* (à sommet réel).

Les équations n°s 15, 16, 17 ne représentent aucune image géométrique. On convient toutefois de dire qu'elles représentent respectivement un *ellipsoïde imaginaire* (cf. n° 1), un *cylindre elliptique imaginaire* (cf. n° 7) et un *couple de plans parallèles imaginaires* (cf. n° 11).

Utilisant cette terminologie conventionnelle on peut dire que toute quadrique est l'une des 17 surfaces rapportées aux pages 222-224.

nº	Equation canonique	Figure	Surface	§
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Ellipsoïde (en particulier, ellipsoïde de révolution et sphère)	173
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		Hyperboloïde à une nappe	174
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$		Hyperboloïde à deux nappes	175
4	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$		Cône du second degré	176
5	$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$		Paraboloïde elliptique	177
6	$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$		Paraboloïde hyperbolique	178

n°	Equation canonique	Figure	Surface	§
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$		Cylindre elliptique	168
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$		Cylindre hyperbolique	168
9	$y^2=2px$		Cylindre parabolique	168
10	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$		Couple de plans sécants	
11	$\frac{x^2}{a^2}=1$		Couple de plans parallèles	
12	$x^2=0$		Couple de plans confondus	

nº	Equation canonique	Figure	Surface	§
13	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	●	Cône imaginaire du second degré à sommet réel (0, 0, 0)	
14	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Z	Couple de plans imaginaires (se coupant suivant une droite réelle)	
15	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$		Ellipsoïde imaginaire	
16	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$		Cylindre elliptique imaginaire	
17	$\frac{x^2}{a^2}=-1$		Couple de plans parallèles imaginaires	

§ 180. Génératrices rectilignes des quadriques

Une surface est dite *réglée* si elle est engendrée par le déplacement d'une droite *(génératrice rectiligne)*. Parmi les surfaces du second degré les cylindres et le cône du second degré, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique sont des surfaces réglées.

Par chaque point de l'hyperboloïde à une nappe (fig. 197) et du paraboloïde hyperbolique (fig. 198) passent deux génératrices rectilignes. Ainsi, sur la fig. 197 par le point A passent les génératrices UU' et VV', par le point V les génératrices VA et VB.

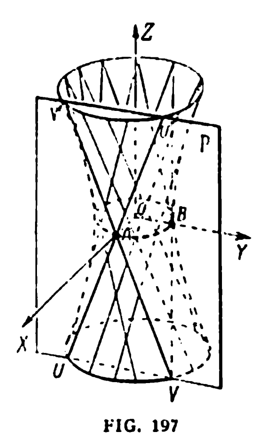


FIG. 197

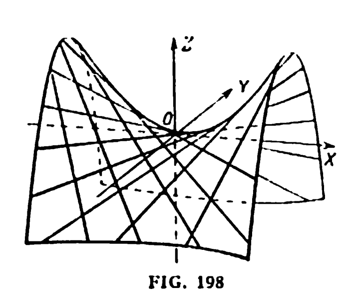


FIG. 198

L'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes et le paraboloïde elliptique ne possèdent pas de génératrices rectilignes (réelles).

Exemple. La section de l'hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (1)$$

par le plan $x = a$ (le plan P sur la fig. 197) est représentée par l'équation $\frac{a^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, c'est-à-dire

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (2)$$

C'est un couple de droites (UU' et VV'). Elles passent par le sommet $A(a, 0, 0)$ de l'ellipse de gorge. Exactement de la même façon, par le sommet B $(0, b, 0)$ passe un couple de génératrices rectilignes

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0, \quad y=b. \qquad (3)$$

L'hyperboloïde de révolution à une nappe ($a = b$) peut être engendré (*) par la rotation de la droite UU' (ou VV') autour de l'axe OZ.

(*) Si l'on perce avec une épingle deux allumettes non situées dans un même plan et si, en prenant l'une des allumettes par son extrémité, on fait tourner tout le modèle autour d'elle, l'autre allumette décrira l'hyperboloïde à une nappe.

§ 181. Surfaces de révolution

Soit L une courbe dans le plan XOZ. L'équation de la surface engendrée par la rotation de L autour de l'axe OZ s'obtient de l'équation de la courbe L en remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$.

EXEMPLE 1. Supposons que la droite $z = 2x$ dans le plan $y = 0$ (la droite PP' sur la fig. 199) tourne autour de l'axe OZ. Alors, l'équation de la surface conique engendrée par la rotation de la droite PP' est de la forme $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, c'est-à-dire $x^2+y^2-\frac{z^2}{4}=0$ (cf. § 176).

On a des règles analogues quand la courbe L est située dans un autre plan de coordonnées et quand l'axe de rotation est un autre axe de coordonnées.

EXEMPLE 2. Trouver l'équation de la surface engendrée par la rotation de la parabole $y^2 = 2px$ (LOL' sur la fig. 200) autour de l'axe OX.

SOLUTION. Remplaçant y par $\sqrt{y^2+z^2}$, c'est-à-dire y^2 par $y^2 + z^2$, nous obtenons $y^2 + z^2 = 2px$ (paraboloïde de révolution d'axe OX).

EXEMPLE 3. Trouver l'équation de la surface engendrée par la rotation de la parabole $z^2 = 2px$ (KOK' sur la fig. 201) autour de l'axe Z.

SOLUTION. Remplaçant x par $\sqrt{x^2+y^2}$, nous obtenons l'équation $z^2 = 2p\sqrt{x^2+y^2}$ ou $z^4 = 4p^2(x^2+y^2)$ (surface du quatrième degré).

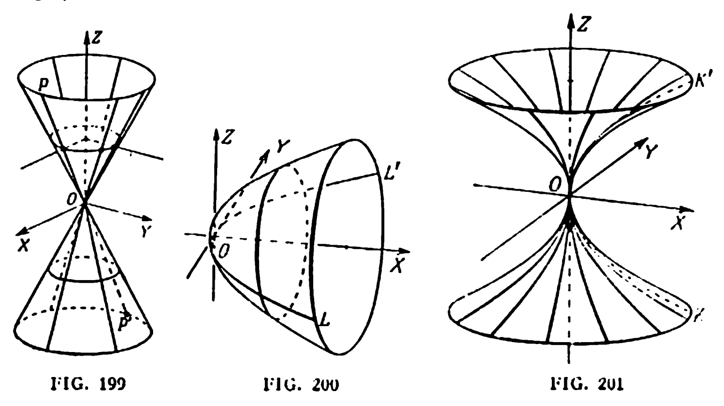


FIG. 199 FIG. 200 FIG. 201

§ 182. Déterminants du second et du troisième ordre

On appelle (§ 12) *déterminant du second ordre* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ l'expression

$$a_1b_2 - a_2b_1.$$

On appelle (§ 118) *déterminant du troisième ordre*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{1}$$

l'expression

$$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 \tag{2}$$

ou, ce qui revient au même,

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Les lettres a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 sont appelées *éléments du déterminant*.

MINEURS. Les déterminants $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ figurant dans la formule (3) sont appelés *mineurs* des éléments a_1, b_1, c_1.

En général, on appelle *mineur* d'un élément quelconque le déterminant que l'on obtient du déterminant initial en supprimant la ligne et la colonne à l'intersection desquelles se trouve l'élément considéré.

EXEMPLES. Le mineur de l'élément b_2 du déterminant (1) est le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, d'après le schéma:

$$\begin{vmatrix} a_1 & \not{b_1} & c_1 \\ \not{a_2} - - & \not{b_2} & - - c_2 \\ a_3 & \not{b_3} & c_3 \end{vmatrix}.$$

Le mineur de l'élément b_3 est $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$, le mineur de l'élément c_3 est $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

REMARQUE. Dans le déterminant du second ordre $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ le mineur de l'élément a_1 est l'élément b_2; on peut le considérer comme un « déterminant du premier ordre ». L'élément b_2 s'obtient du déterminant du second ordre en supprimant la ligne supérieure et la colonne de gauche. D'une manière analogue le mineur de l'élément a_2 est l'élément b_1, etc.

COFACTEUR. Dans la formule (3) les éléments a_1, b_1, c_1 sont multipliés par $+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $-\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$. Ces expressions sont appelées *cofacteurs* des éléments a_1, b_1, c_1.

En général, on appelle *cofacteur* de l'élément son mineur pris avec le signe plus ou moins conformément à la règle suivante:

Si la somme des numéros de la colonne et de la ligne à l'intersection desquelles se trouve l'élément considéré est un nombre pair, le mineur est pris avec son signe, s'il est impair avec le signe opposé.

Nous désignerons les cofacteurs des éléments a_1, b_1, c_1, a_2, etc., respectivement par A_1, B_1, C_1, A_2, etc.

EXEMPLE 1. L'élément b_1 du déterminant (1) se trouve à l'intersection de la première ligne et de la deuxième colonne. Comme $1 + 2 = 3$ est un nombre impair, on a $B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

EXEMPLE 2. Trouver le cofacteur de l'élément c_2.

SOLUTION. Supprimant la deuxième ligne et la troisième colonne, nous trouvons le mineur $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$ de l'élément c_2. Le numéro de la ligne de cet élément est 2, le numéro de la colonne 3. La somme $2 + 3$ est un nombre impair. C'est pourquoi $C_2 = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$.

EXEMPLE 3. Dans le déterminant (1) le cofacteur B_2 de l'élément b_2 est $+\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ($2 + 2$ est un nombre pair).

THÉORÈME 1. Le déterminant (1) est égal à la somme des produits des éléments d'une ligne quelconque par leurs cofacteurs, c'est-à-dire

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \tag{4}$$

$$\Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \tag{5}$$

$$\Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \tag{6}$$

La formule (4) est identique à (3), les formules (5) et (6) peuvent être directement vérifiées.

THÉORÈME 2. Le déterminant (1) est égal à la somme des produits des éléments d'une colonne quelconque par leurs cofacteurs, c'est-à-dire

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \tag{7}$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \tag{8}$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3. \tag{9}$$

Ces deux théorèmes facilitent le calcul du déterminant quand il y a des zéros parmi les éléments.

EXEMPLE 4. Pour calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

il est commode d'appliquer (5) ou (9).

La formule (5) donne:

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -3 \cdot 31 + 8 \cdot 12 = 3.$$

La formule (9) donne:

$$\Delta = -2\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 3.$$

EXEMPLE 5 Pour calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 11 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

le mieux est d'appliquer (6):

$$\Delta = -3\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot -8 = 24.$$

§ 183. Déterminants d'ordre supérieur

On appelle ***déterminant du quatrième ordre***

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \tag{1}$$

l'expression

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1, \tag{2}$$

où A_1, B_1, C_1, D_1 sont les cofacteurs (§ 182) des éléments a_1, b_1, c_1, d_1, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad B_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}, \\ C_1 &= \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix}, \quad D_1 = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

EXEMPLE 1. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

SOLUTION.

$$A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = 8, \quad B_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -16,$$

$$D_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -72$$

(comme $c_1 = 0$, il est inutile de calculer C_1),

$$\Delta = 6 \cdot 8 + 3(-16) + 3(-72) = -216.$$

Les théorèmes 1 et 2 du § 182 restent en vigueur pour les déterminants du quatrième ordre. On peut les réunir dans le théorème suivant:

THÉORÈME. Un déterminant est égal à la somme des produits des éléments d'une ligne (ou d'une colonne) par leurs cofacteurs, c'est-à-dire

$$\left.\begin{aligned} \Delta &= a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1, \\ \Delta &= a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 + d_2D_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta &= a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 + a_4A_4, \\ \Delta &= b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3 + b_4B_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

La première formule (4) coïncide avec la formule (2) que nous avons adoptée comme définition. On peut vérifier directement les autres formules bien que les calculs soient laborieux. Il existe également des démonstrations plus courtes.

EXEMPLE 2. Calculons le déterminant de l'exemple 1 en le développant suivant les éléments de la deuxième colonne. Nous avons:

$$\Delta = 3B_1 + 4B_2 + 4B_3 + 7B_4,$$

où

$$B_1 = -\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -16, \quad B_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -60,$$

$$B_3 = -\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} = -66, \quad B_4 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 48,$$

de sorte que $\Delta = 3 \cdot (-16) + 4 \cdot (-60) + 4 \cdot (-66) + 7 \cdot 48 = -216$.

EXEMPLE 3. Calculer le même déterminant en le développant suivant les éléments de la troisième ligne:

$$\Delta = 0 \cdot A_3 + 4B_3 + 4C_3 + 2D_3 =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \\ 7 & 7 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -216.$$

On appelle *déterminant du cinquième ordre*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & e_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 \\ a_5 & b_5 & c_5 & d_5 & e_5 \end{vmatrix} \tag{5}$$

l'expression

$$\Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 + d_1D_1 + e_1E_1, \tag{6}$$

où A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 sont les cofacteurs des éléments a_1, b_1, c_1, d_1, e_1; ces cofacteurs sont eux-mêmes des déterminants du quatrième ordre.

On définit d'une manière analogue les déterminants du 6[ième] ordre à l'aide des déterminants du cinquième ordre, etc.

Le théorème du présent paragraphe est valable pour un déterminant d'ordre quelconque.

§ 184. Propriétés des déterminants

1. La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on remplace chaque ligne par une colonne de même numéro.

EXEMPLE 1.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

EXEMPLE 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. Si on échange, élément à élément, deux lignes ou deux colonnes d'un déterminant, il change de signe en gardant la même valeur absolue.

EXEMPLE 3.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

(la deuxième et la troisième ligne sont interverties; cf. § 117, 1).

EXEMPLE 4.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

(la première et la troisième colonne sont interverties).

3. Un déterminant dont les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) sont respectivement proportionnels aux éléments d'une autre ligne (d'une autre colonne) est nul. En particulier, un déterminant qui a deux lignes (deux colonnes) identiques est nul.

EXEMPLE 5.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -5 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

(la deuxième et la troisième colonne sont identiques).

EXEMPLE 6.

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ 3a & 3a' & 3a'' \end{vmatrix} = 0$$

(les éléments de la troisième ligne sont proportionnels aux éléments de la première ligne; cf. § 117, 1, 3, 4).

4. Si tous les éléments d'une ligne (ou d'une colonne) contiennent un même facteur, on peut le mettre en facteur commun dans le déterminant.

EXEMPLE 7.

$$\begin{vmatrix} ma & ma' & ma'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$$

(cf. § 117, 3).

5. Si chaque élément d'une colonne (d'une ligne) est la somme de deux termes, le déterminant est égal à la somme de deux déterminants: dans l'un on remplace chaque somme par le premier terme et dans l'autre par le second (les autres éléments dans les deux déterminants sont les mêmes que dans le déterminant initial).

EXEMPLE 8.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 + c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 + c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 + c_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

(cf. § 117, 2).

6. Si à chaque élément d'une colonne on ajoute des quantités proportionnelles aux éléments correspondants d'une autre colonne, la valeur du déterminant ne change pas. Il en est de même pour les lignes.

EXEMPLE 9. Le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ est égal à 12. Ajoutons aux éléments de la première ligne les éléments de la deuxième. Nous obtenons: $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. Ce déterminant est aussi égal à 12, mais il se calcule plus facilement (dans son développement suivant les éléments de la première ligne deux termes sont nuls).

EXEMPLE 10. Pour calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

ajoutons aux éléments de la première colonne ceux de la deuxième multipliés par -2. Nous obtenons: $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -7 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$. On calcule aisément ce déterminant en le développant suivant les éléments de la première colonne [§ 182, formule (7)]. Nous obtenons:

$$7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -77.$$

EXEMPLE 11. Pour calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 7 & 7 & 8 & 5 \end{vmatrix}$$

retranchons des éléments de la deuxième colonne les éléments de la troisième. Nous obtenons:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & -1 & 8 & 5 \end{vmatrix}.$$

Retranchons maintenant des éléments de la troisième colonne les éléments de la quatrième, multipliés par 2. Nous obtenons:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & -1 & -2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Développant suivant les éléments de la troisième ligne nous obtenons (comme dans l'exemple 1 § 183):

$$-2\begin{vmatrix} 6 & 3 & -6 \\ 4 & 2 & 0 \\ 7 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -216.$$

§ 185. Calcul pratique des déterminants

Le procédé de calcul ci-dessous est particulièrement commode si les éléments du déterminant sont des nombres entiers.

Choisissons la ligne (ou la colonne) suivant les éléments de laquelle nous voulons réaliser le développement. Il est souhaitable qu'elle comporte un zéro. Le procédé a pour but de faire apparaître dans la ligne choisie de nouveaux zéros. Pour cela on applique la propriété 6 § 184.

EXEMPLE 1. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Développons-le suivant les éléments de la deuxième ligne (elle comporte un zéro). Faisons apparaître (à la place de l'élément 6) encore

un zéro. Pour cela multiplions les éléments de la troisième colonne par 3 pour les retrancher de la deuxième. Nous obtenons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -80.$$

Effectuons maintenant le développement suivant les éléments de la première colonne comportant déjà un zéro. Faisons apparaître dans cette colonne (à la place de l'élément 7) encore un zéro. Pour cela multiplions les éléments de la première ligne par $\frac{7}{2}$ pour les retrancher de la troisième. Nous obtenons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & -\frac{29}{2} & -\frac{23}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 29 & 23 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot 2 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 29 & 23 \end{vmatrix} = -80.$$

REMARQUE. On a pu prévoir que le premier procédé est plus commode: dans la deuxième ligne l'élément 6 est un multiple de l'élément 2, alors que dans la première colonne l'élément 7 n'est pas un multiple de l'élément 2. Il serait bon si dans la ligne (ou la colonne) choisie tous les éléments soient multiples de l'un d'eux. Si l'un des éléments est égal à 1 ou — 1, il convient de choisir la ligne ou la colonne contenant cet élément.

EXEMPLE 2. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Nous choisissons la troisième colonne (elle comporte 0 et 1). Pour faire apparaître un zéro à la place de l'élément 4, retranchons les éléments de la troisième ligne (elle contient l'élément 1 de la colonne choisie) multipliés par 4 des éléments de la première ligne. La première ligne devient

$$-9 \quad 6 \quad 0 \quad -15.$$

Pour faire apparaître un zéro à la place de l'élément — 2 dans la troisième colonne, ajoutons les éléments de la troisième ligne multipliés par 2 aux éléments de la quatrième. Cette dernière devient

$$7 \quad -3 \quad 0 \quad 7.$$

Nous obtenons alors, en développant suivant les éléments de la troisième colonne,

$$\Delta = \begin{vmatrix} -9 & 6 & 0 & -15 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 7 & -3 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -9 & 6 & -15 \\ 2 & 3 & 6 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant du troisième ordre tous les éléments de la deuxième colonne sont multiples de l'élément — 3. C'est pourquoi nous ajoutons les éléments de la troisième ligne (qui contient l'élément — 3) aux éléments de la deuxième, puis, en les multipliant par 2, aux éléments de la première ligne. Nous obtenons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 13 \\ 7 & -3 & 7 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 9 & 13 \end{vmatrix} \cdot (-3) = 222.$$

EXEMPLE 3. Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ -3 & -2 & 6 & -4 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Il ne contient pas de zéros, mais on peut facilement faire apparaître deux zéros dans a deuxième ligne; il suffit pour cela de lui ajouter les éléments de la première ligne. Nous obtenons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & -3 & 2 \\ 2 & 6 & -5 & 3 \end{vmatrix}.$$

On peut maintenant faire apparaître encore un zéro dans la deuxième ligne, multipliant les éléments de la deuxième colonne par $\frac{4}{5}$ puis les retranchant de la troisième. Mais il est plus commode de créer préalablement un 1 dans la deuxième ligne. Il suffit pour cela de retrancher des éléments de la deuxième colonne les éléments de la troisième. Nous obtenons:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 8 & -3 & 2 \\ 2 & 11 & -5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 9 & -38 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -35 & 2 \\ 2 & 11 & -49 & 3 \end{vmatrix}$$

(nous avons retranché des éléments de la troisième colonne les éléments de la deuxième après les avoir multipliés par 4). Nous obtenons maintenant:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -38 & 4 \\ 5 & -35 & 2 \\ 2 & -49 & 3 \end{vmatrix} = -303.$$

§ 186. Application des déterminants à l'étude et la résolution des systèmes d'équations

Les déterminants ont été introduits pour la première fois pour la résolution des systèmes d'équations du premier degré. En 1750, Cramer proposa des formules générales exprimant les inconnues en fonction

des déterminants formés des coefficients du système. Une centaine d'années après la théorie des déterminants sortit du cadre de l'algèbre et fut appliquée dans toutes les branches de la science mathématique.

Dans les paragraphes suivants nous donnons les éléments de l'étude et de la résolution des systèmes d'équations du premier degré; pour plus de clarté nous indiquons partout les liens avec la géométrie analytique.

§ 187. Deux équations à deux inconnues

Considérons le système d'équations

$$a_1x + b_1y = h_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y = h_2 \tag{2}$$

(chacune d'elles représente une droite dans le plan XOY; cf. § 19).

Introduisons les notations

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \textit{(déterminant du système)}, \tag{3}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Le déterminant Δ_x s'obtient de Δ en remplaçant les éléments de la première colonne par les termes indépendants des inconnues; le déterminant Δ_y s'obtient d'une manière analogue.

Trois cas sont possibles.

CAS 1. Le déterminant du système n'est pas nul: $\Delta \neq 0$.

Le système possède alors une solution unique

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} \tag{5}$$

[les droites (1) et (2) se coupent, les formules (5) donnent les coordonnées du point d'intersection].

CAS 2. Le déterminant du système est nul: $\Delta = 0$ (autrement dit, les coefficients des inconnues sont proportionnels). Supposons de plus que l'un des déterminants Δ_x, Δ_y n'est pas nul (autrement dit, les termes indépendants des inconnues ne sont pas proportionnels aux coefficients des inconnues).

Dans ce cas, le système n'a pas de solutions [les droites (1) et (2) sont parallèles, mais non confondues].

CAS 3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$ (autrement dit, les coefficients et les termes indépendants des inconnues sont proportionnels).

Dans ce cas, l'une des équations (1), (2) découle de l'autre; le système se ramène à une seule équation à deux inconnues et possède une infinité de solutions [les droites (1) et (2) sont confondues].

EXEMPLE 1.

$$2x + 3y = 8, \qquad 7x - 5y = -3.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -31, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -31,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -62.$$

Le système possède une solution unique

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = 2.$$

EXEMPLE 2.

$$2x + 3y = 8, \qquad 4x + 6y = 10.$$

Ici $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0$. En outre $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$.

Les coefficients sont proportionnels et les termes indépendants des inconnues ne le sont pas. Le système n'a pas de solutions.

EXEMPLE 3.

$$2x + 3y = 8, \qquad 4x + 6y = 16.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 16 & 6 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

L'une des équations se déduit de l'autre (par exemple la seconde s'obtient en multipliant la première par 2). Le système se réduit à une seule équation et possède une infinité de solutions s'exprimant par la formule

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3} \quad \left(\text{ou } x = -\frac{3}{2}y + 4\right).$$

§ 188. Deux équations à trois inconnues

Considérons le système d'équations

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = h_2 \qquad (2)$$

(chacune représente un plan dans l'espace; cf. § 141).

Trois cas sont possibles.

Cas 1. L'un au moins des trois déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \tag{3}$$

n'est pas nul, autrement dit les coefficients des inconnues ne sont pas proportionnels. Le système possède alors une infinité de solutions et on peut donner une valeur arbitraire à *l'une* des inconnues. Par exemple, si $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, on peut donner à l'inconnue z une valeur arbitraire; les inconnues x, y sont alors déterminées univoquement (§ 187, 1) à partir du système

$$a_1x + b_1y = h_1 - c_1z,$$

$$a_2x + b_2y = h_2 - c_2z$$

[les plans (1) et (2) ne sont pas parallèles, le système représente une droite, les grandeurs (3) sont les coefficients de direction (§ 143)].

Cas 2. Tous les déterminants (3) sont nuls, mais l'un des déterminants

$$\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & h_1 \\ b_2 & h_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_1 & h_1 \\ c_2 & h_2 \end{vmatrix} \tag{4}$$

n'est pas nul, autrement dit les coefficients des inconnues sont proportionnels, mais les termes indépendants des inconnues ne le sont pas. Dans ce cas, le système n'a pas de solutions [les plans (1) et (2) sont parallèles, mais non confondus].

Cas 3. Tous les déterminants (3) et (4) sont nuls, autrement dit les coefficients et les termes indépendants des inconnues sont proportionnels. Le système se réduit alors à une seule équation et possède une infinité de solutions; de plus, on peut donner des valeurs arbitraires à *deux* inconnues. Par exemple, si $c_1 \neq 0$, on peut donner des valeurs arbitraires à x, y [les plans (1) et (2) sont confondus].

Exemple 1. Résoudre le système

$$x - 2y - z = 15, \qquad 2x - 4y + 2z = 2.$$

Ici

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Parmi ces déterminants il y en a qui ne sont pas nuls. Donc le système possède une infinité de solutions. On peut donner une

valeur arbitraire à l'inconnue x ou à l'inconnue y, car $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ et $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0$. *On ne peut donner une valeur arbitraire à l'inconnue* z (cf. § 142, exemple 5).

Résolvons le système par rapport à y et z. Nous avons:

$$-2y - z = 15 - x, \qquad -4y + 2z = 2 - 2x.$$

Nous en tirons

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 15 - x & -1 \\ 2 - 2x & 2 \end{vmatrix}}{-8} = -4 + \frac{1}{2}x, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 15 - x \\ -4 & 2 - 2x \end{vmatrix}}{-8} = -7.$$

(Le système représente une droite perpendiculaire à l'axe OZ.)

EXEMPLE 2. Le système

$$7x - 4y + z = 5, \qquad 21x - 12y + 3z = 12$$

ne possède pas de solutions, car tous les déterminants (3) sont nuls (les coefficients des inconnues sont proportionnels), et le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 21 & 12 \end{vmatrix}$ n'est pas nul (les termes indépendants des inconnues ne sont pas proportionnels aux coefficients).

(Les plans sont parallèles, mais non confondus.)

EXEMPLE 3. Résoudre le système

$$7x - 4y + z = 5, \qquad 21x - 12y + 3z = 15.$$

Ici les coefficients et les termes indépendants des inconnues sont proportionnels. Le système se réduit à une seule équation. On peut donner à chaque couple d'inconnues (disons y et x) des valeurs arbitraires (alors $z = 5 - 7x + 4y$). (Les plans sont confondus.)

§ 189. Système homogène de deux équations à trois inconnues

Un système d'équations du premier degré est dit *homogène* si dans chaque équation le terme indépendant des inconnues est nul.

Considérons le système homogène

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \qquad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0. \qquad (2)$$

C'est un cas particulier du système du § 188. Sa particularité est que *le cas 2 n'est plus possible* [les déterminants (4) du § 188 sont toujours nuls]. Le système (1)-(2) possède toujours une infinité de solutions.

[Les plans (1) et (2) passent par l'origine des coordonnées et, par conséquent, ou bien se coupent ou bien sont confondus.]

CAS 1. Les coefficients ne sont pas proportionnels, autrement dit, l'un au moins des trois déterminants (3) du § 188 n'est pas nul. On peut alors écrire la solution sous une forme symétrique

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \qquad y = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} t, \qquad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \qquad (3)$$

(le paramètre t est un nombre arbitraire; cf. § 152). [Les équations paramétriques (3) représentent la droite d'intersection des plans (1) et (2).]

CAS 2. Les coefficients sont proportionnels, c'est-à-dire tous les déterminants $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ sont nuls.

Le système se réduit à une seule équation (les plans sont confondus).

EXEMPLE 1. Résoudre le système

$$2x - 5y + 8z = 0, \qquad x + 4y - 3z = 0.$$

Ici

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & 8 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -17, \quad \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13.$$

Nous avons en vertu de (3):

$$x = -17t, \qquad y = 14t, \qquad z = 13t.$$

Dans cet exemple on peut donner une valeur arbitraire à l'une (quelconque) des inconnues. Par exemple, posant $z = 39$, nous trouvons $t =$ $= 3$, d'où $x = -51$, $y = 42$.

EXEMPLE 2. Résoudre le système

$$x - 2y - z = 0, \qquad 2x - 4y + 2z = 0.$$

Ici

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = -8, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = -4, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$x = -8t, \qquad y = -4t, \qquad z = 0.$$

On peut donner une valeur arbitraire à l'une des inconnues x, y, *mais non à l'inconnue* z. Cette dernière ne peut être égale qu'à zéro (la droite est située dans le plan XOY).

EXEMPLE 3. Le système

$$7x - 4y + z = 0, \qquad 21x - 12y + 3z = 0$$

se réduit à une seule équation. On peut donner des valeurs arbitraires à *tout couple* d'inconnues.

§ 190. Trois équations à trois inconnues

Considérons le système

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1, \tag{1}$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = h_2, \tag{2}$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = h_3. \tag{3}$$

Introduisons les notations

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{(déterminant du système)}, \tag{4}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Le déterminant Δ_x s'obtient de Δ en remplaçant les éléments de la première colonne par les termes indépendants des inconnues. On obtient d'une manière analogue Δ_y et Δ_z.

Si les éléments correspondants de deux lignes quelconques du déterminant Δ, disons ceux de la première et de la deuxième, étaient proportionnels, alors les équations (1) et (2) seraient incompatibles

(§ 188, 2) ou bien se réduiraient à une seule équation (§ 188, 3). Dans le premier cas, le système considéré n'a pas de solutions, dans le second cas au lieu du système considéré nous obtenons le système des deux équations (1) et (3) (ce système peut à son tour se réduire à une équation). Vu que nous avons déjà considéré tout cela au § 188, on peut se borner à l'hypothèse que dans le déterminant Δ *il n'y a aucun couple de lignes à éléments proportionnels* [parmi les trois plans (1), (2), (3) il n'y a pas de couple de plans parallèles].

Dans cette hypothèse trois cas sont possibles.

CAS 1. Le déterminant du système n'est pas nul

$$\Delta \neq 0.$$

Le système possède une solution unique:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{6}$$

(Les trois plans se coupent en un point.)

CAS 2. Le déterminant du système est nul: $\Delta = 0$; de plus, l'un des déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z n'est pas nul, alors les deux autres déterminants ne sont pas nuls non plus [*]:

$$\Delta_x \neq 0, \qquad \Delta_y \neq 0, \qquad \Delta_z \neq 0.$$

Dans ce cas le système n'a pas de solutions.

[L'égalité $\Delta = 0$ signifie que les vecteurs normaux des plans (1), (2), (3) sont coplanaires, donc les trois plans sont parallèles à une même droite. Dans le cas considéré les trois plans forment une surface prismatique (fig. 202).]

CAS 3. $\Delta = 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Dans ce cas, l'une des trois équations (n'importe laquelle) se déduit des deux autres. Le système se réduit à deux équations à trois inconnues et possède une infinité de solutions (§ 188, cas 1; les cas 2 et 3 ne peuvent se présenter du fait de l'hypothèse adoptée).

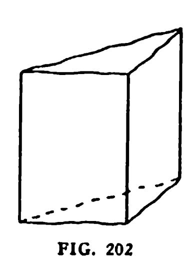
(De même que dans le cas précédent, les trois plans sont parallèles à une même droite, mais ils forment un faisceau; fig. 203.)

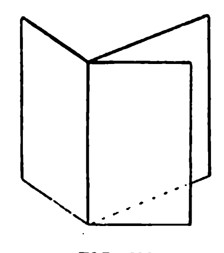
EXEMPLE 1. Résoudre le système

$$3x + 4y + 2z = 5, \qquad 5x - 6y - 4z = -3, \qquad -4x + 5y + 3z = 1.$$

---

[*] Si les éléments correspondants de deux lignes du déterminant Δ sont proportionnels (nous avons exclu ce cas), il peut s'avérer que des trois déterminants Δ_x, Δ_y, Δ_z un seul ou deux sont nuls.


FIG. 202


FIG. 203

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60.$$

Le système possède une solution unique:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 1, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -2, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 5.$$

Exemple 2. Résoudre le système

$$x + y + z = 5, \qquad x - y + z = 1, \qquad x + z = 2.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

(il est inutile de calculer les déterminants Δ_y et Δ_z (*)). Le système ne possède pas de solutions. On peut s'en convaincre directement: additionnant terme à terme les deux premières équations,

(*) Les lignes du déterminant Δ ne sont pas proportionnelles deux à deux; cf. le renvoi précédent.

nous obtenons $2x + 2z = 6$, c'est-à-dire $x + z = 3$, ce qui contredit la troisième équation.

EXEMPLE 3. Résoudre le système

$$x + y + z = 5, \quad x - y + z = 1, \quad x + z = 3.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les déterminants Δ_y et Δ_z sont évidemment nuls (*).

Le système considéré se réduit à un système de deux équations (n'importe quel couple des trois équations données, la troisième découlant des deux autres) et possède une infinité de solutions. On peut donner une valeur arbitraire à l'une des inconnues x, z (mais non à y; cf. § 188, 1).

Prenons la première et la troisième équation et résolvons-les en x et z. Nous avons:

$$x + y = 5 - z, \quad x = 3 - z.$$

Nous en tirons

$$x = 3 - z, \quad y = 2.$$

REMARQUE. Si le système de trois équations à trois inconnues est homogène ($h_1 = h_2 = h_3 = 0$), le second cas est impossible. Dans le premier cas l'unique solution est $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ (les plans se coupent à l'origine des coordonnées). Dans le troisième cas, en prenant deux quelconques des équations du système, disons (1) et (2), nous trouvons toutes les solutions du système donné d'après les formules (3) du § 189 (les trois plans forment un faisceau dont l'axe passe par l'origine des coordonnées).

EXEMPLE 4. Résoudre le système

$$x + y + z = 0, \quad 3x - y + 2z = 0, \quad x - 3y = 0.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

(*) Les lignes du déterminant Δ ne sont pas proportionnelles deux à deux; cf. le renvoi page 243.

L'une des équations découle des deux autres. On peut donner une valeur arbitraire à l'une quelconque des inconnues. En prenant la première et la troisième équation, nous trouvons d'après les formules (3) du § 189:

$$x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} t = 3t, \qquad y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} t = t, \qquad z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} t = -4t.$$

§ 190a. Systèmes de n équations à n inconnues

Il est trop difficile d'énumérer tous les cas possibles. C'est pourquoi nous nous bornons aux données suivantes.

Soit donné un système de n équations à n inconnues

$$\left.\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots + f_1u = h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots + f_2u = h_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny + c_nz + \ldots + f_nu = h_n. \end{array}\right\} \quad (1)$$

1. Si le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \ldots & f_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ldots & f_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & b_n & c_n & \ldots & f_n \end{vmatrix} \text{(déterminant du système)} \quad (2)$$

n'est pas nul, le système possède une solution unique

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad \ldots, \quad u = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad (3)$$

où Δ_x est le déterminant que l'on obtient de Δ en remplaçant respectivement les éléments $a_1, a_2, \ldots, a_n$ par les termes indépendants des inconnues $h_1, h_2, \ldots, h_n$; on obtient de manière analogue les déterminants $\Delta_y, \Delta_z, \ldots, \Delta_u$.

2. Si $\Delta = 0$ et si parmi les déterminants $\Delta_x, \Delta_y, \ldots, \Delta_u$ il y en a qui ne sont pas nuls, le système n'a pas de solutions.

3. Supposons maintenant que $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \ldots = \Delta_u = 0$ et que l'un des mineurs du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre du déterminant Δ (par exemple le mineur que l'on obtient en supprimant la deuxième ligne et la troisième colonne) n'est pas nul. Le système se réduit alors à $n-1$ équations; l'une des équations (la seconde, ce qui correspond au numéro de la ligne) découle des autres. On peut donner à l'une des inconnues (à l'inconnue z, ce qui correspond au numéro de la colonne) une valeur arbitraire. Les autres $n-1$ inconnues sont déterminées d'une manière unique à partir du système de $n-1$ équations.

Remarque. Dans le cas où tous les déterminants du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre représentant les mineurs du déterminant Δ sont nuls, le système peut ne pas avoir de solutions et peut se réduire à $n-2$ ou à un plus petit nombre d'équations.

Exemple 1. Résoudre le système

$$3x + 7y - 2z + 4u = 3,$$
$$-3x - 2y + 6z - 4u = 11,$$
$$5x + 5y - 3z + 2u = 6,$$
$$2x + 6y - 5z + 3u = 0.$$

Le déterminant du système Δ (cf. § 185, exemple 3) est égal à -303. Appliquant les procédés donnés au § 185, nous trouvons:

$$\Delta_x = -303, \quad \Delta_y = -606, \quad \Delta_z = -303, \quad \Delta_u = 909.$$

Nous avons alors en vertu des formules (3):

$$x = 1, \ y = 2, \ z = 1, \ u = -3.$$

Exemple 2. Résoudre le système

$$x - y + 2z - u = 1,$$
$$x + y + z + u = 4,$$
$$2x + 3y - 5u = 0.$$
$$5x + 2y + 5z - 6u = 0.$$

Ici

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \\ 5 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Par ailleurs, nous obtenons

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 2 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 144 \neq 0.$$

C'est pourquoi le système n'a pas de solutions (si l'on multiplie la première équation par 2 et que l'on ajoute l'équation obtenue à la seconde et à la troisième, on obtient $5x + 2y + 5z - 6u = 6$, ce qui contredit la quatrième équation).

Exemple 3. Résoudre le système

$$x - y + 2z - u = 1,$$
$$x + y + z + u = 4,$$
$$2x + 3y - 5u = 0,$$
$$5x + 2y + 5z - 6u = 6.$$

Ici

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta_u = 0.$$

Supprimant la quatrième ligne et la quatrième colonne nous obtenons le mineur:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Le système se réduit à trois équations:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - u &= 1, \\ x + y + z + u &= 4, \\ 2x + 3y - 5u &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

La quatrième équation découle de celles-ci (cf. exemple 2). On peut donner à u une valeur arbitraire. Nous trouvons de (4):

$$x = \frac{-24u + 21}{-3}, \quad y = \frac{11u - 14}{-3}, \quad z = \frac{16u - 19}{-3}.$$

TROISIÈME PARTIE

Notions fondamentales de l'analyse

§ 191. Remarques préliminaires

On appelle analyse mathématique le système de disciplines aux caractéristiques suivantes.

Leur étude porte sur les relations quantitatives du monde réel (à la différence des disciplines géométriques qui s'occupent de ses propriétés spatiales). Ces relations sont exprimées à l'aide de grandeurs *numériques* comme en arithmétique. Toutefois si en arithmétique (et en algèbre) on considère principalement des grandeurs constantes (elles caractérisent les *états*), en analyse, par contre, on étudie des grandeurs variables (elles caractérisent les *processus*; § 195). A la base de l'étude des relations entre les grandeurs variables on pose la notion de *fonction* (§ 196) et de *limite* (§§ 203-206).

Nous considérons dans cet ouvrage les branches suivantes de l'analyse: le calcul différentiel, le calcul intégral, la théorie des séries et la théorie des équations différentielles. Nous préciserons l'objet de chacune de ces branches en temps et lieu.

Nous devons les premiers éléments des méthodes de l'analyse aux mathématiciens de la Grèce antique (Archimède). Ces méthodes connurent un développement systématique au XVII[e] siècle. A la limite du XVII[e] et du XVIII[e] siècle Newton et Leibniz créèrent dans ses grandes lignes le calcul différentiel et intégral et posèrent les bases des théories des séries et des équations différentielles. Au XVIII[e] siècle Euler élabora les deux dernières branches et posa les fondements des autres chapitres de l'analyse mathématique.

A la fin du XVIII[e] siècle un énorme matériel avait été recueilli, mais il était insuffisamment élaboré du point de vue logique. Cette lacune fut comblée par les efforts des grands savants du XIX[e] siècle tels que Cauchy en France, Lobatchevski en Russie, Abel en Norvège, Riemann en Allemagne, etc.

§ 192. Nombres rationnels

Les premières notions de nombres apparurent lorsqu'on commença à compter les objets, ce qui donna les nombres 1, 2, 3, etc., qu'on appelle aujourd'hui nombres *naturels*. Plus tard apparut la notion de *fraction*; la source en fut la mesure des grandeurs continues (longueur, poids, etc.). Les *nombres négatifs* ainsi que le nombre *zéro* firent leur apparition en mathématiques avec le développement de l'algèbre.

Les nombres entiers (c'est-à-dire les nombres naturels 1, 2, 3, etc., — 1, — 2, — 3, etc. et le zéro) et les fractions sont appelés *nombres rationnels* (à la différence des *nombres irrationnels*; § 193). Tout nombre rationnel peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$ (où p et q sont des nombres entiers).

§ 193. Nombres réels

EN PRATIQUE, les mesures sont effectuées à l'aide d'un instrument. Leur résultat s'exprime par un nombre rationnel (par exemple, l'épaisseur d'un fil métallique, mesurée à l'aide d'un micromètre, s'exprime en millimètres, disons par le nombre 0,023). Tout instrument possède une précision limitée. C'est pourquoi pour les activités des hommes la réserve des nombres rationnels est plus que suffisante. Toutefois, dans la THÉORIE mathématique où les mesures sont supposées d'une exactitude absolue on ne peut se limiter aux seuls nombres rationnels. Ainsi, aucun nombre rationnel ne permet d'exprimer de façon exacte la longueur de la diagonale du carré dont le côté est pris pour unité de longueur, non plus que le sinus d'un angle de 60°, le cosinus d'un angle de 22°, la tangente d'un angle de 17°, le rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre, etc. En général, le rapport des segments incommensurables ne peut être exprimé exactement par un nombre rationnel, et, pour l'exprimer exactement, il faut introduire de nouveaux nombres, les nombres *irrationnels* [*]. Un nombre irrationnel

---

[*] Le rapport des segments commensurables peut être exprimé par le rapport des nombres entiers, ce qui n'est pas possible pour des segments incommensurables. Les mathématiciens de la Grèce antique n'avaient considéré au début que les rapports des nombres entiers. C'est pourquoi, quand on découvrit les grandeurs incommensurables, on les appela irrationnelles, c'est-à-dire « ne possédant pas de rapport » (le terme latin « irrationnel » est la traduction du grec « alogos »). Plus tard (au IV[e] siècle avant J.-C.) les mathématiciens grecs (Eudoxe et après lui Euclide) considérèrent les rapports des grandeurs incommensurables. Quand de nouveaux nombres furent introduits pour exprimer ces rapports, on les appela également irrationnels.

exprime la *longueur d'un segment incommensurable avec l'unité de mesure*. Les nombres rationnels et les nombres irrationnels forment l'ensemble des nombres *réels* (à la différence des nombres *imaginaires*; cf. remarque 2). A l'aide des nombres réels on peut exprimer exactement la longueur de n'importe quel segment.

Un nombre irrationnel ne peut être exactement égal à un nombre rationnel. Toutefois, pour tout nombre irrationnel on peut trouver des nombres rationnels (en particulier décimaux) aussi approchés que l'on veut (par excès ou par défaut).

EXEMPLE. Pour le nombre (irrationnel) lg 3 on peut trouver la valeur approchée 0,4771 (par défaut) ou 0,4772 (par excès); leur différence est 0,0001, de sorte que l'erreur de chacune d'elles n'est pas supérieure à 0,0001. Si l'on demande que cette erreur ne soit pas supérieure à 0,00001, on peut trouver les valeurs 0,47712 (par défaut) et 0,47713 (par excès). On verra plus loin (§§ 242 et 272) les divers procédés de calcul des logarithmes.

REMARQUE 1. Parfois les nombres rationnels s'expriment aussi par leur valeur approchée. Ainsi, au lieu de la fraction $\frac{1}{3}$, on prend souvent les valeurs approchées (par défaut) 0,33, 0,333, etc. (suivant le degré d'exactitude imposé) ou les valeurs approchées (par excès) 0,34, 0,334, etc.

REMARQUE 2. Un nombre *imaginaire* est de la forme bi, où b est un nombre réel et i l'« unité imaginaire », définie par l'égalité $i^2 = -1$ (aucun nombre réel ne vérifie cette égalité). L'expression de la forme $a + bi$ est appelée nombre *complexe*. Les nombres complexes ont été introduits en algèbre vers le milieu du XVIe siècle lors de la résolution de l'équation cubique. Depuis la fin du XVIIe siècle ils sont appliqués également en analyse.

Dans ce livre, sauf indication contraire, tous les nombres sont supposés réels.

§ 194. Droite numérique

Choisissons sur la droite $X'X$ (fig. 204) une origine O, une unité graphique OA et un sens positif (disons de X' à X). Alors à chaque nombre réel x correspond un point déterminé M dont l'abscisse est égale à x.

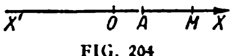


FIG. 204

En analyse (pour plus de clarté) les nombres sont représentés par des points de la manière que nous venons d'indiquer. La droite $X'X$ sur laquelle ces points sont pris est appelée *droite numérique*.

§ 195. Grandeurs constantes et variables

Une grandeur est dite variable si, dans les conditions de la question considérée, elle prend *diverses* valeurs. A la différence de la grandeur variable, une grandeur est dite constante si, dans les conditions de la question considérée, elle conserve *la même valeur*. Une même grandeur peut être constante dans un problème et variable dans un autre.

EXEMPLE 1. La température T d'ébullition de l'eau est une grandeur constante dans la plupart des problèmes physiques. Toutefois, si l'on doit tenir compte de la variation de la pression atmosphérique, T est une grandeur variable.

EXEMPLE 2. Dans l'équation de la parabole $y^2 = 2px$ les coordonnées x, y sont des grandeurs variables. Le paramètre p est une grandeur constante si nous considérons une seule parabole. Si par contre nous considérons l'ensemble des paraboles d'axe commun OX et de même sommet O, le paramètre p est une grandeur variable.

On désigne habituellement les grandeurs variables par les dernières lettres de l'alphabet latin (x, y, z, u, v, w) et les constantes par les premières lettres a, b, c, ...

§ 196. Fonction

DÉFINITION 1. On dit que la grandeur y est une *fonction* de la variable x si à chacune des valeurs que peut prendre x il correspond une ou plusieurs valeurs déterminées de y. La variable x est alors appelée *argument* de la fonction y.

On dit également que la grandeur y *dépend* de la grandeur x, la fonction est appelée alors variable *dépendante* et l'argument variable *indépendante*.

EXEMPLE 1. Soient T la température d'ébullition de l'eau et p la pression atmosphérique. Les observations montrent qu'à chaque valeur que peut prendre p correspond toujours une valeur de T. Par conséquent, T est une fonction de l'argument p.

Cette dépendance permet, en observant la température d'ébullition de l'eau, de déterminer sans baromètre la pression d'après la table (dont nous donnons un extrait):

Table 1

T °c	70	75	80	85	90	95	100
p mm	234	289	355	434	526	634	760

De son côté p est une fonction de l'argument T; cette dépendance permet, en observant la pression, de déterminer sans thermomètre la température d'ébullition de l'eau d'après la même table 1. Il est toutefois plus commode d'utiliser une table de la forme suivante:

Table 2

p mm	300	350	400	450	500	550	600	650	700
T °c	75,8	79,6	83,0	85,9	88,7	91,2	93,5	95,7	97,7

p croît ici à intervalles réguliers (de même que l'argument T dans la table 1).

Remarque 1. On peut compléter la table 1 par d'autres valeurs de l'argument T, disons 65°, 73°, 104°. Il existe toutefois des valeurs que la température d'ébullition de l'eau ne peut prendre; elle ne peut ainsi être inférieure au « zéro absolu » (— 273°). A la valeur impossible $T = -300°$ ne correspond, bien entendu, aucune valeur de p. C'est pourquoi il est précisé dans la définition 1: « à chacune des valeurs que *peut* prendre x ... » (et non « à chaque valeur de x ... »).

Exemple 2. Un corps est lancé verticalement; soient s l'altitude atteinte et t le temps écoulé depuis le départ du corps.

La grandeur s est une fonction de l'argument t, car à chaque instant le corps se trouve à une hauteur déterminée. De son côté t est une fonction de s, car à chaque hauteur où le corps peut se trouver correspondent deux valeurs de t (l'une quand le corps monte, l'autre quand il descend).

Définition 2. La fonction est dite *uniforme* (ou à une détermination) si à chaque valeur de l'argument correspond une seule valeur de la fonction, et *multiforme* (ou à plusieurs déterminations) si à une valeur de x correspondent deux ou un plus grand nombre de valeurs de y (à deux, trois déterminations).

Dans le second exemple s est une fonction uniforme de l'argument t et t une fonction biforme de l'argument s.

Si l'on ne mentionne pas spécialement que la fonction est multiforme, on sous-entend qu'elle est uniforme.

EXEMPLE 3. La somme (s) des angles d'un polygone est une fonction du nombre (n) de côtés. L'argument n ne peut prendre que des valeurs entières non inférieures à 3. Cette dépendance s'exprime par la formule

$$s = \pi(n - 2)$$

(on a adopté le radian en qualité d'unité d'angle). D'autre part, n est une fonction de l'argument s, cette dépendance s'exprime par la formule

$$n = \frac{s}{\pi} + 2.$$

L'argument s ne peut prendre que des valeurs multiples de π (π, 2π, 3π, etc.).

EXEMPLE 4. Le côté x du carré est une fonction de son aire $S(x = \sqrt{S})$. L'argument peut prendre n'importe quelles valeurs positives.

REMARQUE 2. L'argument est toujours une grandeur variable. En règle générale la fonction est aussi une grandeur variable, mais il n'est pas exclu qu'elle soit constante. Ainsi, la distance d'un point mobile à un point fixe est une fonction du temps et en règle générale varie. Toutefois, quand le point décrit une circonférence, sa distance au centre est constante.

Dans le cas où la fonction est une grandeur constante, on ne peut intervertir les rôles de la fonction et de l'argument (dans notre exemple la durée du mouvement suivant une circonférence n'est pas une fonction de la distance au centre).

§ 197. Modes de définition d'une fonction

On estime que la fonction est donnée (connue) si pour chaque valeur de l'argument (parmi les valeurs possibles) on peut connaître la valeur correspondante de la fonction. On peut donner une fonction soit sous forme de tables, soit sous forme graphique, ou encore sous forme analytique.

a) *Tables.* Ce procédé est bien connu (tables de logarithmes, de racines carrées, etc.; cf. également exemple 1 § 196). Il donne directement la valeur numérique de la fonction. C'est là son avantage.

Les inconvénients du procédé sont les suivants: 1) on peut difficilement se faire une idée d'ensemble de la table ; 2) souvent la table ne contient pas les valeurs de l'argument qui nous intéressent.

b) La *représentation graphique* consiste à tracer une courbe (le graphe, la courbe représentative) dont les abscisses représentent les valeurs de l'argument et les ordonnées les valeurs correspondantes de la fonction. Pour la commodité de la représentation, les échelles varient souvent selon les axes.

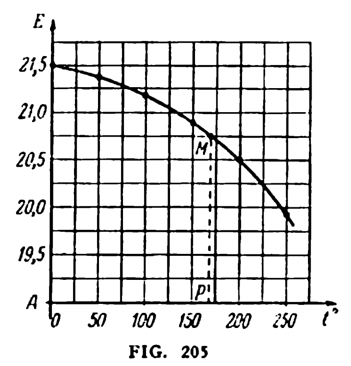


FIG. 205

Exemple 1. Sur la fig. 205 on a représenté la relation entre le module d'élasticité E du fer forgé (en t/cm²) et la température t du fer. Les échelles des abscisses (t) et des ordonnées (E) sont désignées par des chiffres. On peut lire par exemple sur le graphique que pour $t =$ $= 170°$, le module d'élasticité $E \approx 20{,}75$ t/cm².

L'avantage de la représentation graphique est de permettre une vue d'ensemble et la continuité de variation de l'argument ; ses inconvénients sont le degré d'exactitude limité et la difficulté de lire les valeurs de la fonction avec la précision maximale possible.

c) La *méthode analytique* consiste à donner la fonction par une ou plusieurs formules.

Exemple 2. La relation fonctionnelle entre le rayon r d'une circonférence et sa longueur s s'exprime par la formule

$$s = 2\pi r. \tag{1}$$

Exemple 3. La relation fonctionnelle entre le volume V(m³) et la pression p(t/m²) d'un kilogramme d'air à la température 0° s'exprime par la formule

$$pV = 8{,}000. \tag{2}$$

Si la relation entre x et y s'exprime par une équation résolue par rapport à y, la grandeur y est dite fonction *explicite* de x, dans le cas contraire elle est appelée fonction *implicite*. Dans l'exemple 2, la grandeur s est une fonction explicite de l'argument r et r une fonction implicite de s. Dans l'exemple 3, la grandeur p est une fonction implicite de l'argument V et la grandeur V une fonction implicite de l'argument p.

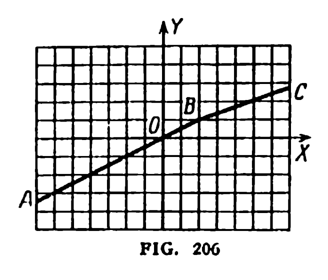


FIG. 206

Si l'on met l'équation (2) sous la forme

$$p = \frac{8{,}000}{V}, \qquad (3)$$

p devient une fonction explicite de l'argument V.

EXEMPLE 4. Une fonction donnée graphiquement (fig. 206) par la ligne brisée ABC peut être représentée par deux formules. Notamment, pour $x < 2$ (c'est-à-dire pour le tronçon BA) nous prenons la formule

$$y = \frac{1}{2} x,$$

et pour $x > 2$ (c'est-à-dire pour le tronçon BC) la formule

$$y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} x.$$

Pour $x = 2$, les deux formules donnent $y = 1$ (le point B).

EXEMPLE 5. La distance sur la route entre deux localités A et B est 90 km. Une automobile a franchi la moitié du trajet AB à la vitesse de 0,6 km/mn et l'autre moitié à la vitesse de 0,9 km/mn. Soit s (km) la distance de la voiture à la localité A. Le temps t (mn) du trajet est une fonction de l'argument s. On peut le donner à l'aide de deux formules:

$$t = \frac{s}{0{,}6} \quad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant 45,$$

$$t = 75 + \frac{s}{0{,}9} \quad \text{pour } 45 \leqslant s \leqslant 90.$$

§ 198. Domaine de définition d'une fonction

1. L'ensemble de toutes les valeurs que peut prendre (dans les conditions de la question) l'argument x de la fonction $f(x)$ est appelé *domaine de définition* de cette fonction.

REMARQUE. A une valeur de x n'appartenant pas à l'ensemble considéré ne correspond aucune valeur de la fonction.

EXEMPLE 1. Dans les conditions de l'exemple 5 § 197 le domaine de définition de la fonction $t = f(s)$ est l'ensemble de tous les nombres de 0 à 90 (y compris les bornes 0 et 90):

$$0 \leqslant s \leqslant 90.$$

En effet, à chaque distance comprise entre 0 et 90 km correspond un temps déterminé t du trajet et aux distances $s < 0$ et $s > 90$ ne correspond aucune valeur de t.

EXEMPLE 2. La somme des termes de la progression arithmétique

$$s = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$$

est une fonction du nombre de termes n; elle s'exprime par la formule

$$s = n^2.$$

Cette formule possède par elle-même un sens pour tout n. Toutefois dans le problème considéré n ne peut prendre que des valeurs entières 1, 2, 3, 4, ... Le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres naturels (aux valeurs $n = \frac{1}{2}$, $n = -5$, $n = \sqrt{3}$, etc., ne correspond aucune valeur de la fonction).

2. On donne souvent la fonction par une formule sans indiquer le domaine de définition ; on sous-entend alors que le domaine de définition est l'ensemble de toutes les valeurs de l'argument pour lesquelles la formule a un sens.

EXEMPLE 3. La fonction s est donnée par la formule $s = a^2$ (sans indication relative au domaine de définition). On sous-entend que le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres réels (cf. exemple 2).

EXEMPLE 4. La fonction y est donnée par la formule

$$y = \sqrt{x - 2} + \sqrt{7 - x},$$

qui a un sens uniquement pour $2 \leqslant x \leqslant 7$. Le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres de 2 à 7 (y compris les bornes). Le graphique (fig. 207) est situé uniquement au-dessus du segment $A'B'$.

EXEMPLE 5. La fonction y est donnée par la formule $y = \frac{1}{x}$.
Le domaine de définition est l'ensemble de tous les nombres, excepté le nombre zéro. A la valeur $x = 0$ ne correspond aucun point du graphique (fig. 208).

EXEMPLE 6. Le domaine de définition de la fonction $y = \sqrt{x}$ est l'ensemble des nombres positifs et du nombre zéro (fig. 209).

3. Quand le domaine de définition d'une fonction est l'ensemble des nombres naturels, la fonction est dite *fonction entière* ; on dit des valeurs d'une telle fonction qu'elles forment une *suite* ou qu'elles sont les *termes d'une suite*.

EXEMPLE 7. La fonction $t_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ est une fonction entière. Les valeurs $t_1 = 1$, $t_2 = 1 \cdot 2 = 2$, $t_3 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, ... forment une suite.

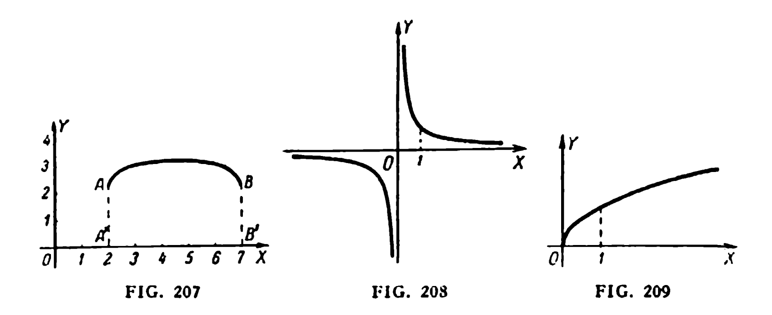


FIG. 207 FIG. 208 FIG. 209

Le produit $1 \cdot 2 \ldots n$ est noté $n!$ (on lit *factorielle* n), de sorte que la fonction considérée peut être représentée par la formule

$$t_n = n!$$

EXEMPLE 8. La fonction $u = \frac{1}{2^n}$, où n prend les valeurs 1, 2, 3, ..., est une fonction entière. Les valeurs $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{4}$, $u_3 = \frac{1}{8}$, ... (les termes d'une progression géométrique) forment une suite.

EXEMPLE 9. La fonction $s = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ (la somme des n termes d'une progression géométrique) est une fonction entière. Les valeurs $s_1 = \frac{1}{2}$, $s_2 = \frac{3}{4}$, $s_3 = \frac{7}{8}$, ... forment une suite.

§ 199. Intervalle

Le domaine de définition des fonctions considérées en analyse est souvent constitué par un ou plusieurs intervalles.

On appelle *intervalle* (a, b) l'ensemble des nombres x compris entre les nombres a et b; dans l'écriture (a, b) la première lettre désigne habituellement le plus petit nombre et la seconde le plus grand, de sorte que

$$a < x < b.$$

Les nombres a et b sont les *extrémités* ou les *bornes* de l'intervalle. Souvent on inclut dans l'ensemble des points de l'intervalle ses extrémités a et b (*intervalle fermé* ou *segment*) ou l'une de ses extrémités.

On appelle intervalle (a, ∞) l'ensemble de tous les nombres supérieurs à a; intervalle $(-\infty, a)$ l'ensemble de tous les nombres inférieurs à a; intervalle $(-\infty, \infty)$ l'ensemble de tous les nombres réels.

EXEMPLE 1. Dans les conditions de l'exemple 5 § 197 le domaine de définition de la fonction t est l'intervalle fermé (0, 90), autrement dit, l'argument s peut prendre toutes les valeurs vérifiant l'inégalité

$$0 \leqslant s \leqslant 90.$$

EXEMPLE 2. Le domaine de définition de la fonction $y = \sqrt{1 - x^2}$ est l'intervalle fermé $(-1, 1)$. Le graphique (demi-circonférence) est situé au-dessus de cet intervalle (fig. 210).

EXEMPLE 3. Le domaine de définition de la fonction

$$y = \frac{1}{\sqrt{2 - x^2}}$$

est l'intervalle $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (ouvert). Aux extrémités de l'intervalle la fonction n'est pas définie (elle « devient infinie »). Le graphique (fig. 211) est situé au-dessus des points *intérieurs* à l'intervalle. Il ne possède pas de points aux extrémités et en dehors de l'intervalle.

EXEMPLE 4. Le domaine de définition de la fonction

$$y = -\sqrt{x^2 - 1}$$

est le couple d'intervalles $(-\infty, -1)$ et $(1, +\infty)$ où les extrémités -1 et 1 font partie des intervalles. Le graphique (demi-hyperbole inférieure $x^2 - y^2 = 1$, fig. 212) est situé au-dessous de ces intervalles.

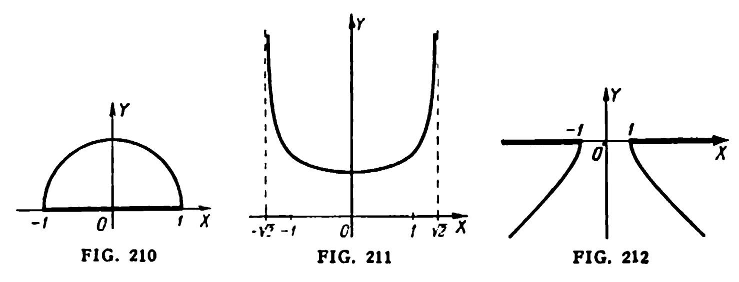


FIG. 210 FIG. 211 FIG. 212

§ 200. Classification des fonctions

a) Les fonctions sont classées en fonctions *uniformes* et fonctions *multiformes* (§ 196, définition 2).

b) Les fonctions représentées par des formules se divisent en fonctions *explicites* et fonctions *implicites* (§ 197).

c) Les fonctions sont partagées en fonctions *élémentaires* et fonctions *non élémentaires* (*).

La liste des *principales* fonctions *élémentaires* est donnée au § 201; chacune d'elles représente une certaine « opération » que l'on doit accomplir sur l'argument (élévation à la puissance, extraction d'une racine cubique, calcul du logarithme, recherche du sinus, etc.). Par une application réitérée de ces opérations, ainsi que des quatre opérations de l'arithmétique (en nombre fini) on obtient de nouvelles fonctions; elles sont aussi considérées comme élémentaires.

EXEMPLE 1. Les fonctions $y = \frac{3 + x^2}{1 + \lg x}$, $y = \lg \sin \sqrt[3]{1 - 3 \sin x}$, $y = \lg \lg(3 + 2\sqrt[3]{\sin x})$ sont élémentaires.

Les fonctions que l'on ne peut exprimer de la manière indiquée sont considérées comme non élémentaires.

EXEMPLE 2. La fonction $s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ est élémentaire, car on peut l'exprimer par la formule $s = \frac{(1 + n)\, n}{2}$ comportant un nombre fini d'opérations élémentaires.

EXEMPLE 3. La fonction $s = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ n'est pas élémentaire, car on ne peut l'exprimer par un nombre *fini* d'opérations élémentaires (plus n est grand et plus le nombre de multiplications à effectuer devient grand; on ne peut transformer l'expression $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$ de façon à l'exprimer sous une forme élémentaire).

REMARQUE. C'est à bon escient que nous ne parlons pas ici de la division des fonctions en fonctions algébriques et transcendantes, car la définition exacte d'une fonction algébrique ne peut être donnée qu'à l'aide de notions plus subtiles (continuité ou différentiabilité). Il est en outre superflu, dans le cadre de ce livre, de faire une distinction entre fonctions algébriques et transcendantes.

§ 201. Principales fonctions élémentaires

1) La *fonction puissance* $y = x^n$ (n est un nombre réel constant).

Pour $n = 0$ la fonction puissance est une constante ($y = 1$) (cf. § 196, remarque 2).

(*) Cette dernière division est d'un caractère plutôt historique que mathématique.

2) La *fonction exponentielle* $y = a^x$, où a est un nombre positif [*] *(la base de la puissance)*.

3) La *fonction logarithmique* $y = \log_a x$, où a est un nombre positif, non égal à l'unité [**] *(la base du logarithme)*.

4) Les *fonctions trigonométriques* (ou *circulaires*) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{cotg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.

5) Les *fonctions trigonométriques (circulaires) inverses*

$$y = \operatorname{arc\,sin} x, \quad y = \operatorname{arc\,cos} x, \quad y = \operatorname{arc\,tg} x$$

$$y = \operatorname{arc\,cotg} x, \quad y = \operatorname{arc\,sec} x, \quad y = \operatorname{arc\,cosec} x.$$

§ 202. Notation des fonctions

Le symbole $f(x)$ (se lit f de x) équivaut à l'expression « fonction de x ».

Si l'on considère deux ou un plus grand nombre de fonctions de x, on peut utiliser d'autres notations que $f(x)$, par exemple, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$.

L'ÉCRITURE

$$y = f(x) \tag{1}$$

exprime le fait que la grandeur y est égale à une certaine fonction de x, autrement dit y est une fonction de l'argument x.

Le symbole $f(x)$ peut être utilisé pour noter une fonction inconnue de même qu'une fonction connue.

EXEMPLES. 1) L'écriture $f(x) = \lg x$ exprime le fait que $f(x)$ est une fonction logarithmique.

2) L'écriture $\varphi(x) = x^n$ exprime le fait que $\varphi(x)$ est une fonction puissance.

3) L'écriture $F(x) = \varphi(x) + f(x)$ signifie que $F(x)$ est la somme des fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$. Si $f(x) = \lg x$ et $\varphi(x) = x^n$, alors $F(x) = \lg x + x^n$.

4) L'écriture $f_1(x) = f_2(x)$ signifie que les fonctions $f_1(x)$ et $f_2(x)$ sont égales (soit identiquement, soit pour certaines valeurs de x).

5) L'écriture $u = \varphi(v)$ signifie que la grandeur u est une fonction de l'argument v.

La lettre f (ou F, φ, etc.) que l'on utilise dans ces écritures est appelée la *caractéristique* de la fonction.

---

[*] Certains auteurs excluent le cas $a = 1$ (dans ce cas y est une grandeur constante).
[**] Pour la base $a = 1$, aucun nombre autre que l'unité ne possède de logarithme.

Si l'on doit exprimer le fait que y se trouve dans la même dépendance de x que u de v, on utilise la même caractéristique pour noter ces fonctions, autrement dit on écrit

$$u = \varphi(v) \text{ et } y = \varphi(x) \qquad (2)$$

ou

$$u = F(v) \text{ et } y = F(x), \qquad (3)$$

etc.

Ainsi, si u en fonction de v s'exprime par la formule $u = \pi v^2$, y en fonction de x s'exprime en vertu de (2) par la formule $y = \pi x^2$. Si par contre $u = \dfrac{\lg v}{1+v}$, alors $y = \dfrac{\lg x}{1+x}$, etc.

Exemples. 6) Si $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, alors $f(t) = \sqrt{1+t^2}$.

7) Si $F(\alpha) = 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$, alors $F(\beta) = 1 - \operatorname{tg}^2\beta$, $F(\gamma) = 1 - \operatorname{tg}^2\gamma$, etc.

8) Si $f(x) = 4$ (autrement dit, pour toutes les valeurs de l'argument la fonction possède une seule valeur; cf. § 196, remarque 2), alors $f(y) = 4$, $f(z) = 4$, etc.

Les écritures $f(1)$, $f(\sqrt{3})$, $f(a)$, etc. expriment le fait que l'on prend les valeurs de la fonction $f(x)$ pour $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, $x = a$, etc., ou les valeurs de la fonction $f(y)$ pour $y = 1$, $y = \sqrt{3}$, $y = a$, etc.

Exemples. 9) Si $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, alors $f(1) = \sqrt{2}$, $f(\sqrt{3}) = 2$, $f(a) = \sqrt{a^2+1}$.

10) Si $\varphi(\alpha) = \dfrac{1}{1+\sin^2\alpha}$, alors $\varphi(0) = 1$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, $\varphi(\pi) = 1$, $\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{2}{3}$.

§ 203. Limite d'une suite

Le nombre b est appelé *limite de la suite* (§ 198, 3) $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, si avec la croissance de n le terme y_n se rapproche indéfiniment de b.

Nous expliquerons plus bas le sens exact de l'expression « se rapproche indéfiniment » (après l'exemple 1).

Écriture:

$$\lim y_n = b$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

$n \to \infty$ veut dire que l'indice n croît indéfiniment (« tend vers l'infini »).

EXEMPLE 1. Considérons la suite

$$y_1 = 0{,}3, \qquad y_2 = 0{,}33, \qquad y_3 = 0{,}333, \ldots \tag{1}$$

Le terme y_n se rapproche indéfiniment de $\frac{1}{3}$ (les fractions décimales 0,3, 0,33, 0,333, ... donnent une expression de plus en plus exacte de $\frac{1}{3}$). Par conséquent, $\frac{1}{3}$ est la limite de la suite (1)

$$\lim y_n = \frac{1}{3}.$$

REMARQUE. La différence $y_n - \frac{1}{3}$ est successivement égale à

$$y_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{30}, \qquad y_2 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{300}, \qquad y_3 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3000}, \tag{2}$$

autrement dit

$$y_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3\cdot 10^n}. \tag{3}$$

y_n se rapproche *indéfiniment* de $\frac{1}{3}$: la valeur absolue de la différence (3) reste, à partir d'un certain indice N, inférieure à *tout* nombre positif ε (donné à l'avance). Ainsi, si l'on se donne $\varepsilon = 0{,}01$, alors $N = 2$, autrement dit, dès le second indice la valeur absolue $\left| y_n - \frac{1}{3} \right|$ reste inférieure à 0,01. Si l'on se donne $\varepsilon = 0{,}005 \left(= \frac{1}{200}\right)$, on a toujours $N = 2$; si on a $\varepsilon = 0{,}001$, alors $N = 3$, si $\varepsilon = 0{,}00001$, alors $N = 5$, etc.

On comprend désormais la formulation exacte suivante de la définition donnée au début de ce paragraphe.

DÉFINITION. Le nombre b est appelé *limite de la suite* $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ si la valeur absolue de la différence $y_n - b$ reste, à partir d'un certain indice N, inférieure à tout nombre positif ε donné à l'avance:

$$| y_n - b | < \varepsilon \quad \text{pour } n \geqslant N$$

(l'indice N dépend de la valeur de ε).

EXEMPLE 2. Dans la suite $y_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}$ (c'est-à-dire $y_1 = 1$, $y_2 = 2\frac{1}{2}$, $y_3 = 1\frac{2}{3}$, $y_4 = 2\frac{1}{4}, \ldots$) le terme y_n tend, avec la croissance de l'indice n, vers 2. Par conséquent, 2 est la limite de la suite.

En effet, nous avons $| y_n - 2 | = \frac{1}{n}$; la grandeur $\frac{1}{n}$, à partir d'une certaine valeur de l'indice n, reste inférieure à tout nombre positif ε donné à l'avance (si $\varepsilon =$,2 à partir du premier indice; si $\varepsilon = 0{,}02$, à partir de l'indice 51, etc.).

L'exemple 2 montre que les termes de la suite peuvent être tantôt supérieurs, tantôt inférieurs à la limite. Ils peuvent être aussi égaux à la limite (cf. exemple 3).

EXEMPLE 3. La suite

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 0, \quad y_4 = \frac{1}{2}, \quad y_5 = 0, \quad y_6 = \frac{1}{3}, \ldots$$

définie par la formule $y_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}$ a pour limite $b = 0$.

En effet, la grandeur $|y_n - 0| = \left|\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n}\right|$ reste, à partir d'un certain indice, inférieure à tout nombre positif ε donné à l'avance $\left(\text{si } \varepsilon = \frac{1}{3}\text{, à partir du numéro 7; si } \varepsilon = 0{,}01\text{, à partir du numéro 201, etc.}\right)$.

EXEMPLE 4. La suite $y_n = (-1)^n$ ne possède pas de limite: les termes $y_1 = -1$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, $y_4 = 1$, etc. ne tendent vers aucun nombre constant.

§ 204. Limite d'une fonction

Le nombre b est appelé *limite* de la fonction $f(x)$ quand $x \to a$ si lorsque x tend vers a (à gauche ou à droite), la valeur de $f(x)$ se rapproche indéfiniment (*) (« tend vers ») de b.

ECRITURE:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

REMARQUE 1. On suppose que la fonction $f(x)$ est définie à l'intérieur d'un certain intervalle contenant le point $x = a$ (en tous les points situés à droite et à gauche de a); au point $x = a$ lui-même la fonction $f(x)$ est soit définie, soit non définie (le second cas n'est pas moins important que le premier).

EXEMPLE 1. Considérons la fonction $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ $\left(\text{elle est définie en tous les points, excepté } x = \frac{1}{2}\right)$. Prenons $x = 6$. Alors $f(x) = \frac{4 \cdot 6^2 - 1}{2 \cdot 6 - 1} = 13$. Lorsque x tend vers 6 (à gauche ou à droite), le numérateur $4x^2 - 1$ tend vers 143 et le dénominateur vers 11. La frac-

(*) Le sens mathématique de l'expression « se rapproche indéfiniment » est expliqué au § 205. Toutefois, la présente définition (compte tenu de la remarque 1) est entièrement suffisante pour la compréhension de l'exposé.

tion toute entière tend vers $\frac{143}{11} = 13$. Le nombre 13 (égal à la valeur de la fonction pour $x = 6$) est simultanément la limite de la fonction pour $x \to 6$:

$$\lim_{x \to 6} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 13.$$

EXEMPLE 2. Considérons la même fonction $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$, mais prenons $x = \frac{1}{2}$. La fonction $f(x)$ n'est pas définie ici $\left(\text{la formule donne une indétermination de la forme } \frac{0}{0}\right)$. Or, la limite de la fonction quand $x \to \frac{1}{2}$ existe et est égale à 2.

En effet, l'expression $\frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ n'est indéterminée que *pour* $x = \frac{1}{2}$, mais *dans le voisinage* de $\frac{1}{2}$ elle est bien déterminée et est toujours égale à $2x + 1$. Cette dernière expression tend vers le nombre 2. Cela signifie, par conséquent, que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2.$$

REMARQUE 2. Le graphe de la fonction $y = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ est la droite UV (fig. 213) sans le point $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$. Le graphe de la fonction $y = 2x + 1$ est la même droite UV toute entière.

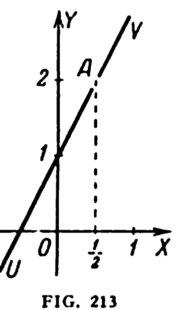


FIG. 213

EXEMPLE 3. La fonction $f(x) = \cos\frac{\pi}{x}$ (elle est définie en tous les points, excepté $x = 0$) ne possède pas de limite quand $x \to 0$. Cela apparaît du graphique (fig. 214): quand l'abscisse tend vers zéro, l'ordonnée ne tend vers aucune limite (le point du graphique effectue des oscillations sans fin de même amplitude).

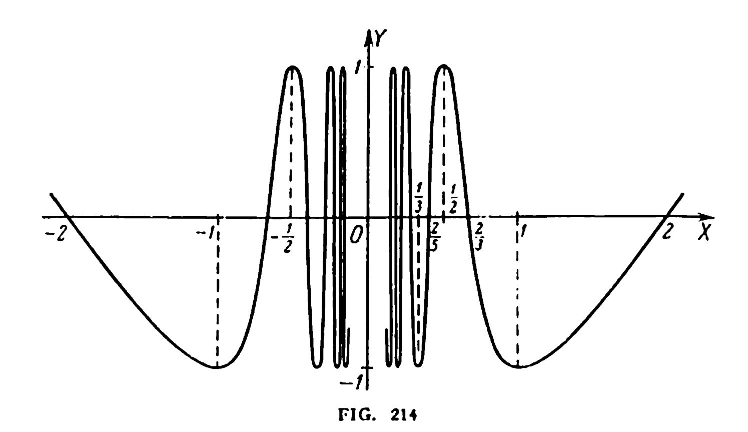


FIG. 214

§ 205. Définition de la limite d'une fonction

Une variable se rapproche indéfiniment d'une constante (cf. § 203): leur différence reste, à partir d'un certain moment, inférieure en valeur absolue à tout nombre positif donné à l'avance. Conformément à cela on peut donner à la définition du § 204 la forme rigoureuse suivante.

DÉFINITION. Le nombre b est appelé *limite* de la fonction $f(x)$ quand $x \to a$ si la valeur absolue de la différence $f(x) - b$ reste inférieure à tout nombre positif ε donné à l'avance dès que la valeur absolue de la différence $x - a$ pour x non égal à a est inférieure à un nombre positif δ (dépendant de ε).

En résumé (mais moins rigoureusement): le nombre b est la limite de la fonction $f(x)$ quand $x \to a$ si la grandeur $|f(x) - b|$ est aussi petite que l'on veut quand $|x - a|$ est suffisamment petite.

EXEMPLE. Le nombre 2 est la limite de la fonction $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{2x - 1}$ quand $x \to \frac{1}{2}$ (cf. § 201, exemple 2).

En effet, exigeons que la grandeur

$$\left| \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2 \right|$$

$\left(\text{pour } x \neq \frac{1}{2}\right)$ soit inférieure à ε. Nous obtenons l'inégalité

$$|2x - 1| < \varepsilon.$$

Elle est équivalente à l'inégalité

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cela signifie que la valeur absolue de la différence $\frac{4x^2-1}{2x-1}-2$ reste inférieure à tout nombre positif ε donné à l'avance dès que la valeur absolue de la différence $x-\frac{1}{2}$ est inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$. Dans l'exemple considéré nous avons $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$.

§ 206. Limite d'une grandeur constante

DÉFINITION. La limite d'une grandeur constante b est cette même grandeur.

On introduit cette définition pour que les théorèmes principaux sur les limites (§ 213) soient vrais dans tous les cas sans exception. Elle est conforme aux définitions des §§ 203 et 205 (la grandeur $|b-b|=0$ est inférieure à tout nombre positif ε).

§ 207. Infiniment petits

On appelle *infiniment petit* une grandeur dont la limite est égale à zéro.

EXEMPLE 1. La fonction x^2-4 est infiniment petite quand $x\to 2$ et $x\to -2$. Quand $x\to 1$, cette même fonction n'est pas infiniment petite.

EXEMPLE 2. La fonction $1-\cos\alpha$ est infiniment petite quand $\alpha\to 0$, car $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1-\cos\alpha)=0$.

On dit également: « la grandeur $1-\cos\alpha$ est infiniment petite quand α est infiniment petit ».

EXEMPLE 3. La grandeur $\frac{4x^2-1}{2x-1}$ n'est pas infiniment petite quand $x\to\frac{1}{2}$, car sa limite est égale à 2 (§ 204, exemple 2).

EXEMPLE 4. La fonction entière $y=\frac{1}{n!}$ (§ 198, exemple 7) est infiniment petite, car la limite de la suite $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$, ... est égale à zéro.

REMARQUE 1. Les affirmations « le nombre b est la limite de la grandeur y » et « la différence $y - b$ est un infiniment petit » sont équivalentes.

EXEMPLE 5. Nous avons $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} = 2$. On peut également dire « la grandeur $\frac{4x^2 - 1}{2x - 1} - 2$ est un infiniment petit ».

REMARQUE 2. Parmi les grandeurs constantes, seul le zéro est infiniment petit (cf. § 206).

§ 208. Infiniment grands

On appelle *infiniment grand* une grandeur variable dont la valeur absolue croît indéfiniment.

Le sens exact de l'expression « croît indéfiniment » est expliqué à la fin du paragraphe.

EXEMPLE 1. La fonction entière $y = n!$ est un infiniment grand, car les termes de la suite $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2 \cdot 3, \ldots$ croissent indéfiniment.

EXEMPLE 2. La fonction $\frac{1}{x}$ est infiniment grande quand x est infiniment petit, car à mesure que x s'approche de zéro, la valeur absolue de la grandeur $\frac{1}{x}$ croît indéfiniment.

EXEMPLE 3. La fonction $\operatorname{tg} x$ est un infiniment grand quand $x \to \frac{\pi}{2}$.

Aucune grandeur constante n'est un infiniment grand.

REMARQUE. L'expression « la valeur absolue de la grandeur y croît indéfiniment » signifie qu'à partir d'un certain moment $|y|$ devient supérieure à tout nombre positif donné à l'avance. Partant, on donne la définition rigoureuse suivante d'un infiniment grand.

DÉFINITION 1. La fonction entière y est un infiniment grand si la valeur absolue de y_n reste, à partir d'un certain indice N, plus grande que tout nombre positif M donné à l'avance (cf. § 203).

DÉFINITION 2. La fonction $f(x)$ est un infiniment grand, quand $x \to a$, si la valeur absolue de $f(x)$ reste supérieure à tout nombre positif M donné à l'avance, pourvu que la valeur absolue de la différence $x - a$ soit inférieure à un certain nombre positif δ (dépendant de M) (cf. § 205).

§ 209. Relation entre les infiniment petits et les infiniment grands

Si y est infiniment grand, alors $\frac{1}{y}$ est infiniment petit; si y est infiniment petit, alors $\frac{1}{y}$ est infiniment grand.

EXEMPLE 1. La grandeur $\frac{3}{x-2}$ est un infiniment grand quand $x \to 2$. La fraction inverse $\frac{x-2}{3}$ $\left(= 1 : \frac{3}{x-2}\right)$ est un infiniment petit quand $x \to 2$.

EXEMPLE 2. La grandeur tg x est infiniment petite quand $x \to 0$, la grandeur $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{cotg} x$ est infiniment grande quand $x \to 0$.

§ 210. Grandeurs bornées

Une grandeur est dite *bornée* si sa valeur absolue n'est pas supérieure à un certain nombre (constant) positif arbitraire M.

EXEMPLE 1. La fonction $\sin x$ est une grandeur bornée sur toute la droite numérique car $|\sin x| \leqslant 1$.

EXEMPLE 2. La fonction $\frac{1}{x-2}$ est bornée dans l'intervalle (3, 5), mais n'est pas bornée dans l'intervalle (2, 5), car l'argument x, tout en restant dans l'intervalle (2, 5), peut tendre vers 2, et alors la fonction est infiniment grande (fig. 215).

Toute grandeur constante est bornée. Aucune grandeur infiniment grande n'est bornée.

REMARQUE. Une grandeur non bornée peut ne pas être infiniment grande. Ainsi, la fonction entière $n + (-1)^n n$ n'est pas un infiniment grand, car pour les valeurs impaires de n elle est toujours nulle; par ailleurs, elle n'est pas bornée non plus, car pour les valeurs paires de n, à partir d'un certain indice, elle reste supérieure à tout nombre positif arbitraire M.

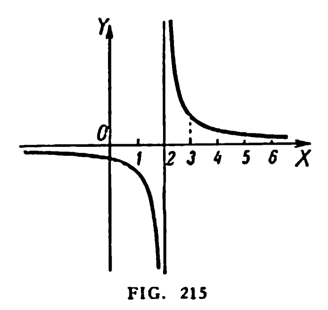


FIG. 215

§ 211. Extension de la notion de limite

Si la variable s est un infiniment grand, on dit (conventionnellement) que s « tend vers l'infini » ou « possède une limite infinie ».

Ecriture:

$$s \to \infty \quad \text{ou} \quad \lim s = \infty. \tag{1}$$

Si l'infiniment grand s reste positif à partir d'un certain moment, on dit qu'il « tend vers plus l'infini » et on écrit:

$$s \to +\infty \quad \text{ou} \quad \lim s = +\infty. \tag{2}$$

Si un infiniment grand reste négatif à partir d'un certain moment (*), on dit qu'il « tend vers moins l'infini » et on écrit

$$s \to -\infty \quad \text{ou} \quad \lim s = -\infty. \tag{3}$$

Au lieu de l'écriture (1) on écrit parfois pour plus de clarté

$$s \to \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim s = \pm\infty. \tag{4}$$

Exemple 1. La fonction cotg x possède, quand $x \to 0$, une limite infinie:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x = \infty.$$

Pour souligner le fait que la fonction cotg x pour $x \to 0$ peut prendre aussi bien des valeurs positives (pour $x > 0$), que des valeurs négatives (pour $x < 0$), on écrit:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{cotg} x = \pm\infty.$$

Exemple 2. L'écriture $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ signifie que quand la valeur absolue de x croît indéfiniment, la fonction $\dfrac{1}{x}$ tend vers zéro.

Exemple 3. On peut écrire:

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$$

ou

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x = \infty.$$

La seconde écriture ne précise pas le signe de la fonction 2^x. Toutefois on ne peut pas dans les premiers membres écrire au lieu de $x \to +\infty$ $x \to \infty$. Cette dernière écriture aurait inclus

(*) L'expression « à partir d'un certain moment » est précisée de la même manière qu'au § 208 (définitions 1 et 2).

également le cas où $x \to -\infty$, et alors la fonction 2^x tend non pas vers l'infini, mais vers zéro, autrement dit,

$$\lim_{x \to -\infty} 2^x = 0.$$

REMARQUE. Un infiniment grand n'a pas de limite au sens établi précédemment (§§ 203—205), car on ne peut pas dire, par exemple, que « la différence entre $f(x)$ et ∞ reste inférieure à un nombre positif donné à l'avance ». Ainsi, l'introduction de la limite infinie *élargit* la notion de limite. A la différence de la limite infinie la limite que nous avons définie plus haut est dite *finie*.

§ 212. Propriétés principales des infiniment petits

On suppose ici que les grandeurs considérées sont des fonctions *d'un même* argument.

THÉORÈME I. La somme de deux, trois ou de plusieurs infiniment petits en nombre fini est un infiniment petit.

REMARQUE 1. Si le nombre de termes n'est pas fixe et varie avec la variation de l'argument, le théorème I peut ne plus être vrai. Ainsi, si nous avons n termes dont chacun est égal à $\frac{1}{n}$, alors, quand $n \to \infty$, chaque terme est un infiniment petit, mais la somme $\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot n$ est égale à 1.

REMARQUE 2. La différence de deux infiniment petits est un infiniment petit (cas particulier du théorème I).

THÉORÈME II. Le produit d'une grandeur bornée (§ 210) par un infiniment petit est infiniment petit.

En particulier, le produit d'une grandeur constante par un infiniment petit, ainsi que le produit de deux infiniment petits, est infiniment petit.

THÉORÈME III. Le quotient de la division d'un infiniment petit par une variable tendant vers une limite *non nulle* est infiniment petit.

REMARQUE 3. Si la limite du diviseur est nulle, c'est-à-dire si le dividende et le diviseur sont des infiniment petits le quotient peut

ne pas être infiniment petit. Ainsi, x^2 et x^3 sont des infiniment petits quand $x \to 0$. Le quotient $x^3 : x^2 = x$ est aussi infiniment petit, mais le quotient $x^2 : x^3 = \frac{1}{x}$ est infiniment grand. Les grandeurs $6x^2 + x^3$ et $2x^2$ sont des infiniment petits quand $x \to 0$, mais la limite du quotient $(6x^2 + x^3) : 2x^2$ est égale à 3.

§ 213. Théorèmes principaux sur les limites

On suppose ici que toutes les grandeurs données (les termes, les facteurs, le dividende et le diviseur) dépendent *d'un même* argument x et possèdent des limites *finies* (pour $x \to a$ ou pour $x \to \infty$).

THÉORÈME I. La limite de la somme de deux ou plusieurs fonctions (en nombre *fini*) est égale à la somme des limites des termes (cf. § 212, remarque 1).

En résumé, *la limite de la somme est égale à la somme des limites*

$$\lim (u_1 + u_2 + \ldots + u_k) = \lim u_1 + \lim u_2 + \ldots + \lim u_k. \qquad (1)$$

On sous-entend $\lim\limits_{x \to a}$ (ou $\lim\limits_{x \to \infty}$).

THÉORÈME I*a* (cas particulier du théorème I):

$$\lim (u_1 - u_2) = \lim u_1 - \lim u_2. \qquad (2)$$

THÉORÈME II. La limite du produit de deux ou plusieurs facteurs (en nombre *fini*) est égale au produit de leurs limites:

$$\lim (u_1 u_2 \ldots u_k) = \lim u_1 \cdot \lim u_2 \ldots \lim u_k. \qquad (3)$$

THÉORÈME II*a*. On peut sortir un facteur constant de sous le signe de limite:

$$\lim cu = c \lim u. \qquad (4)$$

THÉORÈME III. La limite du quotient est égale au quotient des limites si la limite du diviseur n'est pas nulle:

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v} \; (\lim v \neq 0). \qquad (5)$$

EXEMPLE 1.

$$\lim_{x\to5}\frac{x+4}{x-2}=\lim_{x\to5}(x+4):\lim_{x\to5}(x-2)=9:3=3.$$

Si la limite du diviseur est égale à zéro et *la limite du dividende non*, le quotient a une limite infinie.

EXEMPLE 2.

$$\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-2}=\infty;$$

ici $\lim\limits_{x\to2}(x-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to2}(x+4)=6\neq0$.

REMARQUE 1. Si le dividende et le diviseur tendent vers zéro, le quotient peut posséder une limite tant finie qu'infinie (§ 212, remarque 3). Il peut également ne pas avoir de limite.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to0}x^2\cos\frac{\pi}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}x^2=0$, mais le quotient $x^2\cos\frac{\pi}{x}:x^2=\cos\frac{\pi}{x}$ n'a pas de limite quand $x\to0$ (§ 204, exemple 3).

REMARQUE 2. Dans le cas où $\lim v=0$, mais $\lim u\neq0$, le théorème III reste vrai si on l'interprète dans un sens plus large. Plus précisément, il faut comprendre l'écriture $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\frac{c}{0}$ (c est un nombre non nul) dans le sens que $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$.

EXEMPLE 3. Trouver $\lim\limits_{x\to2}\frac{x+4}{x-2}$.

La limite du diviseur est égale à zéro et la limite du dividende à 6. Interprétant l'écriture $\frac{6}{0}$ dans le sens indiqué, nous obtenons:

$$\lim_{x\to2}\frac{x+4}{x-2}=\frac{6}{0}=\infty$$

exemple 2).

REMARQUE 3. Dans le cas où $\lim v=0$ et $\lim u=0$, le théorème III *n'est plus applicable*, car l'expression $\frac{0}{0}$ est indéterminée. Toutefois, le théorème III ne peut conduire à un résultat *erroné* dans ce cas non plus. Supposons, par exemple, que l'on doive trouver

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2-1}{2x-1}.$$

Appliquant (formellement) le théorème III, nous obtenons $\frac{0}{0}$. Cette indétermination vient nous signaler que la voie directe est fermée et nous oblige à rechercher une voie détournée (cf. § 204, exemple 2).

Bien entendu, on ne peut « simplifier » par 0 et écrire 1 au lieu de $\frac{0}{0}$.

§ 214. Nombre e

La fonction entière $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ croît quand $n \to \infty$, mais reste bornée [*]. Or, toute variable croissante, mais bornée admet une limite (finie). La limite vers laquelle tend l'expression $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, quand $n \to \infty$, est notée e:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{1}$$

Avec 6 chiffres significatifs exacts on a pour le nombre e (il est irrationnel)

$$e = 2{,}71828.$$

Il est souvent avantageux de prendre le nombre e comme base des logarithmes (cf. § 242).

La fonction $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers la limite e non seulement pour les valeurs entières de n, mais aussi quand n tend vers l'infini en parcourant toute la droite numérique. Plus encore, l'argument n peut prendre des valeurs aussi bien positives que négatives pourvu que n croisse indéfiniment en valeur absolue. Pour souligner cette circonstance remplaçons la lettre n par la lettre x et écrivons

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \tag{2}$$

(cf. § 211) ou:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{3}$$

---

[*] On pourrait croire que la fonction $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ doit augmenter indéfiniment avec l'exposant. Or la croissance de l'exposant est compensée par le fait que la base $1 + \frac{1}{n}$ tend vers 1. Il est utile de le vérifier en pratique. Nous trouvons par exemple à l'aide de la table des logarithmes à cinq décimales que $\left(1 + \frac{1}{5}\right)^5 = 2{,}48$; $\left(1 + \frac{1}{10}\right)^{10} = 2{,}59$; $\left(1 + \frac{1}{50}\right)^{50} = 2{,}69$; $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 2{,}71$. On peut démontrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ est borné à l'aide de la formule du binôme. Son premier terme est 1, ainsi que le second, le troisième, égal à $\frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$, est toujours inférieur à $\frac{1}{2}$, le quatrième toujours inférieur à $\frac{1}{2^2}$, le cinquième à $\frac{1}{2^3}$, etc. C'est pourquoi toute valeur de u_n est inférieure à $1 + 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)$, c'est-à-dire qu'elle est inférieure à 3.

§ 215. Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand $x \to 0$

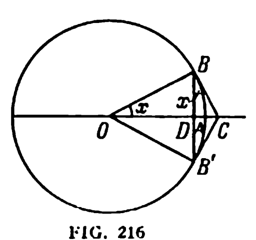


FIG. 216

Si x est l'unité d'angle (en radians), alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

EXPLICATION. Prenons le rayon OA (fig. 216) pour unité de longueur. Nous avons alors $x = \overset{\frown}{AB}$, $\sin x = BD$ et $x : \sin x = \overset{\frown}{AB} : BD = \overset{\frown}{B'AB} : B'B$. L'arc $\overset{\frown}{B'AB}$ est plus grand que la corde $B'B$. C'est pourquoi $x : \sin x > 1$. D'autre part, l'arc $\overset{\frown}{B'AB}$ est plus petit que $BC + B'C = 2\,BC$, autrement dit $\overset{\frown}{AB} < BC$. Par conséquent, $x : \sin x < BC : BD = \sec x$ (du triangle DBC).

Cela signifie que le rapport $\frac{x}{\sin x}$ est compris entre 1 et $\sec x$. Or, quand $x \to 0$, la grandeur $\sec x$ tend elle-même vers l'unité et, par conséquent, *a fortiori* $\frac{x}{\sin x}$.

§ 216. Infiniment petits équivalents

DÉFINITION. Deux infiniment petits sont dits *équivalents* si leur rapport tend vers 1.

EXEMPLE 1. x et $\sin x$, infiniment petits quand $x \to 0$, sont équivalents, car (§ 215) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Les infiniment petits $2x$ et $\sin 2x$ sont équivalents, ainsi que x^2 et $\sin^2 x$.

EXEMPLE 2. Les infiniment petits $\alpha^2 + 3\alpha^3$ et $\alpha^2 - 4\alpha^3$ ($\alpha \to 0$) sont équivalents, car

$$\lim_{\alpha\to 0} \frac{\alpha^2 + 3\alpha^3}{\alpha^2 - 4\alpha^3} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1 + 3\alpha}{1 - 4\alpha} = 1.$$

L'équivalence des infiniment petits est noté $\sim$. Ainsi,

$$\sin x \sim x,\ \sin 2x \sim 2x,\ \sin^2 x \sim x^2,$$
$$\alpha^2 + 3\alpha^3 \sim \alpha^2 - 4\alpha^3.$$

REMARQUE. Les grandeurs équivalentes sont en fait approximativement égales (l'égalité est d'autant plus exacte que les grandeurs équivalentes sont proches de zéro). Ainsi, pour $\alpha = 0{,}01$ la grandeur $\alpha^2 + 3\alpha^3$ est égale à 0,000103 et $\alpha^2 - 4\alpha^3$ à 0,000096. La différence est 0,000007, c'est-à-dire environ 7% de l'une des grandeurs équivalentes. Plus elles sont proches de zéro et plus ce pourcentage est petit.

THÉORÈME. La limite du quotient (du rapport) de deux infiniment petits ne change pas si l'on remplace l'un d'eux (ou les deux) par une grandeur équivalente.

EXEMPLE 3. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Remplaçant $\sin 2x$ par la grandeur équivalente $2x$, nous obtenons

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2.$$

EXEMPLE 4.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

EXEMPLE 5. Trouver

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

SOLUTION. Nous avons:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},$$

et comme

$$\sin^2\frac{x}{2}\sim\left(\frac{x}{2}\right)^2,$$

alors

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x}=0.$$

§ 217. Comparaison des infiniment petits

DÉFINITION 1. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ de deux infiniment petits est infiniment petit $\left[\text{c'est-à-dire si } \lim\frac{\beta}{\alpha}=0 \text{ et, par conséquent (§ 209), } \lim\frac{\alpha}{\beta}=\infty\right]$, β est dit *infiniment petit d'ordre supérieur* par rapport à α; dans ce cas α est appelé *infiniment petit d'ordre inférieur* par rapport à β.

DÉFINITION 2. Si le rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ de deux infiniment petits tend vers une limite finie *non nulle*, α et β sont appelés infiniment petits *du même ordre* (*).

(*) Au lieu du rapport $\frac{\beta}{\alpha}$ on peut prendre $\frac{\alpha}{\beta}$, car il a aussi une limite finie non nulle $\left(\text{si } \lim\frac{\beta}{\alpha}=m, \text{ alors } \lim\frac{\alpha}{\beta}=\frac{1}{m}\right)$.

REMARQUE. Les infiniment petits équivalents sont du même ordre (*).

EXEMPLE 1. Quand $x \to 0$, x^5 est d'ordre supérieur par rapport à x^3, car $\frac{x^5}{x^3} = 0$. Au contraire, x^3 est d'ordre inférieur par rapport à x^5, car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x^5} = \infty$.

EXEMPLE 2. Quand $x \to 0$, $\sin x$ et $2x$ sont du même ordre, car (§ 215)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

EXEMPLE 3. Quand $x \to 0$, $1 - \cos x$ est d'ordre supérieur par rapport à $\sin x$, car (§ 216, exemple 5)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = 0.$$

Quand $\alpha \to 0$, chacune des grandeurs $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \ldots$ est d'ordre inférieur par rapport à n'importe quelle grandeur suivante de la suite. C'est pourquoi la classification ultérieure des infiniment petits est basée sur la définition suivante.

DÉFINITION 3. β est d'ordre m par rapport à α s'il est du même ordre que α^m, c'est-à-dire (cf. définition 2) si le rapport $\frac{\beta}{\alpha^m}$ possède une limite finie non nulle.

EXEMPLE 4. Quand $x \to 0$, l'infiniment petit $\frac{1}{4} x^3$ est du troisième ordre par rapport à x, car $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{4} x^3 : x^3\right) = \frac{1}{4}$, l'infiniment petit $\frac{1}{7} x^2$ est du second ordre, l'infiniment petit $\sqrt{x}$ est de l'ordre $\frac{1}{2}$.

EXEMPLE 5. L'infiniment petit $1 - \cos \alpha$ ($\alpha \to 0$) est du second ordre par rapport à α, car (cf. remarque de la définition 2)

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sim 2 \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

EXEMPLE 6. L'infiniment petit $\frac{1}{4} \alpha^3 + 1000 \alpha^4$ ($\alpha \to 0$) est du

(*) La proposition inverse n'est pas vraie. Ainsi, les grandeurs $2x$ et $3x$ pour $x \to 0$ sont du même ordre $\left(\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}\right)$, mais ne sont pas équivalentes.

troisième ordre, c'est-à-dire du même ordre que le terme $\frac{1}{4}\alpha^3$ dont l'ordre est inférieur à celui de l'autre terme. Il en est ainsi pour toute somme de deux ou plusieurs termes.

EXEMPLE 7. $x^3 \cdot \sin^2 x$ ($x \to 0$) est du cinquième ordre par rapport à x (le nombre 5 est la somme des ordres des facteurs; il en est ainsi pour tout produit de deux ou plusieurs facteurs).

THÉORÈME 1. La différence $\alpha - \beta$ de deux infiniment petits équivalents α et β est d'ordre supérieur tant par rapport à α que par rapport à β.

EXEMPLE 8. Quand $x \to 0$, nous avons $x \sim \sin x$. C'est pourquoi $x - \sin x$ est d'ordre supérieur par rapport à x (ainsi que par rapport à $\sin x$).

THÉORÈME 2 (INVERSE). Si la différence des infiniment petits α et β est d'ordre supérieur par rapport à l'un d'eux (elle est alors d'ordre supérieur par rapport à l'autre), alors $\alpha \sim \beta$.

EXEMPLE 9. La différence des infiniment petits $\alpha^2 + 3\alpha^3$ et α^2 ($\alpha \to 0$) est égale à $3\alpha^3$; c'est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à α^2. C'est pourquoi

$$\alpha^2 + 3\alpha^3 \sim \alpha^2.$$

§ 217a. Accroissement d'une variable

DÉFINITION. Si la variable z prend d'abord la valeur $z = z_1$, puis la valeur $z = z_2$, la différence $z_2 - z_1$ est appelée *accroissement* de la variable z. L'accroissement peut être positif, négatif ou nul. L'accroissement est noté Δ et l'écriture Δz (se lit « delta z ») signifie « l'accroissement de la variable z », de sorte que

$$\Delta z = z_2 - z_1.$$

L'accroissement d'une grandeur constante est nul.

EXEMPLE. La valeur initiale de l'argument est $x = 3$, l'accroissement de l'argument $\Delta x = -2$. Trouver l'accroissement correspondant Δy de la fonction $y = x^2$.

SOLUTION. Comme $x_1 = 3$ et $x_2 - x_1 = -2$, alors $x_2 = 1$. La fonction $y = x^2$ prend d'abord la valeur $y_1 = 3^2 = 9$, puis la valeur $y_2 = 1^2 = 1$.

L'accroissement de la fonction est $\Delta y = y_2 - y_1 = 1 - 9 = -8$.

§ 218. Continuité d'une fonction en un point

DÉFINITION. La fonction $f(x)$ est dite *continue au point* $x = a$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

1. Pour $x = a$ la fonction $f(x)$ admet une valeur déterminée b.
2. Quand $x \to a$, la fonction a une limite égale à b.

Quand l'une au moins de ces conditions n'est pas remplie, on dit que la fonction est *discontinue* au point $x = a$.

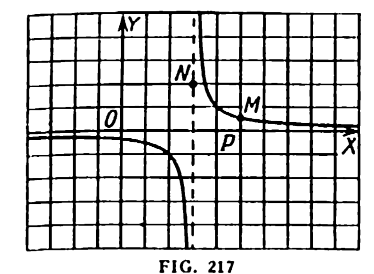


FIG. 217

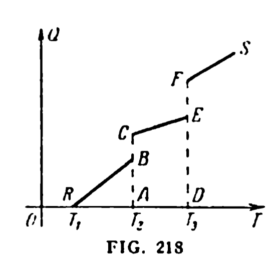


FIG. 218

EXEMPLE 1. La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ est continue au point $x = 5$ (M sur la fig. 217), car 1) pour $x = 5$ elle a une valeur bien déterminée $f(5) = \dfrac{1}{2}$; 2) quand $x \to 5$, elle a une limite égale à $\dfrac{1}{2}$. La fonction est discontinue au point $x = 3$; ici la première condition n'est pas remplie (la fonction n'a pas de valeur déterminée). La seconde condition n'est pas remplie non plus.

EXEMPLE 2. Définissons la fonction $\varphi(x)$ de la manière suivante:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{quand} \quad x \neq 3,$$

$$\varphi(x) = 2 \quad \text{quand} \quad x = 3.$$

Cette fonction (son graphe s'obtient du graphe de l'exemple 1 en y ajoutant le point N; cf. fig. 217) est aussi discontinue au point $x = 3$. La première condition est maintenant remplie, mais la seconde ne l'est pas: quand $x \to 3$, la fonction $\varphi(x)$ n'a pas de limite.

EXEMPLE 3. La quantité de chaleur Q communiquée à un corps est fonction de la température T du corps. La fig. 218 donne la courbe représentative de cette fonction. La ligne RB correspond à l'état solide (T_1 est la température initiale, T_2 la température de fusion), la ligne CE à l'état liquide (T_3 est la température de formation de gaz), la ligne FS à l'état gazeux. La fonction Q est discontinue pour $T = T_2$ et $T = T_3$; en ces points elle n'a pas de valeur déterminée. Ainsi à la température de fusion T_2 correspondent toutes les valeurs possibles de la quantité de chaleur comprises entre $Q = AB$ et $Q = AC$.

§ 219. Propriétés des fonctions continues en un point

PROPRIÉTÉ 1. La somme, la différence et le produit de deux fonctions continues au point $x = a$ sont continus en ce point. Le quotient

$\frac{u}{v}$ de deux fonctions continues au point $x = a$ est continu si le dénominateur v ne s'annule pas pour $x = a$.

PROPRIÉTÉ 2 (*). Si la fonction $f(x)$ est continue pour une certaine valeur de x, l'accroissement de la fonction est un infiniment petit quand l'accroissement de l'argument l'est également.

EXEMPLE. La fonction $f(x) = \frac{1}{x-3}$ est continue au point $x = 5$, et $f(5) = \frac{1}{2}$ (§ 218, exemple 1). Quand $x = 5 + \Delta x$, la fonction prend la valeur

$$f(5 + \Delta x) = \frac{1}{2 + \Delta x}.$$

L'accroissement de la fonction est égal à

$$f(5 + \Delta x) - f(5) = -\frac{\Delta x}{2(2 + \Delta x)}.$$

Il est infiniment petit quand Δx est un infiniment petit.

§ 219a. Limite à droite, limite à gauche; saut d'une fonction

Si la valeur de la fonction $f(x)$ tend vers le nombre b_1 quand x tend vers a par valeurs plus petites que a, le nombre b_1 est appelé *limite à gauche de la fonction* $f(x)$ au point $x = a$ et on écrit:

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = b_1. \qquad (1)$$

Si $f(x)$ tend vers b_2 quand x tend vers a par valeurs plus grandes que a, le nombre b_2 est appelé *limite à droite de la fonction* $f(x)$ pour $x \to a$ et on écrit:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = b_2. \qquad (2)$$

La grandeur $|b_2 - b_1|$ est appelée *saut* (*discontinuité*) de la fonction.

EXEMPLE 1. La fonction Q, représentée sur la fig. 218, possède au point T_2 la limite à gauche AB et la limite à droite AC. Le saut est représenté par le segment $BC = AC - AB$.

EXEMPLE 2. La fonction $f(x) = \frac{1}{1 + 2^{1/x}}$ (fig. 219) possède au point $x = 0$ une limite à droite $b_2 = 0$ et une limite à gauche $b_1 = 1$. Le saut est égal à l'unité.

Les deux limites de la fonction $f(x)$ au point $x = a$ peuvent être égales. Si en outre la fonction est déterminée en ce point $x = a$, elle est alors continue en ce point.

EXEMPLE 3. La fonction $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ a au point $x = 2$ ses deux limites égales à 4. Toutefois au point $x = 2$ la fonction n'est pas déterminée et, par conséquent, elle est discontinue. Le graphe (fig. 220) est la droite $y = x + 2$ sans le point $M(2, 4)$. Si l'on convient en outre que $f(2) = 4$, la fonction $f(x)$ devient continue. Le graphe est alors complété par le point M.

(*) On peut prendre la propriété 2 pour définition de la continuité d'une fonction en un point (équivalente à la définition du § 218).

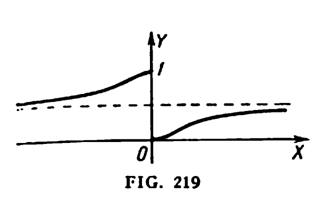


FIG. 219

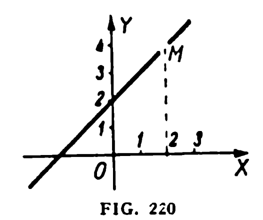


FIG. 220

Si, en imposant une hypothèse supplémentaire déterminant la fonction $f(x)$ au point a, on peut transformer la fonction discontinue en fonction continue, on dit que la discontinuité est *artificielle*. Dans l'exemple 3 la discontinuité est artificielle, et elle ne l'est pas dans les exemples 1, 2.

§ 220. Continuité d'une fonction sur un intervalle fermé

DÉFINITION. Une fonction est dite *continue sur un intervalle fermé* si elle est continue en chaque point de cet intervalle, y compris les deux extrémités.

EXEMPLE. Considérons la fonction $\frac{1}{4x(x-1)}$ (fig. 221). Elle est continue sur l'intervalle fermé $\left(1\frac{1}{2}, 2\right)$, mais discontinue sur l'intervalle fermé $(0, 1)$, car les deux extrémités $x = 0$ et $x = 1$ sont des points de discontinuité. Elle est discontinue également sur l'intervalle fermé $(1, 2)$, car elle admet une discontinuité à l'extrémité $x = 1$. Elle est encore discontinue sur l'intervalle fermé $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, car un point de discontinuité $x = 1$ est intérieur à cet intervalle.

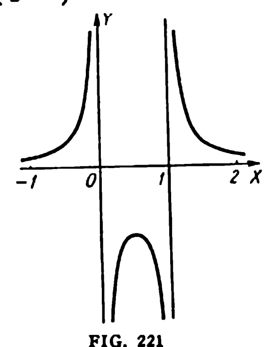


FIG. 221

§ 221. Propriétés des fonctions continues sur un intervalle fermé

Supposons que $f(x)$ soit continue sur l'intervalle fermé (a, b). Elle possède alors les propriétés suivantes.

1. La fonction a aux points de l'intervalle considéré la plus grande et la plus petite valeur.

REMARQUE 1. Cette propriété peut ne pas exister dans le cas d'un intervalle *ouvert* (a, b).

Ainsi, la fonction $2x$ ne possède ni de plus grande, ni de plus petite valeur dans

l'intervalle *ouvert* (1, 3) (elle aurait pu prendre ces valeurs aux extrémités $x = 1$ et $x = 3$, mais un intervalle ouvert ne comprend pas ses extrémités).

2. Si m est la valeur de la fonction $f(x)$ pour $x = a$ et n sa valeur pour $x = b$, $f(x)$ prend à l'intérieur de l'intervalle (a, b) au moins une fois toute valeur p comprise entre m et n.

Géométriquement, toute droite tracée parallèlement à l'axe des abscisses au-dessus du point A, mais au-dessous du point B (fig. 222) coupe au moins une fois la courbe AB (trois fois sur la fig. 222).

Remarque 2. Une fonction discontinue peut ne pas posséder la propriété 2 (cf. fig. 218 et 219).

2a. En particulier, si la fonction a une valeur positive à l'une des extrémités de l'intervalle et une valeur négative à l'autre extrémité, elle s'annule au moins une fois à l'intérieur de cet intervalle.

Géométriquement, si l'un des points A, B (fig. 223) est situé plus haut que l'axe OX et l'autre plus bas, alors la courbe AB rencontre au moins une fois l'axe OX (deux fois sur la fig. 223).

3. Si les variables x et x' varient de sorte que la différence $x - x'$ est un infiniment petit, la différence $f(x) - f(x')$ est aussi un infiniment petit.

Remarque 3. Si x' est une grandeur constante c, la différence $f(x) - f(c)$ est un infiniment petit en vertu de la propriété 2 § 219. En vertu de la propriété 3 du présent paragraphe, quand $x - x'$ est un infiniment petit, la différence $f(x) - f(x')$ est aussi un infiniment petit non seulement quand x' est constant, mais aussi quand x' est variable.

Remarque 4. Quand la fonction est continue dans un intervalle *ouvert* ou *semi-ouvert*, la propriété 3 peut ne pas avoir lieu. Ainsi, la fonction $\frac{1}{x}$ est continue dans l'intervalle semi-ouvert (0, 1) où l'extrémité $x = 0$ est exclue. Supposons que x et x' varient de sorte que $x' = 2x$ et $x \to 0$. La différence $x - x'$ est un infiniment petit, mais la différence $f(x) - f(x') = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$ est un infiniment grand.

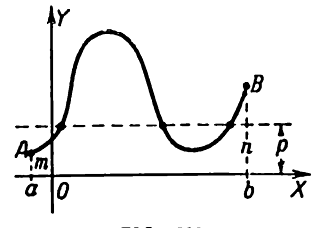


FIG. 222

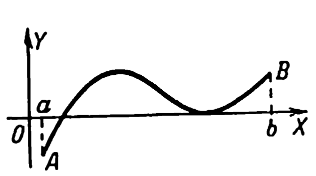


FIG. 223

Calcul différentiel

§ 222. Remarques préliminaires

Deux problèmes sont à l'origine du calcul différentiel:

1) la recherche de la tangente à une courbe quelconque (§ 225),

2) la recherche de la vitesse pour une loi arbitraire du mouvement (§ 223).

Ils ont conduit à un même problème qui a constitué la base du calcul différentiel, à savoir: on demande de définir, d'après la fonction $f(t)$, une autre fonction $f'(t)$, qui a été plus tard appelée *dérivée* et qui représente la vitesse de variation de la fonction $f(t)$ par rapport à la variation de l'argument (la définition rigoureuse du la dérivée est donnée au § 224).

C'est sous cette forme générale que le problème avait été posé par Newton, puis, sous une forme semblable, par Leibniz dans les années 70 et 80 du XVII[e] siècle. Toutefois, au cours du demi-siècle qui précéda, Fermat, Pascal et d'autres savants avaient déjà formulé les règles permettant de trouver les dérivées de nombreuses fonctions.

Newton et Leibniz ont parachevé l'œuvre; ils ont introduit les notions générales de dérivée [*] et de différentielle [**], ainsi que des notations facilitant grandement les calculs; ils ont développé au maximum l'appareil du calcul différentiel et l'ont appliqué à la résolution de nombreux problèmes de géométrie et de mécanique. L'insuffisance de la rigueur logique ne fut comblée qu'au XIX[e] siècle (cf. § 191).

§ 223. Vitesse [***]

Pour déterminer la vitesse d'un train nous le repérons à l'instant $t = t_1$ et à l'instant $t = t_2$. Supposons que les trajets soient s_1 et s_2. Nous

[*] La « fluxion » de Newton. Le terme «dérivée» a été introduit par Arbogast à la fin du XVIII[e] siècle.

[**] Le terme « différentielle » a été introduit par Leibniz.

[***] Ce paragraphe sert d'introduction au § 224.

divisons l'accroissement (§ 217a) du chemin parcouru $\Delta s = s_2 - s_1$ par l'accroissement du temps $\Delta t = t_2 - t_1$. Le quotient

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \tag{1}$$

donne *la vitesse moyenne* du train dans l'intervalle (t_1, t_2). Dans le cas d'un mouvement non uniforme la vitesse moyenne n'est pas une caractéristique suffisante de la vitesse du mouvement à l'instant $t = t_1$. Mais plus Δt est petit, et plus cette caractéristique est précise. C'est pourquoi on appelle *vitesse à l'instant* $t = t_1$ la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \tag{2}$$

Exemple. Chute libre d'un corps. Nous avons:

$$s = \frac{1}{2} g t^2. \tag{3}$$

Comme $t_2 = t_1 + \Delta t$, il vient

$$\Delta s = s_2 - s_1 = \frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2.$$

Par conséquent,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g (t_1 + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t_1^2}{\Delta t}. \tag{4}$$

Calculant la limite nous trouvons:

$$v = g t_1. \tag{5}$$

Nous avons introduit la notation t_1 pour souligner *la constance de t lors du calcul de la limite*. Comme t_1 est un instant arbitraire, il est préférable de rejeter l'indice 1 ; on voit alors de la formule

$$v = g t, \tag{5a}$$

que la vitesse v, de même que le chemin parcouru s, est une fonction du temps. La forme de la fonction v dépend entièrement de la forme de la fonction s, de sorte que la fonction v « dérive » en quelque sorte de la fonction s, et on l'appelle *fonction dérivée*.

§ 224. Définition de la dérivée (*)

Soit $y = f(x)$ une fonction continue de l'argument x définie dans l'intervalle (a, b) et soit x un point quelconque de cet intervalle. Donnons à l'argument x un accroissement Δx (positif ou négatif). La fonction $y = f(x)$ acquiert un accroissement Δy égal à

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \tag{1}$$

Quand Δx est infiniment petit, l'accroissement Δy est aussi infiniment petit (§ 219).

La limite vers laquelle tend le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quand $\Delta x \to 0$, c'est-à-dire

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \tag{2}$$

est elle-même une fonction de l'argument x (cf. § 223). Cette fonction est appelée *dérivée* de la fonction $f(x)$ et est notée $f'(x)$ ou y'.

En résumé, *on appelle dérivée de la fonction la limite (**) vers laquelle tend le rapport de l'accroissement infiniment petit de la fonction à l'accroissement infiniment petit correspondant de l'argument.*

REMARQUE. *Lorsqu'on recherche la limite* (2), la grandeur x est supposée constante.

EXEMPLE 1. Trouver la valeur de la dérivée de la fonction $y = x^2$ pour $x = 7$.

SOLUTION. Pour $x = 7$ nous avons $y = 7^2 = 49$. Donnons à l'argument x l'accroissement Δx. L'argument devient égal à $7 + \Delta x$, et la fonction prend la valeur $(7 + \Delta x)^2$.

L'accroissement Δy de la fonction est égal à

$$\Delta y = (7 + \Delta x)^2 - 7^2 = 14\,\Delta x + \Delta x^2.$$

Le rapport de cet accroissement à l'accroissement Δx est

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 14 + \Delta x.$$

Nous trouvons la limite vers laquelle tend $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quand $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (14 + \Delta x) = 14.$$

La valeur cherchée de la dérivée est 14.

(*) Nous recommandons de lire au préalable § 223.
(**) Cf. § 231 pour les cas où cette limite n'existe pas.

EXEMPLE 2. Trouver la dérivée de la fonction $y = x^2$ (pour une valeur arbitraire de x). Donnons à l'argument un accroissement Δx. L'argument prend la valeur $x + \Delta x$. L'accroissement Δy de la fonction est $(x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à $\frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$. La dérivée est la limite de ce rapport quand $\Delta x \to 0$:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

La dérivée cherchée est $y' = 2x$. Quand $x = 7$, nous obtenons $y' = 14$ (cf. exemple 1).

EXEMPLE 3. Trouver la dérivée de la fonction $y = \sin x$ (l'argument est exprimé en radians).

SOLUTION. Donnons à l'argument l'accroissement Δx. L'accroissement de la fonction est $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}$.

Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est égal à

$$\frac{2 \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

La limite de ce rapport, quand $\Delta x \to 0$ (§§ 213, 215), est égale à

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos x.$$

Par conséquent, $y' = \cos x$.

§ 225. Tangente

On dit que la droite $T'MT$ est *tangente* à la courbe L au point M (fig. 224) si la sécante MM' tend vers la position $T'MT$ (*) lorsque M', tout en restant sur L, tend vers M.

(*) L'expression « tend vers la position » signifie que l'angle aigu de la droite immobile $T'MT$ avec la droite mobile MM' tend vers zéro.

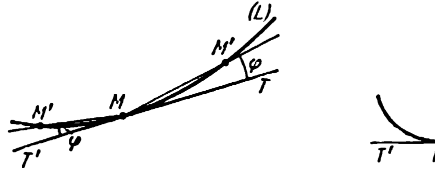


FIG. 224

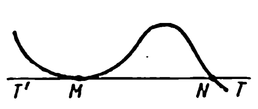


FIG. 225

REMARQUE. On voit (fig. 225) que la tangente peut avoir avec la courbe des points communs autres que le point de tangence.

Si L est la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$, le coefficient angulaire de la tangente est égal à la valeur de la dérivée au point correspondant (*)

Cela apparaît de la fig. 226. Le coefficient angulaire k de la sécante est égal à $k = \frac{QM'}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Si M' tend vers M, alors k a pour limite le coefficient angulaire m de la tangente. Cela signifie que $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, autrement dit (§ 224) $m = f'(x)$.

EXEMPLE 1. Trouver le coefficient angulaire et l'équation de la tangente à la parabole $y = x^2$ au point $M(1, 1)$ (fig. 227).

SOLUTION. Nous avons $y' = 2x$ (§ 224, exemple 2). Pour $x = 1$ nous obtenons $y' = 2$. Le coefficient angulaire cherché de la tangente est $m = 2$. L'équation de la tangente est $y - 1 = m(x - 1)$, c'est-à-dire $y = 2x - 1$.

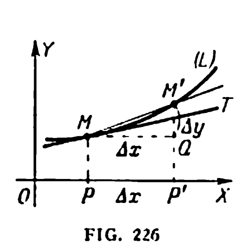


FIG. 226

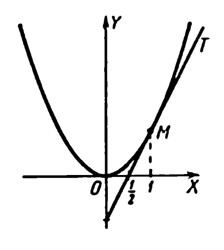


FIG. 227

(*) Si la courbe représentative ne possède pas de tangente, la fonction $f(x)$ n'a pas de dérivée, et inversement.

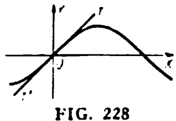


FIG. 228

EXEMPLE 2. Trouver l'équation de la tangente à la courbe $y = \sin x$ (sinusoïde, fig. 228) au point O, (0, 0).

SOLUTION. Nous avons $y' = \cos x$ (§ 224, exemple 3). Pour $x = 0$ nous obtenons $y' = 1$. L'équation de la tangente est $y = x$.

Notons que la sinusoïde est située de part et d'autre de la tangente $T'OT$.

EXEMPLE 3. Le coefficient angulaire (égal à a) de la ligne droite $y = ax + b$ est la dérivée de la fonction $y = ax + b$ (la tangente à une droite est cette droite elle-même).

§ 226. Dérivées de quelques fonctions simples

1. *La dérivée d'une constante* est égale à zéro

$$(a)' = 0. \tag{1}$$

Signification physique (§ 223): la vitesse d'un point immobile est nulle.

Signification géométrique: le coefficient angulaire de la droite $y = a$ (UV sur la fig. 229) est nul (cf. § 225, exemple 3).

REMARQUE. Pour certaines valeurs de x la fonction peut avoir une dérivée nulle sans pour cela être constante. Ainsi, la dérivée $(\sin x)' = \cos x$ (§ 224, exemple 3) est nulle pour $x = \frac{\pi}{2}$, $x = -\frac{3\pi}{2}$, etc.

Or, si la dérivée $f'(x)$ est *identiquement* nulle, la fonction $f(x)$ est nécessairement constante (§ 265, théorème 1).

2. *La dérivée de la variable indépendante* est égale à l'unité:

$$(x)' = 1. \tag{2}$$

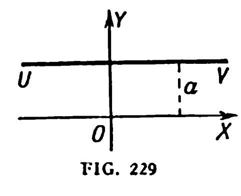


FIG. 229

Signification géométrique: le coefficient angulaire de la droite $y = x$ est égal à l'unité.

Signification physique: si le chemin parcouru par un corps est numériquement égal à la durée du mouvement, la vitesse est numériquement égale à l'unité.

3. *La dérivée de la fonction linéaire* $y = ax + b$ est la constante a:

$$(ax + b)' = a. \qquad (3)$$

4. *La dérivée de la fonction puissance* est égale au produit de l'exposant de la puissance par la fonction puissance avec un exposant inférieur d'une unité:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \qquad (4)$$

EXEMPLES.

1) $(x^2)' = 2x$.

2) $(x^3)' = 3x^2$.

3) $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$.

§ 227. Propriétés de la dérivée

1. On peut sortir un facteur constant de sous le signe de la dérivée:

$$[af(x)]' = af'(x).$$

EXEMPLES.

1) $(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x$.

2) $\left(\frac{5}{x^2}\right)' = 5\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 5\left(-\frac{2}{x^3}\right) = -\frac{10}{x^3}$.

3) $(\sqrt{2x})' = \sqrt{2}(\sqrt{x})' = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

2. La dérivée de la somme algébrique de plusieurs fonctions (en nombre fixe) est égale à la somme algébrique de leurs dérivées

$$[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]' = f_1'(x)' + f_2'(x) - f_3'(x).$$

EXEMPLES.

4) $(0{,}3x^2 - 2x + 0{,}8)' = (0{,}3x^2)' - (2x)' + (0{,}8)' = 0{,}6x - 2$ (la dérivée du dernier terme est nulle; § 226, 1).

5) $\left(\frac{3}{x^2} - 6\sqrt{x}\right)' = \left(\frac{3}{x^2}\right)' - 6(\sqrt{x})' = -\frac{6}{x^3} - \frac{3}{\sqrt{x}}$.

§ 228. Différentielle

DÉFINITION. Supposons que l'accroissement (§ 217a) de la fonction $f(x)$ est la somme de deux termes:

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

où A ne dépend pas de Δx (c'est-à-dire est constant pour une valeur donnée de l'argument x) et α est d'ordre supérieur (§ 217) par rapport à Δx (quand $\Delta x \to 0$).

Dans ce cas, le premier terme proportionnel à Δx est appelé la *différentielle* de la fonction $f(x)$ et est noté dy ou $df(x)$.

EXEMPLE 1. Prenons la fonction $y = x^3$. Nous avons alors (*)

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + (3x\Delta x^2 + \Delta x^3). \tag{2}$$

Ici le coefficient $A = 3x^2$ ne dépend pas de Δx, de sorte que le premier terme est proportionnel à Δx et l'autre terme $\alpha = 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$ est d'ordre supérieur (deuxième) par rapport à Δx. Par conséquent, le terme $3x^2\Delta x$ est la différentielle de la fonction x^3:

$$dy = 3x^2\Delta x \quad \text{ou} \quad d(x^3) = 3x^2\Delta x. \tag{3}$$

THÉORÈME 1. Le coefficient A est égal à la dérivée $f'(x)$, en d'autres termes *la différentielle de la fonction est égale au produit de la dérivée par l'accroissement de l'argument*:

$$dy = y'\Delta x \tag{4}$$

ou

$$df(x) = f'(x)\,\Delta x. \tag{4a}$$

EXEMPLE 2. Nous avons trouvé dans l'exemple 1 que $d(x^3) = 3x^2\Delta x$. Le coefficient $3x^2$ est égal à la dérivée de la fonction x^3.

EXEMPLE 3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors $y' = -\frac{1}{x^2}$ (§ 226, 4). C'est pourquoi $dy = -\frac{\Delta x}{x^2}$.

Vérifions cette affirmation. Nous avons $\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x)} - \frac{1}{x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$. Si l'on décompose cette expression en deux termes dont le premier est $-\frac{\Delta x}{x^2}$, le second sera $\frac{\Delta x^2}{x^2(x + \Delta x)}$. Le second terme est d'ordre supérieur (deuxième) par rapport à Δx (**).

THÉORÈME 2. Si la dérivée n'est pas nulle, la différentielle de la fonction et son accroissement sont des infiniment petits équivalents

---

(*) L'écriture Δx^2 signifie la même chose que $(\Delta x)^2$ (nous omettons les parenthèses). Si l'on doit désigner l'accroissement de la fonction x^2, on le note $\Delta(x^2)$.

(**) On suppose que $x \neq 0$ (pour $x = 0$ la fonction $\frac{1}{x}$ n'est pas définie).

(quand $\Delta x \to 0$); si la dérivée est nulle (dans ce cas la différentielle est aussi nulle). ils ne sont pas équivalents.

EXEMPLE 4. Si $y = x^2$, alors $\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2$ et $dy = 2x\Delta x$. Pour $x = 3$ les grandeurs $\Delta y = 6\Delta x + \Delta x^2$ et $dy = 6\Delta x$ sont des infiniment petits équivalents, pour $x = 0$ les grandeurs $\Delta y = \Delta x^2$ et $dy = 0$ ne sont pas équivalentes.

On utilise souvent l'équivalence de la différentielle et de l'accroissement dans les calculs approchés (il est généralement plus facile de calculer la différentielle que la dérivée).

EXEMPLE 5. Soit donné un cube métallique d'arête $x = 10{,}00$ cm. Quand on chauffe le cube, l'arête s'allonge de $\Delta x = 0{,}01$ cm. Trouver l'accroissement du volume V du cube.

SOLUTION. Nous avons $V = x^3$, de sorte que $dV = 3x^2\Delta x = 3 \cdot 10^2 \cdot 0{,}01 = 3$ (cm³). L'accroissement ΔV du volume est équivalent à la différentielle dV, de sorte que $\Delta V \approx 3$ cm³. Un calcul exact aurait donné $\Delta V = 10{,}01^3 - 10^3 = 3{,}003001$. Toutefois, dans ce résultat tous les chiffres à l'exception du premier ne sont pas sûrs; cela signifie que l'on doit de toute façon arrondir cette valeur jusqu'à 3 cm³.

On donnera plus bas [§ 243 (exemple 4) et § 248] d'autres exemples d'application de la différentielle dans les calculs approchés.

§ 229. Interprétation mécanique de la différentielle

Soit $s = f(t)$ la distance parcourue par un point en mouvement rectiligne à partir d'une position initiale (t est la durée du trajet). L'accroissement Δs est le chemin parcouru par le point dans l'intervalle de temps Δt et la différentielle $ds = f'(t)\,\Delta t$ (§ 228, théorème 1) le chemin que le point aurait parcouru pendant le même intervalle de temps Δt s'il avait conservé la vitesse $f'(t)$ atteinte à l'instant t. Quand Δt est infiniment petit, le chemin virtuel ds diffère du chemin véritable Δs d'un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δt. Si la vitesse à l'instant t n'est pas nulle, ds donne une valeur approchée d'un petit déplacement du point (cf. § 228, théorème 2).

§ 230. Interprétation géométrique de la différentielle

Soit L (fig. 230) la courbe représentative de la fonction $y = f(x)$. Nous avons alors

$$\Delta x = MQ, \qquad \Delta y = QM'.$$

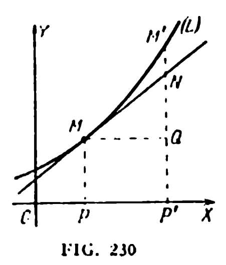


FIG. 230

La tangente MN partage le segment Δy en deux parties, QN et NM'. La première est proportionnelle à Δx et égale à $QN = MQ \times \times \operatorname{tg} \widehat{QMN} = \Delta x f'(x)$ (cf. § 225), autrement dit, QN est la différentielle dy.

La seconde partie NM' est la différence $\Delta y - dy$; c'est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx. Dans le cas considéré où $f'(x) \neq 0$ (la tangente n'est pas parallèle à l'axe OX), les segments QM' et QN sont équivalents (§ 228, théorème 2); en d'autres termes, NM' est aussi d'un ordre supérieur par rapport à $\Delta y = QM'$. Cela apparaît de la figure (plus M' s'approche de M et plus la part du segment NM' dans le segment QM' devient petite).

Ainsi, *la différentielle de la fonction est représentée graphiquement par l'accroissement de l'ordonnée de la tangente.*

§ 231. Fonctions différentiables

Une fonction continue possédant (en un point donné) une différentielle est dite *différentiable* (au point donné).

Une fonction discontinue ne peut avoir au point de discontinuité ni de dérivée, ni de différentielle (la courbe représentative n'a pas de tangente; cf. fig. 214 et fig. 219).

Une fonction continue en un point donné peut ne pas avoir de différentielle en ce point. Nous considérons plus bas trois cas caractéristiques.

CAS 1. La fonction $y = f(x)$ possède au point considéré une *dérivée infinie*, autrement dit,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty$$

ou

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$$

(en d'autres termes Δy est d'ordre inférieur par rapport à Δx). La courbe représentative possède une tangente verticale.

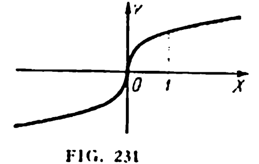


FIG. 231

ÉCRITURE (conventionnelle):

$$f'(x) = \infty.$$

EXEMPLE 1. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (fig. 231) n'est pas différentiable au point $x = 0$. La grandeur

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{0 + \Delta x} - \sqrt[3]{0}}{\Delta x}$$

a la limite infinie $+\infty$ quand $\Delta x \to 0$.

La tangente au point $x = 0$ coïncide avec l'axe OY.

REMARQUE 1. Une fonction possédant (en un point donné) une dérivée *finie* est différentiable. Inversement, une fonction différentiable possède une dérivée finie.

CAS 2. Le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ n'a pas de limite quand $\Delta x \to 0$ (autrement dit, la fonction $y = f(x)$ ne possède pas de dérivée), mais possède une limite à droite (quand $\Delta x \to +0$, § 219a) et une limite à gauche (quand $\Delta x \to -0$). La première est appelée *dérivée à droite* et notée $f'(x + 0)$ et la seconde *dérivée à gauche* et notée $f'(x - 0)$.

Au point considéré (M sur la fig. 232) la courbe représentative n'a pas de tangente unique, mais une *demi-tangente à droite* MT_1 et une *demi-tangente à gauche* MT_2, autrement dit, la sécante MM' tend vers la position MT_1 quand M' tend vers M à droite, et la position MT_2 quand M' tend vers M à gauche.

EXEMPLE 2. La fonction $f(x) = 1 - |1 - x|$ (fig. 233) n'est pas différentiable au point $x = 1$. La courbe $K'MK$ n'a pas de tangente au point $M(1, 1)$. La dérivée à droite $f'(1 + 0) = -1$, la dérivée à gauche $f'(1 - 0) = 1$.

CAS 3. La fonction $y = f(x)$ n'a pas de dérivée à droite ou de dérivée à gauche (ou ni l'une, ni l'autre). La courbe représentative n'a pas de demi-tangente correspondante.

EXEMPLE 3. La fonction donnée par la formule $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (fig. 234) est, avec la condition supplémentaire $f(0) = 0$ (l'expression $\sin \frac{1}{x}$ n'a pas de sens pour $x = 0$), continue au point $x = 0$.

Toutefois quand M' tend vers O à droite (ou à gauche), la sécante OM' oscille entre les droites UV ($y = x$) et $U'V'$ ($y = -x$) et ne tend vers aucune droite. La courbe représentative ne possède au point O ni de demi-tangente à droite ni de demi tangente à gauche et la fonction $f(x)$ ni de dérivée à droite, ni de dérivée à gauche.

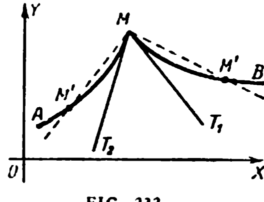


FIG. 232

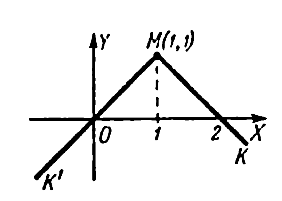


FIG. 233

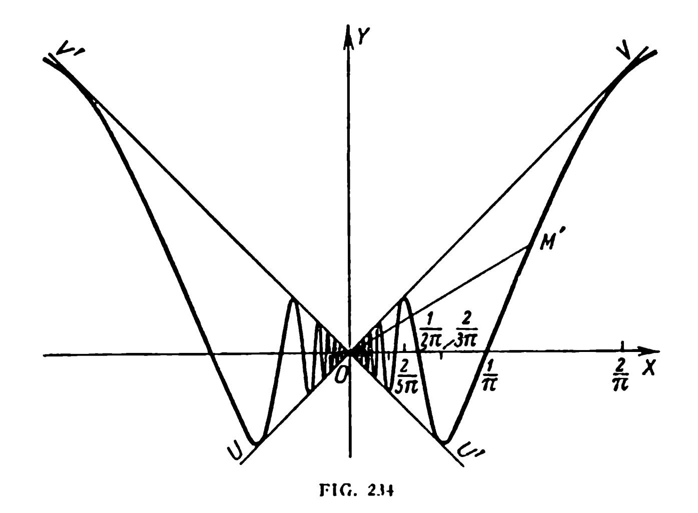


FIG. 234

REMARQUE 2. On peut même imaginer des fonctions continues qui ne possèdent pas de dérivée en aucun point (*). Par conséquent, l'existence de la dérivée ne découle pas logiquement de la continuité des fonctions. Ce fait fut découvert par Lobatchevski.

§ 232. Différentielles de quelques fonctions simples

1. La différentielle d'une grandeur constante est nulle:

$$da = 0. \tag{1}$$

2. La différentielle de la variable indépendante est égale à son accroissement:

$$dx = \Delta x. \tag{2}$$

(*) Nous ne pouvons ni construire, ni même nous imaginer la courbe figurative de cette fonction; en effet, nous acquérons l'idée d'une courbe en faisant abstraction des objets réels, et elle s'avère indissolublement liée à la notion de direction. Déjà dans l'exemple 3 la « courbe » $y = x \sin \frac{1}{x}$ n'a pas de direction au point $x = 0$. Mais dans ce cas le fait qu'au voisinage du point O la courbe a une direction déterminée vient aider notre imagination.

3. En général, la différentielle d'une fonction linéaire est égale à son accroissement:

$$d(ax + b) = \Delta(ax + b) = a\Delta x. \quad (3)$$

Pour les autres fonctions la différentielle et l'accroissement *ne sont pas égaux* (mais leur différence est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx; § 228).

4. La différentielle de la fonction puissance x^n est égale à $nx^{n-1}\Delta x$ [cf. (4) § 233):

$$dx^n = nx^{n-1}\Delta x. \quad (4)$$

§ 233. Propriétés de la différentielle

1. On peut sortir un facteur constant de sous le signe de la différentielle:

$$d[af(x)] = adf(x). \quad (1)$$

2. La différentielle de la somme algébrique de plusieurs fonctions (en nombre fixe) est égale à la somme algébrique de leurs différentielles:

$$d[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = df_1(x) + df_2(x) - df_3(x). \quad (2)$$

3. La différentielle d'une fonction est égale au produit de la dérivée par la différentielle de l'argument:

$$df(x) = f'(x)\,dx. \quad (3)$$

Cela découle du § 228 (théorème 1) et du § 232, 2.

En particulier (cf. § 232, 4).

$$d(x^n) = nx^{n-1}dx. \quad (4)$$

§ 234. Invariance de l'expression $f'(x)\,dx$

L'expression $f'(x)\,\Delta x$ représente (§ 228, théorème 1) la différentielle $df(x)$ quand on considère x comme argument. Si la grandeur x elle-même est considérée comme une fonction d'un certain argument t, l'expression $f'(x)\Delta x$ *ne représente pas* en règle générale *la différentielle* (cf. plus bas exemple 1); le cas de la fonction linéaire $x = at + b$ fait exception.

Au contraire, la formule (3) du § 233

$$df(x) = f'(x)\,dx \quad (1)$$

est valable aussi bien dans le cas où x est un argument (dans ce cas $dx = \Delta x$) que dans le cas où x est une fonction de t (cf. plus bas exemple 2).

Cette propriété de l'expression $f'(x)\,dx$ est appelée son *invariance*.

EXEMPLE 1. L'expression $2x\Delta x$ est la différentielle de la fonction $y = x^2$ quand x est l'argument.

Posons maintenant

$$x = t^2 \tag{2}$$

et considérons t comme argument. Nous avons alors

$$y = x^2 = t^4. \tag{3}$$

Nous trouvons de (2):

$$\Delta x = 2t\Delta t + \Delta t^2. \tag{4}$$

Cela signifie que

$$2x\Delta x = 2t^2(2t\Delta t + \Delta t^2). \tag{5}$$

Cette expression n'est pas proportionnelle à Δt, de sorte que $2x\Delta x$ n'est pas égale à la différentielle. Nous trouvons de (3) la différentielle de la fonction y:

$$dy = 4t^3\Delta t. \tag{6}$$

Comparant (5) et (6) nous voyons que la différence entre $2x\Delta x$ et dy est égale à $2t^2\Delta t^2$ qui est du second ordre par rapport à Δt.

EXEMPLE 2. L'expression $2xdx$ représente la différentielle de la fonction $y = x^2$ *pour n'importe quel argument* t. Supposons, par exemple, que $x = t^2$. Nous avons alors

$$dx = 2t\Delta t.$$

Cela signifie que

$$2xdx = 2t^2 \cdot 2t\Delta t = 4t^3\Delta t.$$

Comparant avec (6), nous voyons que

$$dy = 2xdx.$$

§ 235. Expression de la dérivée en fonction des différentielles

La dérivée de la fonction y par rapport à l'argument x est égale au rapport de la différentielle de la variable y à la différentielle de la variable x:

$$y'_x = \frac{dy}{dx}.$$

L'indice x dont on a affecté le symbole y' souligne le fait que *lors du calcul de la dérivée* l'argument est précisément x. Par contre, les

différentielles dy et dx *peuvent être prises par rapport à n'importe quel argument* (cf. § 234).

Les notations les plus commodes de la dérivée sont souvent l'expression $\frac{dy}{dx}$ et les expressions analogues:

$$\frac{df(x)}{dx} \text{ (la dérivée de la fonction } f(x) \text{ par rapport à } x\text{)},$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \text{ (la dérivée de la fonction } \varphi(t) \text{ par rapport à } t\text{)},$$

$$\frac{d(3x^2 + 2x + 1)}{dx} = 6x + 2, \text{ etc.}$$

On utilise également les notations conventionnelles

$$\frac{d}{dx}f(x), \quad \frac{d}{dx}(3x^2 + 2x + 1), \text{ etc.},$$

particulièrement commodes quand on calcule la dérivée d'une expression compliquée.

§ 236. Fonction de fonction (fonction composée)

La grandeur y est appelée *fonction de fonction* (ou fonction *composée*) si elle est considérée comme une fonction d'une certaine variable (auxiliaire) u qui à son tour dépend de l'argument x:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(x). \tag{1}$$

Donc, y s'avère être une fonction de x, ce que l'on peut écrire ainsi:

$$y = f[\varphi(x)]. \tag{2}$$

Si $f(u)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions continues, la fonction $f[\varphi(x)]$ est aussi continue.

EXEMPLE. Si $y = u^3$ et $u = 1 + x^2$, alors y est une fonction composée de x, ce que l'on peut écrire

$$y = (1 + x^2)^3.$$

§ 237. Différentielle d'une fonction composée

La recherche de la différentielle d'une fonction composée n'exige pas de règles particulières (du fait de l'invariance de l'expression $f'(x)\,dx$; § 234).

EXEMPLE 1. Soit à différentier la fonction $y = (1 + x^2)^3$.

SOLUTION. Considérant y comme une fonction composée ($y = u^3$, $u = 1 + x^2$), nous avons:

$$dy = 3u^2 du, \quad du = 2x dx.$$

Nous en tirons:

$$dy = 3(1 + x^2)^2 \cdot 2x dx = (6x + 12x^3 + 6x^5)\, dx.$$

Nous pouvons obtenir directement ce résultat:

$$dy = d(1 + 3x^2 + 3x^4 + x^6) = (6x + 12x^3 + 6x^5)\, dx.$$

REMARQUE. On n'introduit pas dans la pratique une notation spéciale pour la variable auxiliaire u. Dans l'exemple 1 on procède ainsi:

$$d(1 + x^2)^3 = 3(1 + x^2)^2 \cdot d(1 + x^2) = 3(1 + x^2)^2\, 2x dx.$$

EXEMPLE 2. Trouver $d\sqrt{a^2 - x^2}$.

SOLUTION.

$$d\sqrt{a^2 - x^2} = d(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(a^2 - x^2) = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

§ 238. Dérivée d'une fonction composée

La dérivée d'une fonction composée est égale à la dérivée de la fonction par rapport à la variable auxiliaire, multipliée par la dérivée de cette variable par rapport à l'argument:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \qquad (1)$$

EXEMPLE 1. Trouver la dérivée de la fonction

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

(par rapport à l'argument x).

Posant

$$y = u^{\frac{1}{2}}, \quad u = a^2 - x^2,$$

nous avons:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{du}{dx} = -2x.$$

Nous obtenons d'après la formule (1):

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

REMARQUE. Quand ils utilisent la notation $(\sqrt{a^2-x^2})'$, les débutants commette souvent une erreur. Sachant que $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, ils écrivent le résultat sous la forn $\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}$, en oubliant de multiplier par $(a^2-x^2)'=-2x$. L'erreur est due à notation défectueuse (on ne voit pas par rapport à quel argument la dérivée est calculé C'est pourquoi on utilisera au début l'écriture suivante:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\frac{d}{dx}(a^2-x^2)=\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}(-2x).$$

Quand une habitude suffisante est acquise, on accomplira mentalement la transfo mation auxiliaire.

On évite le mieux l'erreur en calculant au préalable la différentielle $d\sqrt{a^2-x}$ Obtenant (§ 237, exemple 2) $\frac{-x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, nous prenons le coefficient de dx (autr ment dit, nous divisons par dx) et nous trouvons pour la dérivée l'expression $\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$

EXEMPLE 2. Trouver la dérivée de la fonction $y=\sin^2 2x$.

SOLUTION. Nous avons ici trois dépendances successives:

$$y=u^2,\quad u=\sin v,\quad v=2x.$$

Par analogie avec (1) nous avons: $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$. Vu qu $\frac{du}{dv}=\frac{d\sin v}{dv}=\cos v$ (§ 224, exemple 3), nous trouvons:

$$\frac{dy}{dx}=2u\cdot\cos v\cdot 2=4\sin 2x\cdot\cos 2x=2\sin 4x.$$

Pour ne pas commettre d'erreur il est préférable de procéder ainsi:

$$d\sin^2 2x=2\sin 2x\cdot d\sin 2x=2\sin 2x\cos 2x\cdot d(2x)=$$
$$=4\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot dx.$$

Divisant par dx nous obtenons:

$$\frac{d\sin^2 2x}{dx}=4\sin 2x\cos 2x.$$

§ 239. Différentielle et dérivée d'un produit

RÈGLE. La différentielle du produit de deux fonctions est égale à la somme des produits de chacune de ces fonctions par la différentielle de l'autre:

$$d(uv) = udv + vdu. \tag{1}$$

Pour le cas de trois facteurs nous avons

$$d(uvw) = vw \cdot du + uw \cdot dv + uv \cdot dw, \tag{2}$$

on procède de façon analogue pour un nombre arbitraire de facteurs.

La dérivée du produit est calculée d'après la même règle (le mot « différentielle » est remplacé par le mot « dérivée »):

$$(uv)' = uv' + vu', \tag{1a}$$

$$(uvw)' = vwu' + uwv' + uvw'. \tag{2a}$$

EXEMPLE 1. Trouver la différentielle et la dérivée de la fonction $(2x^2 + 3x)(x^3 - 2)$.

SOLUTION.

$$d[(2x^2 + 3x)(x^3 - 2)] = (2x^2 + 3x)\,d(x^3 - 2) + (x^3 - 2) \times$$

$$\times\, d(2x^2 + 3x) = (2x^2 + 3x)\,3x^2dx + (x^3 - 2)(4x + 3)\,dx =$$

$$= (10x^4 + 12x^3 - 8x - 6)\,dx.$$

Le coefficient $10x^4 + 12x^3 - 8x - 6$ est la dérivée. Nous aurions trouvé d'après la formule (1a):

$$[(2x^2 + 3x)(x^3 - 2)]' = (2x^2 + 3x)(x^3 - 2)' + (x^3 - 2)(2x^2 + 3x)', \quad \text{etc.}$$

EXEMPLE 2.

$$d\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = xd \sin \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x} \cdot dx = x \cos \frac{1}{x}\, d\left(\frac{1}{x}\right) + \sin \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \frac{-x \cos \frac{1}{x}}{x^2}\, dx + \sin \frac{1}{x}\, dx = \left(-\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}\right) dx.$$

Nous en tirons

$$\frac{d}{dx}\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} + \sin \frac{1}{x}. \tag{3}$$

REMARQUE. On suppose que $x \neq 0$. Pour $x = 0$ la fonction $x \sin \frac{1}{x}$ n'est pas déterminée. Toutefois, même si on la complète (§ 231, exemple 3), elle n'est pas dérivable pour $x = 0$ (quand $x \to 0$, la dérivée (3) ne tend vers aucune limite; cf. fig. 234).

§ 240. Différentielle et dérivée d'un quotient (d'une fraction)

Règle. La différentielle d'une fraction est égale au produit du dénominateur par la différentielle du numérateur moins le produit du numérateur par la différentielle du dénominateur, le tout divisé par le carré du dénominateur:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}. \tag{1}$$

On a la même règle pour la dérivée d'une fraction (le mot « différentielle » est remplacé par le mot « dérivée »)

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}. \tag{1a}$$

Exemple 1. Trouver y' si $y = \dfrac{2x+1}{x^2+1}$. Nous avons:

$$y' = \frac{(x^2+1)(2x+1)' - (2x+1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)\,2 - (2x+1)\,2x}{(x^2+1)^2},$$

c'est-à-dire

$$y' = \frac{2(-x^2-x+1)}{(x^2+1)^2}.$$

Exemple 2. Trouver $d\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Nous considérons d'abord cette expression comme une fonction composée $\left(y = \sqrt{u};\ u = \dfrac{1+x}{1-x}\right)$:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,d\,\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,\frac{(1-x)\,dx + (1+x)\,dx}{(1-x)^2}.$$

Après simplifications nous obtenons:

$$d\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

§ 241. Fonction inverse

Si de la relation $y = f(x)$ découle la relation $x = \varphi(y)$, la fonction $\varphi(y)$ est appelée fonction *inverse* de la fonction $f(x)$.

Exemple 1. La fonction inverse de $y = x^2$ est $x = \pm\sqrt{y}$ (fonction à deux déterminations).

Exemple 2. La fonction inverse de $y = \sin x$ est la fonction à une infinité de déterminations $x = \arcsin y$ (définie pour toutes les valeurs de y inférieures à 1 en valeur absolue).

REMARQUE. En règle générale, la fonction inverse est multiforme (*). On peut faire abstraction de cette complication si l'on rétrécit le domaine de définition de la fonction initiale. Ainsi, dans l'exemple 1 on peut faire abstraction des valeurs négatives de l'argument x et alors la fonction inverse $x = +\sqrt{y}$ sera uniforme.

Avec les notations précédentes, le graphe de la fonction $y = f(x)$ est également celui de la fonction inverse $x = \varphi(y)$.

Toutefois, les notations des variables sont d'ordinaire interverties et l'on désigne l'argument de la fonction inverse par x, de même pour l'argument de la fonction donnée.

EXEMPLE 3. La fonction inverse de $y = x^2$ est $y = \sqrt{x}$ (fonction uniforme), la fonction inverse de $y = 2^x$ est la fonction $y = \log_2 x$.

Avec ces notations les graphes d'une fonction et de son inverse sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (fig. 235).

DÉRIVÉE DE LA FONCTION INVERSE. Etant données deux fonctions inverses (au sens de ce paragraphe), la dérivée de chacune d'elles est l'inverse (au sens arithmétique) de la dérivée de l'autre (**):

$$\frac{dx}{dy} = 1 : \frac{dy}{dx}. \tag{1}$$

EXEMPLE 4. Considérons la fonction $y = x^2$ pour les valeurs positives de x. La fonction inverse (fig. 236) est $x = \sqrt{y}$. Nous avons:

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2x}.$$

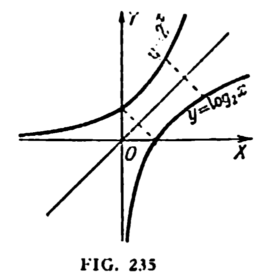


FIG. 235

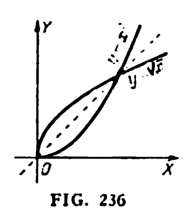


FIG. 236

(*) A l'exception des cas où, avec la croissance de l'argument, la valeur de la fonction initiale ne cesse de croître ou de decroître (de telles fonctions sont dites *monotones*).

(**) Si la dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule, on doit comprendre la formule (1) dans ce sens que la fonction inverse possède en ce point une dérivée infinie, autrement dit, $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \infty$ (cf. § 231, cas 1; § 213, remarque 2).

§ 242. Logarithmes népériens

La formule de dérivation de la fonction logarithmique (§ 213) prend une forme simple quand la base du logarithme est le nombre

$$e = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}71828$$

(§ 214). Le logarithme est alors appelé ***népérien*** et noté ln [*].

Pour passer des logarithmes népériens aux logarithmes de base a, on doit les multiplier par le module égal à $\log_a e$:

$$\log_a x = \log_a e \ln x. \tag{1}$$

Inversement, pour passer du logarithme de base a au logarithme népérien, il faut le multiplier par $\ln a$ (c'est-à-dire par $\log_e a$) [**]:

$$\ln x = \ln a \log_a x. \tag{2}$$

Règle mnémonique. Ecrivant la formule (1) sous sa forme complète, nous obtenons $\log_a x = \log_a e \log_e x$. Si l'on rejette les symboles log et si avec les lettres restantes on forme des « fractions » $\frac{x}{a}$, $\frac{e}{a}$, $\frac{x}{e}$, la première est le produit des deux autres. Il en est de même pour la formule (2).

Le module relatif au passage *des logarithmes népériens aux logarithmes décimaux* (ou vulgaires) est noté M:

$$M = \lg e = 0{,}43129 \tag{3}$$

(on retient aisément les quatre premiers chiffres $M = 0{,}4343$). Les formules (1), (2) s'écrivent alors [***]

$$\lg x = M \ln x, \tag{4}$$

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x, \tag{5}$$

où

$$\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026. \tag{6}$$

(*) Le nombre e est irrationnel; de plus, il est transcendant, autrement dit, il ne peut être la racine d'une équation algébrique à coefficients rationnels. De même, tous les logarithmes népériens des nombres entiers sont transcendants, ainsi que les logarithmes décimaux de tous les nombres entiers (sauf 1, 10, 100, 1000, etc.). La transcendance du nombre e a été démontrée en 1871 par Hermite, la transcendance des logarithmes en 1934 par Guelfond.

(**) Les quantités $\log_a e$ et $\log_e a$ sont inverses ($\log_a e \cdot \log_e a = 1$).

(***) Pour ne pas se tromper lorsqu'on multiplie par M et par $\frac{1}{M}$, il est utile de tenir compte du fait que le logarithme décimal de tout nombre supérieur à l'unité est *plus petit* que le logarithme népérien (par exemple, $\ln 10 \approx 2{,}3$ et $\lg 10 = 1$).

Pour multiplier par M et par $\frac{1}{M}$ on peut utiliser des tables spéciales (pp. 831-832).

EXEMPLE 1. Trouver ln 100.

En vertu de la formule (5) nous trouvons $\ln x \approx 2{,}3026 \cdot 2 \approx 4{,}605$.

EXEMPLE 2. Calculer e^3 à l'aide de la table des logarithmes décimaux.

Nous avons: $\lg (e^3) = 3 \lg e = 3M = 1{,}3029$, d'où $e^3 \approx 20{,}09$. On peut utiliser la table des logarithmes népériens (pp. 828-830). Nous avons: $\ln (e^3) = 3$; pour trouver les quatre premiers chiffres du nombre e^3 il faut réaliser une interpolation.

EXEMPLE 3. Le logarithme décimal d'un nombre est égal à 0,5041; trouver son logarithme népérien. Nous avons:

$$\ln x = \frac{1}{M} \lg x \approx 2{,}303 \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161.$$

On peut trouver ce produit à l'aide de la table de la page 832; notamment,

$$\frac{1}{M} \cdot 0{,}50 \approx 1{,}1513$$

$$\frac{1}{M} \cdot 0{,}0041 \approx 0{,}0094$$

$$\overline{\frac{1}{M} \cdot 0{,}5041 \approx 1{,}161}$$

§ 243. Différentielle et dérivée de la fonction logarithmique

La différentielle et la dérivée du logarithme népérien (§ 242) s'expriment par les formules

$$d \ln x = \frac{dx}{x}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}. \tag{2}$$

Si la base du logarithme est un nombre arbitraire, alors [*]

$$d \log_a x = \log_a e \frac{dx}{x}, \tag{3}$$

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \log_a e \cdot \frac{1}{x}. \tag{4}$$

[*] On peut obtenir la formule (3) de (1) en tenant compte de la formule (1) du § 242.

En particulier, pour les logarithmes décimaux on a

$$d \lg x = \frac{M dx}{x}, \tag{3a}$$

$$\frac{d \lg x}{dx} = M \cdot \frac{1}{x}. \tag{4a}$$

Ici $M \approx 0{,}4343$ est le module relatif au passage des logarithmes népériens aux logarithmes décimaux.

EXEMPLE 1.

$$\frac{d}{dx} \ln(ax + b) = \frac{1}{ax + b} \cdot \frac{d}{dx}(ax + b) = \frac{a}{ax + b}.$$

EXEMPLE 2.

$$d \ln \frac{1 + x}{1 - x} = d \ln(1 + x) - d \ln(1 - x) = \frac{dx}{1 + x} + \frac{dx}{1 - x} = \frac{2dx}{1 - x^2}.$$

EXEMPLE 3. Trouver la valeur de la dérivée de $\lg x$ pour $x = 100$.

La formule (4a) donne $(\lg x)' = \dfrac{M}{x} \approx \dfrac{0{,}4343}{100} \approx 0{,}0043$.

EXEMPLE 4. Trouver, sans utiliser les tables, lg 101.

L'accroissement $\Delta \lg x$ est approximativement égal à la différentielle $d \lg x = \dfrac{M \Delta x}{x}$. Pour $x = 100$ et $\Delta x = 1$ nous obtenons: $\Delta \lg x \approx$ $\approx \dfrac{0{,}4343 \cdot 1}{100} \approx 0{,}0043$. Par conséquent,

$$\lg 101 = \lg 100 + \Delta \lg 100 \approx 2 + 0{,}0043 = 2{,}0043,$$

ce qui coïncide avec la valeur lue dans la table.

§ 244. Dérivée logarithmique

Lors de la dérivation on peut prendre au préalable le logarithme des expressions se prêtant bien à cette opération.

EXEMPLE 1. Dériver la fonction $y = xe^{-x^2}$

1) En prenant le logarithme dans le système de base e, nous trouvons:

$$\ln y = \ln x - x^2. \tag{1}$$

2) Dérivons maintenant les deux membres de l'égalité (1):

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - 2x dx.$$

3) Remplaçant y par xe^{-x^2}, nous trouvons:

$$dy = xe^{-x^2}\left(\frac{1}{x} - 2x\right)dx = e^{-x^2}(1 - 2x^2)\,dx.$$

Exemple 2. Dériver la fonction $y = x^x$. Nous obtenons successivement:

1) $\ln y = x \ln x$,

2) $\dfrac{y'}{y} = x(\ln x)' + \ln x = 1 + \ln x$,

3) $y' = y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x)$.

Exemple 3. Dériver la fonction

$$y = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

(cf. § 240, exemple 2).

1) $\ln y = \dfrac{1}{2}\ln(1 + x) - \dfrac{1}{2}\ln(1 - x)$,

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-x} = \dfrac{1}{1-x^2}$,

3) $y' = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}$.

Exemple 4. Dériver la fonction

$$y = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3\,(x+3)^4}.$$

1) $\ln y = 2\ln(x + 1) - 3\ln(x + 2) - 4\ln(x + 3)$,

2) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4}{x+3}$,

3) $$y' = \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3\,(x+3)^4}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} - \frac{4}{x+3}\right) =$$

$$= -\frac{(x+1)\,(5x^2 + 14x + 5)}{(x+2)^4\,(x+3)^5}.$$

Le procédé exposé est appelé *la dérivation logarithmique*, et la dérivée du logarithme de la fonction $y = f(x)$

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

la dérivée logarithmique de la fonction $f(x)$.

§ 245. Différentielle et dérivée de la fonction exponentielle

La différentielle et la dérivée de la fonction exponentielle e^x $\left[\text{où } e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \approx 2{,}71828\right]$ s'expriment par les formules (*)

$$de^x = e^x dx, \qquad \frac{d}{dx}e^x = e^x \tag{1}$$

(la dérivée de la fonction e^x est égale à cette même fonction). Pour une base arbitraire a nous avons:

$$da^x = a^x \ln a\, dx, \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a. \tag{2}$$

En particulier,

$$d\,10^x = 10^x \frac{1}{M}\,dx, \qquad \frac{d}{dx}\,10^x = 10^x \frac{1}{M}. \tag{2a}$$

Ici $\frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}3026$.

Exemple 1. $\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}$.

Exemple 2.

$$d(xe^{-x^2}) = x\,de^{-x^2} + e^{-x^2}dx = xe^{-x^2}d(-x^2) + e^{-x^2}dx = e^{-x^2}(1-2x^2)\,dx.$$

Exemple 3.

$$d\frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{(e^t + e^{-t})\,d(e^t - e^{-t}) - (e^t - e^{-t})\,d(e^t + e^{-t})}{(e^t + e^{-t})^2} =$$

$$= \frac{(e^t + e^{-t})^2 - (e^t - e^{-t})^2}{(e^t + e^{-t})^2}\,dt = \frac{4dt}{(e^t + e^{-t})^2}.$$

Exemple 4. $d7^{t^2} = 7^{t^2}\ln 7\, d(t^2) = 2t\,7^{t^2}\ln 7\, dt$.

(*) On peut obtenir les formules (1) et (2) par dérivation logarithmique (§ 244) ou, considérant la fonction exponentielle comme l'inverse de la fonction logarithmique (§ 241).

§ 246. Différentielles et dérivées des fonctions trigonométriques (*)

Différentielles	Dérivées
I. $d \sin x = \cos x\, dx,$	$\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x,$
II. $d \cos x = -\sin x\, dx,$	$\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x,$
III. $d \operatorname{tg} x = \dfrac{dx}{\cos^2 x},$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos^2 x},$
IV. $d \operatorname{cotg} x = -\dfrac{dx}{\sin^2 x};$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{cotg} x = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Ces formules doivent être apprises par cœur. Par contre, il n'est pas nécessaire de retenir les deux formules suivantes:

V. $d \sec x = \operatorname{tg} x \cdot \sec x\, dx,$	$\dfrac{d}{dx} \sec x = \operatorname{tg} x \cdot \sec x,$
VI. $d \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x\, dx;$	$\dfrac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{cosec} x.$

EXEMPLE 1. $d \sin 2x = \cos 2x d(2x) = 2 \cos 2x\, dx.$

EXEMPLE 2.

$$\frac{d}{dx} \ln \sqrt{\sin 2x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln \sin 2x = \frac{1}{2 \sin 2x} \cdot \frac{d}{dx} \sin 2x = \operatorname{cotg} 2x.$$

EXEMPLE 3.

$$\frac{d}{d\varphi} \ln \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{d}{d\varphi} \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{cotg} \varphi \frac{1}{\cos^2 \varphi} = \frac{2}{\sin 2\varphi}.$$

EXEMPLE 4.

$$\frac{d}{dx} x^{\sin x} = x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right).$$

(*) Pour établir la formule I cf. § 224 exemple 3; la formule II est établie de manière analogue, et les formules III, IV à l'aide des relations:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

S'obtient par dérivation logarithmique (§ 244). Posant $y = x^{\sin x}$, nous trouvons $\ln y = \sin x \ln x$, d'où

$$\frac{1}{y}\frac{d}{dx}y = \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}.$$

§ 247. Différentielles et dérivées des fonctions trigonométriques inverses (*)

Différentielles	Dérivées
I. $d \arcsin x = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
II. $d \arccos x = -\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,	$\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
III. $d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$,	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$,
IV. $d \operatorname{arc\,cotg} x = -\dfrac{dx}{1+x^2}$;	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cotg} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

On doit apprendre ces formules par cœur. Par contre, il n'est pas besoin de retenir les deux formules suivantes:

V. $d \operatorname{arc\,sec} x = \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$,	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,sec} x = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$,
VI. $d \operatorname{arc\,cosec} x = -\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;	$\dfrac{d}{dx}\operatorname{arc\,cosec} x = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

Exemple 1. $$d \arcsin \frac{x}{a} = \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{a}\right)^2}} = \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}, \quad a > 0. \qquad (1)$$

Exemple 2. $$d \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} = \frac{d\left(\dfrac{x}{a}\right)}{1+\left(\dfrac{x}{a}\right)^2} = \frac{a\,dx}{a^2+x^2}. \qquad (2)$$

(*) On établit les formules I-VI à partir des formules correspondantes du § 246 (cf. § 241).

EXEMPLE 3.

$$\frac{d}{dx} = \text{arc tg}\,\frac{3x+5}{2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3x+5}{2}\right) : \left[1 + \left(\frac{3x+5}{2}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{9x^2+30x+29} = \frac{6}{9x^2+30x+29}.$$

EXEMPLE 4.

$$d\,\text{arc cos}\,\frac{3}{4x-1} = d\left(\frac{3}{4x-1}\right) : -\sqrt{1-\left(\frac{3}{4x-1}\right)^2} =$$

$$= -\frac{3\cdot 4\cdot dx}{(4x-1)^2} : -\frac{\sqrt{(4x-1)^2-9}}{|4x-1|} = \frac{6dx}{|4x-1|\sqrt{4x^2-2x-2}}.$$

REMARQUE. La fonction $\text{arc cos}\,\frac{3}{4x-1}$ est définie uniquement pour $\left|\frac{3}{4x-1}\right| \leqslant 1$, c'est-à-dire soit pour $x \geqslant 1$, soit pour $x \leqslant -\frac{1}{2}$. Dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ elle n'est pas définie. Si l'on porte formellement une valeur quelconque qui ne convient pas (par exemple $x = 0$) dans l'expression de la différentielle, cette dernière perd le sens.

§ 247a. Quelques exemples instructifs

Les exemples que nous rapportons ci-après servent à illustrer certaines questions délicates qui se posent lors de la dérivation des fonctions trigonométriques inverses.

EXEMPLE 1.

$$d\,\text{arc tg}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{1+x^2}.$$

L'expression obtenue coïncide avec la différentielle de la fonction arc cotg x. Toutefois, ce n'est que pour les x positifs que l'on a l'égalité:

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{x} = \text{arc cotg}\,x. \tag{1}$$

Pour les x négatifs nous avons (*):

$$\text{arc tg}\,\frac{1}{x} - \text{arc cotg}\,x = -\pi. \tag{2}$$

(*) On peut aisément vérifier la formule (2) pour le point $x = -1$, pour lequel nous avons:

$$\text{arc cotg}\,x = \frac{3\pi}{4}, \qquad \text{arc tg}\,\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{4}.$$

D'autre part, la différence $\text{arc tg}\,\frac{1}{x} - \text{arc cotg}\,x$ est constante pour les x négatifs, car sa

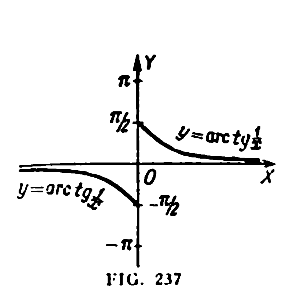


FIG. 237

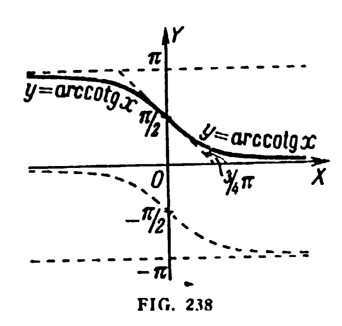


FIG. 238

Pour $x = 0$ la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ (fig. 237) est discontinue (sa limite à gauche est égale à $-\frac{\pi}{2}$ et sa limite à droite à $+\frac{\pi}{2}$; cf. § 218), et, par conséquent, elle n'est pas dérivable, tandis que la fonction arc cotg x (fig. 238) est continue et sa dérivée pour $x = 0$ est égale à -1. La branche de droite de la courbe représentative de $y = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ coïncide avec la partie de droite de la courbe de $y = \operatorname{arc\,cotg} x$, et la branche de gauche avec la partie de gauche de la courbe en pointillé de la fig. 238 (cette dernière est une détermination secondaire de la fonction multiforme $y = \operatorname{arc\,cotg} x$).

EXEMPLE 2.

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) : \left[1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{2}{(1-x)^2}\cdot\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'expression obtenue coïncide avec la dérivée de la fonction arc tg x.

Pour $x < 1$ cette fonction est liée avec la fonction donnée par la relation (*)

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arc\,tg} x + \frac{\pi}{4} \tag{3}$$

(fig. 239) et, pour $x > 1$, par la relation

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x} = \operatorname{arc\,tg} x - \frac{3\pi}{4}. \tag{4}$$

---

dérivée $\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)$ est nulle pour tous les $x < 0$ (cf. § 226, 1). Cela signifie que la formule (2) est valable pour *toutes les valeurs négatives* de x; posant $x = +1$ et raisonnant de même nous voyons que c'est la formule (1) qui est valable pour *toutes les valeurs positives* de x. Pour $x = 0$ la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}$ n'est pas définie et, par conséquent, n'a pas de dérivée. C'est pourquoi on ne peut affirmer que la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc\,cotg} x$ est constante *sur toute la droite numérique* (cf. § 265, théorème 1).

(*) La démonstration est celle du renvoi précédent.

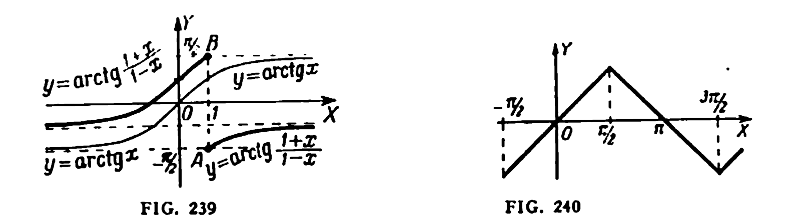


FIG. 239 FIG. 240

Pour $x = 1$, la fonction $\operatorname{arc\,tg}\frac{1+x}{1-x}$ admet une discontinuité $AB = \pi$ et ne possède pas de dérivée.

EXEMPLE 3.

$$\frac{d}{dx}\arcsin(\sin x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cdot\frac{d}{dx}\sin x = \frac{\cos x}{|\cos x|}.$$

Cette dérivée est égale à $+1$ quand $\cos x > 0$, et à -1 quand $\cos x < 0$. Pour $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, quand $\cos x = 0$, la dérivée n'existe pas.

REMARQUE. Dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ nous avons $\arcsin(\sin x) = x$; dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$; dans l'intervale $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$, etc. (fig. 240). C'est pourquoi à l'intérieur du premier intervalle la dérivée est égale à 1, à l'intérieur du second à -1, etc. Aux points $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ la dérivée admet une discontinuité; en chacun de ces points il existe une dérivée à droite et une dérivée à gauche (cf. § 231, exemple 2).

§ 248. Différentielle et calculs approchés

Il arrive souvent que la fonction $f(x)$ et sa dérivée $f'(x)$ se calculent facilement pour $x = a$, et que pour les valeurs de x proches de a le calcul direct de la fonction est malaisé. On utilise alors la formule approchée

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)\,h. \tag{1}$$

Elle signifie que l'accroissement $f(a+h) - f(a)$ de la fonction $f(x)$ est, pour de petites valeurs de h, approximativement égal (*) à la différentielle $f'(a)\,h$ (cf. § 228, théorème 2).

(*) Si $f'(a) = 0$, la formule (1) signifie que l'accroissement de la fonction est petit par rapport à h; alors pour les valeurs de h suffisamment petites on peut pratiquement considérer que $f(a+h) = f(a)$.

On indiquera plus loin (§ 265) un procédé d'estimation de l'erreur (*) commise sur $f(a+h)$ dans la formule (1), mais cette estimation est souvent liée à des calculs laborieux. Pour des calculs non rigoureux on se limite à appliquer la formule (1).

EXEMPLE 1. Extraire la racine carrée de 3654.

SOLUTION. Il faut trouver la valeur de la fonction $f(x)=\sqrt{x}$ pour $x=3654$. On calcule aisément les valeurs de $f(x)$ et $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x=3600$. La formule (1) donne pour $a=3600$, $h=54$: $\sqrt{3654}\approx$ $\approx 60+\frac{1}{2\cdot 60}\cdot 54\approx 60{,}45$. Ici tous les chiffres sont exacts.

EXEMPLE 2. Trouver $10^{2,1}$.

SOLUTION. Nous posons $f(x)=10^x$, de sorte que (§ 245) $f'(x)=$ $=\frac{1}{M}10^x\left(\frac{1}{M}\approx 2{,}3026\right)$. La formule (1) pour $a=2$, $h=0{,}1$ donne alors:

$$10^{2,1}\approx 100+\frac{1}{M}\cdot 100\cdot 0{,}1\approx 123{,}0.$$

Ce résultat est assez grossier (en effet, avec quatre chiffres significatifs exacts on a $10^{2,1}=125{,}9$).

Si l'on calcule de même $10^{2,01}$ (maintenant $h=0{,}01$), nous obtenons 102,3. Ici tous les chiffres sont exacts.

EXEMPLE 3. Trouver, sans utiliser la table, tg 46°.

SOLUTION. Posons $f(x)=\operatorname{tg} x$, $a=45°$, $h=1°=0{,}0175$ radian; nous avons alors: $f'(a)=\frac{1}{\cos^2 45°}=2$. Par conséquent, $\operatorname{tg}46°\approx$ $\approx 1+2\cdot 0{,}0175=1{,}0350$.

Seul le dernier chiffre est faux; nous lisons en effet dans la table $\operatorname{tg}46°=1{,}0355$.

Il est utile de rapporter les formules approchées suivantes (**) (α est petit):

$$\frac{1}{1+\alpha}\approx 1-\alpha,\qquad \frac{1}{1-\alpha}\approx 1+\alpha; \tag{2}$$

$$\frac{1}{(1+\alpha)^2}\approx 1-2\alpha,\qquad \frac{1}{(1-\alpha)^2}\approx 1+2\alpha; \tag{3}$$

(*) Cf. également § 271, remarque.

(**) Les formules (2)-(6) sont des cas particuliers de la formule $(1+\alpha)^n\approx 1+n\alpha$; on obtient cette dernière de (1), en posant $f(x)=x^n$, $a=1$, $h=\alpha$.

$$\sqrt{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha, \qquad \sqrt{1-\alpha} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha; \tag{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha, \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha; \tag{5}$$

$$\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{3}\alpha, \qquad \sqrt[3]{1-\alpha} \approx 1 - \frac{1}{3}\alpha; \tag{6}$$

$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha, \qquad \ln(1-\alpha) \approx -\alpha; \tag{7}$$

$$e^{\alpha} \approx 1 + \alpha, \qquad 10^{\alpha} \approx 1 + \frac{1}{M}\alpha; \tag{8}$$

$$\sin\alpha \approx \alpha, \qquad \cos\alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2, \quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha. \tag{9}$$

§ 249. Application de la différentielle aux calculs d'erreurs résultant des formules

La précision insuffisante des instruments de mesure est à l'origine de l'erreur commise sur la valeur de la quantité à mesurer. On appelle *borne supérieure de l'erreur absolue* un nombre positif supérieur à cette erreur en valeur absolue (ou, au pis aller, égal à cette erreur). Le rapport de la borne supérieure de l'erreur absolue à la valeur absolue de la grandeur mesurée est appelée *borne supérieure de l'erreur relative.*

EXEMPLE 1. On a mesuré la longueur d'un crayon avec une règle graduée en millimètres. La mesure a donné 17,9 cm. L'erreur commise est inconnue, mais elle est certainement inférieure à 0,1 cm. C'est pourquoi 0,1 cm est la borne supérieure de l'erreur absolue. La borne supérieure de l'erreur relative est égale à $\frac{0,1}{17,9}$. Arrondissant par excès nous trouvons 0,6%.

RECHERCHE DE LA BORNE SUPÉRIEURE DE L'ERREUR ABSOLUE. Supposons que la fonction y soit calculée d'après la formule exacte $y = f(x)$, mais qu'on ait commis une erreur sur la valeur de x obtenue par mesure. On trouve alors la borne supérieure de l'erreur absolue $|\Delta y|$ d'après la formule

$$|\Delta y| \approx |dy| = |f'(x)|\,|\Delta x|, \tag{1}$$

où $|\Delta x|$ est la borne supérieure de l'erreur absolue sur l'argument. On arrondit la grandeur $|\Delta y|$ par excès (du fait de l'inexactitude de la formule elle-même).

EXEMPLE 2. Le côté d'un carré est 46 m. La borne supérieure de l'erreur absolue est égale à 0,1 m. Trouver la borne supérieure de l'erreur absolue sur l'aire du carré.

SOLUTION. Nous avons $y = x^2$ (x désigne le côté du carré, y son aire). Par conséquent, $|\Delta y| \approx 2|x| \cdot |\Delta x|$. Dans notre exemple $x = 46$ et $|\Delta x| = 0{,}1$. Cela signifie que $|\Delta y| \approx 2 \cdot 46 \cdot 0{,}1 = 9{,}2$. La borne supérieure de l'erreur absolue est égale (en arrondissant) à 10 m², et celle de l'erreur relative à $\frac{10}{46^2} \approx 0{,}5\%$.

On peut également trouver la borne supérieure de l'erreur relative $\left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ par dérivation logarithmique (§ 244) à l'aide de la formule

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx |d \ln y|. \tag{2}$$

En particulier pour $y = x^n$ $\left(\text{dans ce cas } d \ln y = \frac{n\,dx}{x}\right)$ nous avons

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx n\left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \tag{3}$$

autrement dit, *la borne supérieure de l'erreur relative sur la puissance x^n est égale à n fois la borne supérieure de l'erreur relative sur l'argument.*

EXEMPLE 3. Dans les hypothèses de l'exemple 2 la borne supérieure de l'erreur relative commise sur l'aire est égale à $2 \cdot \frac{0{,}1}{46} \approx 0{,}5\%$.

EXEMPLE 4. La mesure de la longueur de l'arête d'un cube a donné $x = 12{,}4$ cm. La borne supérieure de l'erreur absolue est 0,05 cm. Quelle sera la borne supérieure de l'erreur relative sur le volume du cube?

SOLUTION. La borne supérieure de l'erreur relative pour x est égale à $\frac{0{,}05}{12{,}4} \approx 0{,}004$; pour x^3 elle est égale à $3 \cdot 0{,}004 = 0{,}012$.

RÈGLE 1. La borne supérieure de l'erreur relative sur un produit est égale à la somme des bornes supérieures des erreurs relatives sur les facteurs.

RÈGLE 2. La borne supérieure de l'erreur relative sur une fraction est égale à la somme des bornes supérieures des erreurs relatives sur le numérateur et le dénominateur.

Ces règles découlent des §§ 239, 240 (*).

(*) La formule $d \ln \frac{u}{v} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}$ donne la borne supérieure de l'erreur relative $\left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|$, et non $\left|\frac{du}{u} - \frac{dv}{v}\right|$, car les quantités $\frac{du}{u}$ et $\frac{dv}{v}$ peuvent être de signes différents.

EXEMPLE 5. Pour trouver le poids spécifique d'un corps on a mesuré son poids $p = 20$ g et le poids du volume d'eau qu'il déplace $v = 40$ g. La borne supérieure de l'erreur absolue sur p est égale à 0,5 g et celle sur v à 1 g. Déterminer la borne supérieure de l'erreur relative sur le poids spécifique.

SOLUTION. Le poids spécifique y est égal à $\frac{p}{v}\cdot$ Nous avons:

$$\left|\frac{\Delta y}{y}\right| = \left|\frac{\Delta p}{p}\right| + \left|\frac{\Delta v}{v}\right| = \frac{0,5}{20} + \frac{1}{40} = 0,05.$$

EXEMPLE 6. La hauteur h et le rayon de la base r d'un cylindre sont mesurés à 1% près. Trouver la borne supérieure de l'erreur relative 1) sur l'aire S de la surface latérale, 2) sur le volume V du cylindre.

SOLUTION. Nous avons $S = 2\pi rh$. Le facteur 2π est un nombre exact. La borne supérieure de l'erreur relative sur S est $\left|\frac{\Delta S}{S}\right| = \left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 2\%$, et sur $V = \pi r^2 h$: $2\left|\frac{\Delta r}{r}\right| + \left|\frac{\Delta h}{h}\right| = 3\%$.

§ 250. Dérivation des fonctions implicites

Supposons que l'équation reliant x et y et vérifiée pour les valeurs $y = y_0$ et $x = x_0$ définisse y comme une fonction implicite de x. Pour rechercher la dérivée $\frac{dy}{dx}$ au point $x = x_0$, $y = y_0$, il n'est pas nécessaire de rechercher au préalable l'expression explicite de cette fonction. Il suffit d'égaler les différentielles des deux membres de l'équation et de trouver de l'égalité obtenue le rapport $dy : dx$.

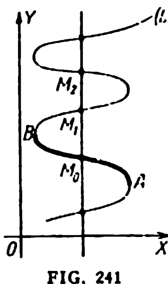


FIG. 241

REMARQUE. L'équation reliant x et y peut définir y comme une fonction multiforme de x ($F(x)$). Toutefois la donnée du couple de valeurs $x = x_0$ et $y = y_0$ permet d'isoler l'une des déterminations de la fonction.

GÉOMÉTRIQUEMENT, une droite parallèle à OY (fig. 241) peut couper la courbe L en plusieurs points M_0, M_1, M_2, ..., mais la donnée du point M_0 a pour effet d'isoler l'arc AM_0B qui est une fonction uniforme.

EXEMPLE 1. Trouver la dérivée de la fonction implicite donnée par l'équation $x^2 + y^2 = 25$ au point $x = 4$, $y = -3$.

PREMIER PROCÉDÉ. Résolvant l'équation, nous obtenons $y = -\sqrt{25 - x^2}$ (nous choisissons le signe moins, car pour $x = 4$ nous devons avoir $y = -3$). Nous trouvons maintenant:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} = \frac{4}{3}.$$

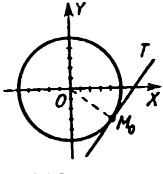


FIG. 242

SECOND PROCÉDÉ. Egalant les différentielles des deux membres nous trouvons:

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = \frac{4}{3}. \quad (1)$$

Nous avons trouvé le coefficient angulaire de la tangente M_0T à la circonférence $x^2 + y^2 = 25$ (fig. 242) au point M_0 (4, —3). Le coefficient angulaire du rayon OM_0 est $-\frac{3}{4}$. Le produit des coefficients angulaires est égal à -1, autrement dit, $OM_0 \perp M_0T$.

EXEMPLE 2. Trouver la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de la fonction implicite donnée par l'équation (*)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2)$$

Nous trouvons en prenant les différentielles

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} = 0,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}. \quad (3)$$

L'équation (2) représente une ellipse. En vertu de (3) le coefficient angulaire de la tangente MT (fig. 243) est $-\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$. Le coefficient angulaire du diamètre MM' est $\frac{y}{x}$. Le produit des coefficients angulaires est égal à $-\frac{b^2}{a^2}$.

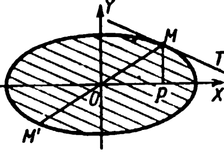


FIG. 243

(*) L'équation (2) détermine y comme une fonction biforme de x, mais dès que l'on connaît les valeurs des deux variables, on peut isoler l'une des deux déterminations de la fonction (cf. exemple 1).

Cela signifie (§ 55) que les directions MT et MM' sont conjuguées, autrement dit, que le diamètre MM' est le lieu des milieux des cordes parallèles à MT.

Les diamètres de l'hyperbole et de la parabole possèdent la même propriété.

§ 251. Courbes définies paramétriquement

On appelle *paramètre* (*) toute variable t déterminant la position d'un point sur une courbe. En mécanique, c'est le temps qui joue le plus souvent le rôle de paramètre.

Les coordonnées du point de la courbe L sont des fonctions du paramètre:

$$x = f(t), \tag{1}$$

$$y = \varphi(t). \tag{2}$$

Les équations (1)-(2) sont appelées les *équations paramétriques* de la courbe L (cf. § 152).

Si l'on veut trouver l'équation reliant les coordonnées x, y de la courbe L, il faut éliminer t entre les équations (1) - (2) (cf. exemples 1 et 2).

Il peut arriver toutefois que l'équation obtenue par élimination de t ne représente la courbe L que partiellement (cf. exemple 3).

EXEMPLE 1. Soient O (fig. 244) la position jusqu'à laquelle monte un point matériel, lancé sous un angle donné par rapport à l'horizon, et t le temps compté à partir de l'instant où il atteint la plus haute position. La position du point M sur la trajectoire AOB est déterminée par la grandeur t, de sorte que t est un paramètre. Les équations paramétriques de la trajectoire dans le système XOY sont:

$$x = OP = v_0 t, \tag{3}$$

$$y = PM = -\frac{1}{2} g t^2, \tag{4}$$

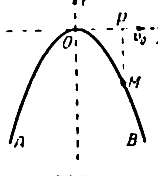


FIG. 244

c'est-à-dire que suivant la direction horizontale le point se déplace d'un mouvement uniforme à la vitesse v_0 et suivant la verticale il descend d'un mouvement uniformément accéléré (où g est l'accélération de la pesanteur).

(*) On utilise également le terme « paramètre » pour désigner une grandeur qui est invariable pour une courbe donnée, mais varie quand on passe d'une courbe du type considéré à une autre. Ainsi la grandeur p dans l'équation de la parabole $y^2 = 2px$ est constante pour une parabole donnée, mais varie quand on passe à une autre parabole.

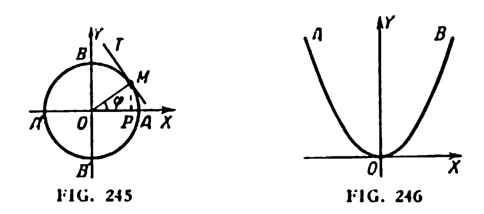


FIG. 245 FIG. 246

Eliminant t, nous trouvons l'équation

$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2, \tag{5}$$

indiquant que le point en mouvement décrit une parabole.

EXEMPLE 2. La position du point M sur la circonférence $ABA'B'$ de rayon R (fig. 245) est déterminée par la valeur de l'angle $\varphi = \widehat{AOM}$, de sorte que φ est un paramètre. Disposant les axes comme l'indique la fig. 245 nous trouvons les équations paramétriques de la circonférence

$$x = R \cos \varphi, \tag{6}$$

$$y = R \sin \varphi. \tag{7}$$

Pour éliminer φ, élevons (6) et (7) au carré et additionnons-les, nous obtenons:

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{8}$$

EXEMPLE 3. Considérons la courbe représentée par les équations paramétriques

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = \frac{1}{2} t. \tag{9}$$

Eliminant t, nous obtenons l'équation $y = \frac{1}{2} x^2$, représentant la parabole AOB (fig. 246). La courbe (9) est la demi-parabole (OB), correspondant aux valeurs positives de x.

§ 252. Fonctions définies paramétriquement

Soient données deux fonctions de l'argument t:

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t). \tag{1}$$

Dans ce cas, l'une d'entre elles, par exemple y, est fonction de l'autre(*). On dit alors que cette fonction est définie *paramétriquement* par les égalités (1) et on appelle *paramètre* la variable auxiliaire t.

(*) Elle est généralement multiforme, même quand $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont uniformes.

Pour obtenir l'expression explicite de y en fonction de x, il faut résoudre l'équation $x = f(t)$ par rapport à t (cela n'est pas toujours possible) et porter l'expression trouvée de t dans l'équation $y = \varphi(t)$.

D'autre part il est souvent plus commode de passer de la représentation non paramétrique à la représentation paramétrique. Le choix de l'une des fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ étant arbitraire, on s'efforce d'assurer l'uniformité et, dans la mesure du possible, la simplicité des deux fonctions.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'exprime en fonction du paramètre t par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varphi(t)}{df(t)} = \frac{\varphi'(t)}{f'(t)}. \tag{2}$$

Lors de la représentation paramétrique les deux variables x et y jouissent de mêmes droits (cf. § 251).

EXEMPLE 1. Soient données deux fonctions:

$$x = R\cos t, \qquad y = R\sin t. \tag{3}$$

Elles donnent paramétriquement y comme une fonction biforme de x (et inversement). Nous trouvons de la première équation: $\cos t = \frac{x}{R}$, de sorte que $\sin t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{R^2}}$. Portant dans la seconde équation nous obtenons:

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}. \tag{4}$$

C'est l'équation d'une circonférence (cf. § 251, exemple 2). Le paramètre t est l'angle $\widehat{XOM}$ (cf. fig. 245). La dérivée $\frac{dy}{dx}$ exprimée en fonction du paramètre t est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(R\sin t)}{d(R\cos t)} = -\operatorname{cotg} t. \tag{5}$$

C'est le coefficient angulaire de la tangente MT.

EXEMPLE 2. L'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6}$$

représentant une ellipse, donne la fonction biforme $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Pour la donner paramétriquement, on peut exprimer l'une quelconque

des variables, par exemple x, en fonction de t. Posant $\frac{x}{a} = \cos t$, nous trouvons $\frac{y}{b} = \pm \sin t$. Le choix du signe est arbitraire. Prenons le signe plus. Nous obtenons les équations

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t. \tag{7}$$

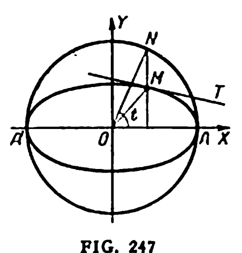


FIG. 247

La signification géométrique du paramètre t est révélée par la fig. 247 où ANA' est la circonférence de rayon a et N le point situé sur la même verticale et du même côté (*) de l'axe AA' que le point M de l'ellipse. Nous avons $t = \widehat{AON}$.

La dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'exprime en fonction de t par la formule

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(b \sin t)}{d(a \cos t)} = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t.$$

C'est le coefficient angulaire de la tangente MT.

REMARQUE. La représentation habituelle de la fonction $y = f(x)$ peut être considérée comme un cas particulier de la représentation paramétrique si on l'écrit sous la forme

$$x = t, \qquad y = f(t).$$

§ 253. Cycloïde

On appelle *cycloïde* la courbe décrite par le point M d'un cercle roulant sans glisser sur une droite *(directrice)*. Le cercle est appelé *cercle générateur.*

Prenons la directrice pour axe des X (fig. 248); la position initiale du cercle générateur est celle où le point M vient au point du contact du cercle et de la droite. Figurons une position quelconque (NME) du cercle.

REMARQUE. La condition de roulement sans glissement est que la distance du point de contact N à sa position initiale O est égale à la longueur de l'arc NM:

$$ON = \widehat{NM}. \tag{1}$$

(*) Si l'on prend $\frac{y}{b} = -\sin t$, on doit prendre N de l'autre côté.

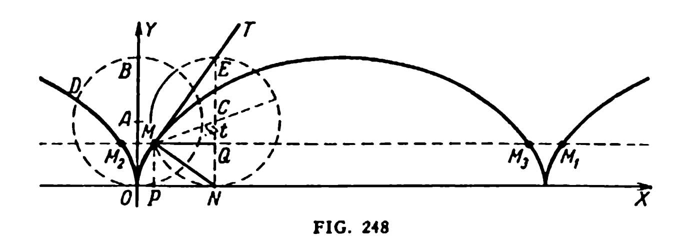


FIG. 248

EQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE LA CYCLOÏDE. Si l'on dispose les axes de coordonnées comme l'indique la fig. 248 et si l'on prend l'angle $t = \widehat{MCN}$ pour paramètre, on obtient les équations paramétriques (*) de la cycloïde:

$$x = a(t - \sin t), \tag{2}$$

$$y = a(1 - \cos t), \tag{3}$$

où a est le rayon du cercle générateur.

Si l'on résout (3) par rapport à t et que l'on porte l'expression obtenue de t dans (2) nous obtenons une fonction à une infinité de déterminations de y:

$$x = 2\pi a k \pm \left(a \arccos \frac{a-y}{a} - \sqrt{y(2a-y)}\right), \tag{4}$$

où k est un entier quelconque (**).

L'ordonnée y est une fonction uniforme, mais non élémentaire de x (cf. fig. 248).

Le coefficient angulaire k de la tangente est égal à

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}, \tag{5}$$

et le coefficient angulaire k' de la droite NM est

$$k' = \frac{y - y_N}{x - x_N} = \frac{a(1 - \cos t)}{-a \sin t}. \tag{6}$$

(*) L'angle t peut être positif et négatif et posséder une valeur absolue arbitraire; pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$ les équations (2) - (3) sont aisément déduites de la fig. 248:

$$x = OP = ON - PN = \widehat{NM} - MQ = at - a \sin t,$$

$$y = PM = NC - QC = a - a \cos t.$$

(**) Sur la fig. 248 aux points M, M_1, etc. correspond le signe plus devant la parenthèse, et aux points M_2, M_3, etc. le signe moins.

Par conséquent, $kk' = -1$, autrement dit, $MT \perp MN$. Cela signifie que pour construire la tangente à la cycloïde, il suffit de joindre M au point le plus haut du cercle générateur (l'angle $\widehat{NME}$ est droit, car c'est un angle inscrit interceptant un diamètre).

§ 254. Equation de la tangente à une courbe plane

Soit MT (fig. 249) la tangente à la courbe L au point $M(x, y)$. Désignons par X, Y les coordonnées courantes du point N situé sur la tangente.

Quel que soit le mode de représentation de la courbe L (explicite, implicite ou paramétrique), l'équation de la tangente peut être représentée sous la forme symétrique:

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy}. \tag{1}$$

Si la courbe L est donnée par l'équation $y = f(x)$, nous obtenons (*):

$$Y - y = f'(x)\ (X - x). \tag{2}$$

Si la courbe L est définie paramétriquement nous obtenons:

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'}, \tag{3}$$

où x' et y' sont les dérivées par rapport au paramètre.

Quand la courbe L est donnée sous forme implicite, nous égalons les différentielles des deux membres de l'équation (cf. § 250), et dans l'égalité obtenue nous remplaçons dx, dy par les quantités proportionnelles $X - x$, $Y - y$.

EXEMPLE 1. Trouver l'équation de la tangente à la parabole $y = x^2 - 3x + 2$ au point $(0, 2)$.

Nous avons: $y' = 2x - 3 = -3$. En vertu de (2) l'équation cherchée est $Y - 2 = -3X$.

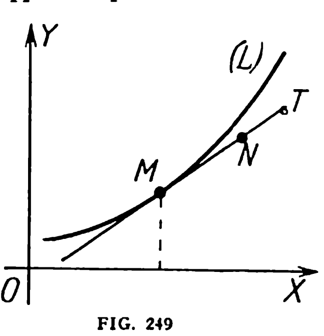


FIG. 249

(*) On suppose que la dérivée $f'(x)$ au point M est finie. Si par contre $f'(x) = \infty$ (§ 231, cas 1), nous avons au lieu de (2) l'équation

$$X - x = 0$$

(la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées).

EXEMPLE 2. Trouver l'équation de la tangente à l'ellipse

$$x = 5\sqrt{2}\cos t, \qquad y = 3\sqrt{2}\sin t \tag{4}$$

au point $M(-5, 3)$ (cf. § 252, exemple 2).

SOLUTION. Au point donné correspond la valeur $t = \frac{3\pi}{4}$. Nous trouvons de (4):

$$x' = -5\sqrt{2}\sin t = -5, \qquad y' = 3\sqrt{2}\cos t = -3.$$

En vertu de (3) l'équation de la tangente est

$$\frac{X+5}{-5} = \frac{Y-3}{-3},$$

c'est-à-dire

$$3X - 5Y + 30 = 0.$$

EXEMPLE 3. Trouver l'équation de la tangente à l'hyperbole équilatère $xy = m^2$ au point $\left(\frac{m}{2}, \ 2m\right)$.

SOLUTION. Egalant les différentielles des deux membres de l'équation, nous obtenons:

$$x\,dy + y\,dx = 0.$$

Remplaçant dx, dy par $X - x$, $Y - y$, nous trouvons:

$$x(Y-y) + y(X-x) = 0. \tag{5}$$

Comme $xy = m^2$, on peut écrire (5) sous la forme

$$xY + yX = 2m^2. \tag{6}$$

Portant $x = \frac{m}{2}$, $y = 2m$ dans (5) ou dans (6), nous trouvons:

$$Y + 4X = 4m.$$

§ 254a. Tangentes aux courbes du second degré

Equation de la courbe		Equation de la tangente
Ellipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} = 1,$
Hyperbole	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$	$\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1,$
Parabole	$y^2 = 2px,$	$yY = p(X + x).$

§ 255. Equation de la normale

On appelle *normale* à la courbe L au point M (fig. 250) la perpendiculaire MN à la tangente MT.

Conformément à l'équation (1) du § 254 l'équation de la normale est de la forme:

$$(X - x)\,dx + (Y - y)\,dy = 0. \tag{1}$$

FIG. 250

Conformément aux équations (2) et (3) du § 254 on obtient l'équation de la normale sous la forme:

$$Y - y = -\frac{1}{f'(x)}(X - x), \tag{2}$$

et

$$(X - x)\,x' + (Y - y)\,y' = 0. \tag{3}$$

Quand la courbe L est donnée sous forme implicite, nous égalons les différentielles des deux membres de l'équation et nous éliminons dx et dy à l'aide de (1).

Exemple 1. Trouver l'équation de la normale à la parabole $y = \frac{1}{2}x^2$ au point $(-2,\ 2)$.

Nous avons: $y' = x = -2$, en vertu de (2) l'équation cherchée est

$$Y - 2 = \frac{1}{2}(X + 2).$$

Exemple 2. L'équation de la normale à la cycloïde

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \tag{4}$$

(§ 253) est, en vertu de (3), de la forme

$$(X - x)(1 - \cos t) + (Y - y)\sin t = 0 \tag{5}$$

ou, en utilisant (4),

$$X(1 - \cos t) + Y\sin t - at(1 - \cos t) = 0. \tag{6}$$

Cette équation est vérifiée pour $X = at$, $Y = 0$; cela signifie que la normale passe (cf. fig. 248) par le point de contact $N(at,\ 0)$ du cercle générateur avec la droite fixe.

Exemple 3. Trouver l'équation de la normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Nous trouvons en prenant les différentielles:

$$\frac{x\,dx}{a^2}+\frac{y\,dy}{b^2}=0. \tag{7}$$

En éliminant les différentielles entre (7) et (1) nous trouvons:

$$\frac{(X-x)\,y}{b^2}=\frac{(Y-y)\,x}{a^2}.$$

§ 256. Dérivées d'ordre supérieur

Soit $f'(x)$ la dérivée de la fonction $f(x)$; la dérivée de la fonction $f'(x)$ est alors appélée *dérivée seconde* de la fonction $f(x)$ et notée $f''(x)$.

La dérivée seconde est aussi appelée *dérivée du second ordre.* A la différence de cette dernière la fonction $f'(x)$ est appelée *dérivée du premier ordre* ou *dérivée première.*

La dérivée de la dérivée seconde est appelée *dérivée troisième* de la fonction $f(x)$ (ou *dérivée du troisième ordre*); elle est notée $f'''(x)$.

On définit de même les dérivées du quatrième ordre $f^{\mathrm{IV}}(x)$, du cinquième ordre $f^{\mathrm{V}}(x)$, etc. (on utilise les indices numériques au lieu des accents pour simplifier l'écriture, et l'on emploie précisément les chiffres romains pour éviter la confusion avec l'exposant).

La dérivée du $n^{\text{ième}}$ ordre est notée $f^{(n)}(x)$.

Si la fonction est désignée par une seule lettre, par exemple y, ses dérivées successives sont notées:

$$y',\ y'',\ y''',\ y^{\mathrm{IV}},\ y^{\mathrm{V}},\ \ldots,\ y^{(n)}.$$

Exemple 1. Trouver les dérivées successives de la fonction $f(x)=x^4$.

Solution. $f'(x)=4x^3$, $f''(x)=(4x^3)'=12x^2$, $f'''(x)=24x$, $f^{\mathrm{IV}}(x)=24$, $f^{\mathrm{V}}(x)=0$.

Toutes les dérivées d'ordre supérieur sont également nulles.

Exemple 2. Si $y=\sin x$, nous avons alors

$$y'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\qquad y''=-\sin(x)=\sin(x+\pi),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right),\ \ldots,\ y^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

Les valeurs des dérivées pour une valeur donnée de l'argument ($x=$ $=a$) sont notées $f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$, etc. Dans l'exemple 1 nous avons: $f'(2)=32$, $f''(2)=48$, etc.

Exemple 3. Si $f(x) = \ln(1 + x)$, nous avons alors

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$
$$f^{\mathrm{IV}}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ \ldots, \ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Par conséquent, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2!$, $f^{\mathrm{IV}}(0) = -(3!)$, ..., $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$

§ 257. Signification mécanique de la dérivée seconde

Supposons que le point se déplace d'un mouvement rectiligne et, après avoir parcouru un chemin s en un temps t, acquiert une vitesse v. Supposons encore que cette vitesse varie et que pendant l'intervalle de temps $(t, t + \Delta t)$ elle reçoit un accroissement Δv. Le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ donne alors la variation de la vitesse (en moyenne) par unité de temps et est appelé *accélération moyenne*. Plus Δt est petit, et plus ce rapport caractérise bien la vitesse de variation de la vitesse à l'instant t. C'est pourquoi on appelle *accélération* (à l'instant t) la limite du rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$, c'est-à-dire la dérivée $\frac{dv}{dt}$. Or, la vitesse v est la dérivée $\frac{ds}{dt}$. C'est pourquoi l'accélération est la dérivée seconde du chemin parcouru par rapport au temps.

Exemple. La vibration entretenue d'une membrane est représentée par l'équation

$$s = a \sin \frac{2\pi t}{T}, \tag{1}$$

où T est la période de vibration, a son amplitude, s l'écart du point de la membrane à sa position d'équilibre.

La vitesse du mouvement est

$$v = s' = \frac{2\pi a}{T} \cos \frac{2\pi t}{T} \tag{2}$$

et l'accélération

$$v' = s'' = \frac{-4\pi^2 a}{T^2} \sin \frac{2\pi t}{T}. \tag{3}$$

Comparant (1) et (3), nous voyons que

$$s'' = -\frac{4\pi^2}{T^2}s, \tag{4}$$

autrement dit la force élastique de vibration (en vertu de la seconde loi de Newton elle est proportionnelle à l'accélération) est proportionnelle à l'écart et de direction opposée.

§ 258. Différentielles d'ordre supérieur

Considérons une suite de valeurs équidistantes de l'argument

$$x, \quad x + \Delta x, \quad x + 2\Delta x, \quad x + 3\Delta x, \ldots$$

et les valeurs correspondantes de la fonction

$$y = f(x), \quad y_1 = f(x + \Delta x), \quad y_2 = f(x + 2\Delta x),$$
$$y_3 = f(x + 3\Delta x), \ldots$$

Introduisons les notations

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x),$$
$$\Delta y_1 = f(x + 2\Delta x) - f(x + \Delta x),$$
$$\Delta y_2 = f(x + 3\Delta x) - f(x + 2\Delta x),$$

etc. Les grandeurs Δy, Δy_1, Δy_2, ... sont appelées les *différences premières* de $f(x)$. Les *différences secondes* sont les grandeurs $\Delta y_1 - \Delta y$, $\Delta y_2 - \Delta y_1$, etc. Elles sont notées $\Delta^2 y$, $\Delta^2 y_1$, etc.:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1.$$

On définit de même les différences troisièmes $\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$, etc.

EXEMPLE 1. Soit $f(x) = x^3$ et $x = 2$. Les différences premières sont:

$$\Delta y = (2 + \Delta x)^3 - 2^3 = 12\Delta x + 6\Delta x^2 + \Delta x^3,$$
$$\Delta y_1 = (2 + 2\Delta x)^3 - (2 + \Delta x)^3 = 12\Delta x + 18\Delta x^2 + 7\Delta x^3,$$
$$\Delta y_2 = (2 + 3\Delta x)^3 - (2 + 2\Delta x)^3 = 12\Delta x + 30\Delta x^2 + 19\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les différences secondes sont:

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = 12\Delta x^2 + 6\Delta x^3,$$
$$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = 12\Delta x^2 + 12\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Les différences troisièmes sont:

$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = 6\Delta x^3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Quand Δx est infiniment petit, la différence première est en règle générale du premier ordre par rapport à Δx, la différence seconde du second ordre, la différence troisième du troisième ordre, etc.

Nous avons appelé (§ 228) le premier terme proportionnel à Δx de la différence première ($12\Delta x$ dans l'exemple 1) différentielle de la fonction. Nous l'appelons maintenant sa *différentielle première*. La *différentielle seconde* est le premier terme proportionnel à Δx^2 de la différence seconde ($12\Delta x^2$ dans l'exemple 1), la *différentielle troisième* le premier terme proportionnel à Δx^3 de la différence troisième ($6\Delta x^3$ dans l'exemple 1), etc. Donnons maintenant une formulation exacte.

DÉFINITION. Supposons que la différence seconde $\Delta^2 y$ de la fonction $y = f(x)$ soit la somme de deux termes:

$$\Delta^2 y = B\Delta x^2 + \beta,$$

où B ne dépend pas de Δx et le terme β est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx^2. Le terme $B\Delta x^2$ est alors appelé *différentielle seconde* de la fonction y et noté d^2y ou $d^2f(x)$. On définit d'une manière analogue les différentielles d'ordre supérieur.

THÉORÈME 1. Le coefficient B de Δx^2 dans l'expression de la différentielle seconde est égal à la dérivée seconde $f''(x)$. Le coefficient C de Δx^3 dans l'expression de la différentielle troisième est égal à la dérivée troisième $f'''(x)$, etc.

EXEMPLE 2. Si $f(x) = x^3$, alors $f''(x) = 6x$. Conformément à cela nous avons $d^2(x^3) = 6x\Delta x^2$. Pour $x = 2$ nous avons: $d^2(x^3) = 12\Delta x^2$ (cf. exemple 1). Ensuite $f'''(x) = 6$ (pour toute valeur de x); conformément à cela $d^3(x^3) = 6\Delta x^3$.

Le théorème 1 peut également être énoncé ainsi:

THÉORÈME 1a. La différentielle d'ordre n est égale au produit de la dérivée $n^{\text{ième}}$ par la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'accroissement de la variable indépendante:

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,\Delta x^n. \tag{1}$$

Comme pour la variable indépendante nous avons:

$$\Delta x = dx,$$

nous obtenons

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)\,dx^n \text{ (*)}. \tag{2}$$

(*) Si x n'est pas une variable indépendante, la formule (1) n'est généralement vraie pour aucune valeur de n, même pour $n = 1$ (cf. § 234). Mais pour les différentielles d'ordre supérieur ($n = 2, 3, 4, \ldots$) la formule (2) n'est pas valable dans ce cas, tandis qu'elle l'est toujours pour $n = 1$. En d'autres termes, les expressions $f''(x)\ dx^2$, $f'''(x)\ dx^3$, ... *ne sont pas invariantes*.

Ainsi, si $f(x) = x^3$, l'expression $6x\ dx^2$ représente $d^2(x^3)$ quand x est une variable indépendante. Si l'on pose $x = t^2$ et que l'on prenne non pas x, mais t pour variable indépendante, alors $f(x) = t^6$, et nous obtenons $6x dx^2 = 24t^4 dt^2$, tandis que $d^2f(x) = 30t^4 dt^2$.

EXEMPLE 3. $d(x^4) = 4x^3dx$; $d^2(x^4) = 12x^2dx^2$; $d^3(x^4) = 24x\,dx^3$; $d^4(x^4) = 24dx^4$; $d^5(x^4) = 0$, $d^6(x^4) = d^7(x^4) = \ldots = 0$ (cf. § 256, exemple 1).

EXEMPLE 4. $d^n(\sin x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right) dx^n$ (cf. § 256, exemple 2).

THÉORÈME 2. Si l'on considère que la différentielle dx de l'argument x est une grandeur qui ne dépend pas de x, la différentielle seconde de la fonction $f(x)$ est égale à la différentielle de sa différentielle première:

$$d(df(x)) = d^2f(x). \tag{3}$$

Dans la même hypothèse la différentielle troisième est la différentielle de la différentielle seconde, etc.

EXEMPLE 5. Soit $f(x) = x^4$. Nous avons: $df(x) = 4x^3dx$. Si l'on considère que dx ne dépend pas de x, on doit le considérer constant lors du calcul de la différentielle. Cela signifie que $d(4x^3dx) = d(4x^3)\,dx = 12x^2dx^2$. Or, c'est la différentielle seconde de la fonction x^4 (exemple 3). Nous avons ensuite $d[d^2(x^4)] = d(12x^2dx^2) = d(12x^2)\,dx^2 = 24x\,dx^3$ et c'est la différentielle troisième de x^4, etc.

La différentielle seconde d'une fonction linéaire de la variable indépendante est nulle:

$$d^2(ax + b) = 0.$$

En particulier, la différentielle seconde de la variable indépendante est nulle: $d^2x = 0$.

La différentielle troisième d'une fonction du second degré est nulle:

$$d^3(ax^2 + bx + c) = 0.$$

En général, la différentielle d'ordre $(n + 1)$ d'un polynôme de degré n est nulle.

§ 259. Expression des dérivées d'ordre supérieur en fonction des différentielles

L'expression de la dérivée seconde en fonction des différentielles (*) est de la forme

$$y'' = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3}. \tag{1}$$

Elle est valable pour tout choix de l'argument.

Si l'on prend x pour argument (dans ce cas $d^2x = 0$), on a alors

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}. \tag{2}$$

(*) Nous avons: $y'' = \dfrac{dy'}{dx}$; nous portons ici $y' = \dfrac{dy}{dx}$; pour trouver la différentielle nous appliquons le théorème 2 du § 258.

Cette expression découle également de (2) § 258 (pour $n = 2$). De cette même formule nous tirons les relations

$$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \qquad y^{\mathrm{IV}} = \frac{d^4y}{dx^4}, \ \ldots, \ y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} \tag{3}$$

dans l'hypothèse que x est la variable indépendante. Leurs expressions générales sont compliquées (*).

REMARQUE. *On désigne* souvent la dérivée d'ordre n par $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, indépendamment du choix de l'argument. Toutefois, *on ne peut y porter* les expressions de x et y en fonction d'un paramètre quelconque.

§ 260. Dérivées d'ordre supérieur des fonctions définies paramétriquement

Soit y une fonction de x donnée par les équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = f(t). \tag{1}$$

Les dérivées du premier et du second ordre sont trouvées d'après les formules (**)

$$y' = \frac{f'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{2}$$

$$y'' = \frac{\varphi'(t)\,f''(t) - f'(t)\,\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{3}$$

Les expressions des dérivées suivantes sont compliquées (***); quand les fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ sont données, il est plus simple d'effectuer le calcul de proche en proche, comme dans l'exemple suivant.

EXEMPLE. Soit

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t.$$

(*) Nous avons: $y''' = \dfrac{dy''}{dx}$; nous portons ici l'expression (1). Il est préférable d'écrire le résultat sous la forme

$$y''' = \left[dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}\right] : dx^5. \tag{4}$$

Les expressions ultérieures sont plus compliquées.

(**) On établit la formule (3) comme la formule (1) du § 259; on peut aussi la déduire de cette dernière en remplaçant les différentielles par les dérivées correspondantes par rapport au paramètre.

(***) Cf. second renvoi § 259.

Nous avons alors (cf. § 252, exemple 2)

$$y' = d(b \sin t) : d(a \cos t) = -\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t.$$

De même

$$y'' = d\left(-\frac{b}{a} \operatorname{cotg} t\right) : d(a \cos t) = -\frac{b}{a^2 \sin^3 t},$$

$$y''' = d\left(-\frac{b}{a^2 \sin^3 t}\right) : d(a \cos t) = -\frac{3b \cos t}{a^3 \sin^5 t},$$

etc.

§ 261. Dérivées d'ordre supérieur des fonctions implicites

Pour trouver les dérivées successives de la fonction y de l'argument x définie implicitement par une équation quelconque, il faut dériver successivement cette équation, c'est-à-dire égaler les différentielles (ou les dérivées) de ses deux membres. Nous obtenons une suite d'égalités; de la première égalité nous trouvons l'expression de y' en fonction de x et y, la seconde (compte tenu de l'expression trouvée pour y') donne l'expression de y'' en fonction de x et y, la troisième (compte tenu des expressions trouvées de y' et y'') donne y''', etc. Dans les cas particuliers des simplifications sont possibles.

Exemple. Trouver les trois premières dérivées de la fonction $y = f(x)$ donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 = 25 \tag{1}$$

et déterminer les valeurs de ces dérivées au point (3, 4).

Solution. Egalant les différentielles nous obtenons:

$$x\,dx + y\,dy = 0, \tag{2}$$

d'où

$$x + yy' = 0. \tag{2a}$$

Egalant les différentielles des deux membres de (2a), nous trouvons

$$dx + y'dy + yy''dx = 0, \tag{3}$$

d'où

$$1 + y'^2 + yy'' = 0. \tag{3a}$$

Prenons encore une fois les différentielles

$$2y'dy' + y''dy + yy'''dx = 0, \tag{4}$$

d'où

$$3y'y'' + yy''' = 0. \tag{4a}$$

Nous trouvons de (2a):

$$y' = -\frac{x}{y}. \tag{5}$$

Nous trouvons de (3a): $y'' = -\frac{1+y'^2}{y}$; vu (5) nous obtenons:

$$y'' = -\frac{x^2+y^2}{y^3}. \tag{6}$$

De (4a) compte tenu de (5) et (6) nous trouvons:

$$y''' = \frac{-3x(x^2+y^2)}{y^5}. \tag{7}$$

Portant $x = 3$, $y = 4$ dans (5), (6) et (7) nous trouvons:

$$y' = -\frac{3}{4}, \qquad y'' = -\frac{25}{64}, \qquad y''' = -\frac{225}{1024}.$$

REMARQUE 1. Dans le cas considéré on peut simplifier les calculs. En vertu de l'égalité $x^2 + y^2 = 25$ la formule (6) se met sous la forme $y'' = -\frac{25}{y^3}$. Nous en tirons $y''' = -\frac{d}{dx}\left(\frac{25}{y^3}\right) = \frac{75}{y^4}y' = -\frac{75x}{y^5}$.

REMARQUE 2. Il n'est pas nécessaire d'établir (3a) à partir de (3), (4a) à partir de (4), etc. On peut calculer directement les dérivées. Toutefois, le calcul préalable des différentielles permet d'éviter certaines erreurs propres aux débutants (pour la dérivée de y'^2 ils écrivent souvent $2y'$ au lieu de $2y'y''$, etc.; cf. § 238, remarque).

§ 262. Formule de Leibniz

Pour écrire l'expression de la dérivée d'ordre n du produit uv (par rapport à n'importe quel argument) il faut développer $(u+v)^n$ suivant la formule du binôme de Newton et dans le développement obtenu remplacer toutes les puissances par les dérivées d'ordre correspondant, en convenant de remplacer les puissances nulles ($u^0 = v^0 = 1$) dans les termes extrêmes du développement par les fonctions elles-mêmes.

Nous obtenons:

$$(uv)' = u'v + uv', \tag{1}$$

$$(uv)'' = u''v + 2u'v' + uv'', \tag{2}$$

$$(uv)''' = u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv''', \tag{3}$$

....

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}. \tag{4}$$

Cette formule due à Leibniz peut être démontrée par récurrence.

EXEMPLE 1. Trouver la dérivée d'ordre dix de la fonction $e^x x^2$.

SOLUTION. Nous avons d'après la formule (4) (pour $u = e^x$, $v = x^2$, $n = 10$):

$$(e^x x^2)^{\mathrm{X}} = (e^x)^{\mathrm{X}}\, x^2 + 10(e^x)^{\mathrm{IX}}\,(x^2)' + 45(e^x)^{\mathrm{VIII}}\,(x^2)'' + \ldots$$

Il est inutile d'écrire les termes suivants, car les dérivées d'ordre trois et plus de x^2 sont nulles. Vu que toutes les dérivées de e^x sont égales à e^x, nous obtenons:

$$(e^x x^2)^{(X)} = e^x(x^2 + 20x + 90).$$

EXEMPLE 2. Trouver les valeurs de toutes les dérivées de $f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$ pour $x = 0$.

SOLUTION. Nous avons:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \tag{5}$$

de sorte que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1. \tag{6}$$

Le calcul direct des dérivées d'ordre supérieur est laborieux. Or, on peut représenter (5) sous la forme

$$f'(x)\,(1 + x^2) = 1$$

et utiliser la formule de Leibniz ($u = f'(x)$, $v = 1 + x^2$); on obtient alors:

$$f^{(n+1)}(x)\,(1 + x^2) + nf^{(n)}(x)\,2x + n(n-1)\,f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Posant $x = 0$ nous avons:

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)\,f^{(n-1)}(0) = 0. \tag{7}$$

Comme $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, les valeurs de toutes les dérivées d'ordre pair sont nulles:

$$f''(0) = f^{IV}(0) = f^{VI}(0) = \ldots = 0. \tag{8}$$

Comme $f'(0) = 1$, nous trouvons successivement de (7):

$$f'''(0) = -1 \cdot 2f'(0) = -(2!),$$
$$f^{V}(0) = -3 \cdot 4f'''(0) = +(4!),$$
$$f^{VII}(0) = -5 \cdot 6f^{V}(0) = -(6!),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(2k+1)}(0) = -(2k-1)\,2kf^{(2k-1)}(0) = (-1)^k\,(2k!).$$

§ 263. Théorème de Rolle (*)

THÉORÈME. Si la fonction $f(x)$ est dérivable dans l'intervalle fermé (a, b) et s'annule aux extrémités de cet intervalle, $f'(x)$ s'annule au moins une fois à l'intérieur de cet intervalle.

(*) Rolle estimait que le calcul différentiel est logiquement contradictoire et naturellement ne pouvait énoncer le théorème en question. Il lui appartient un théorème d'algèbre d'où il découle que si a et b sont les racines de l'équation $x^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \ldots + p_{n-1}x + p_n = 0$, alors il existe entre a et b une racine de l'équation

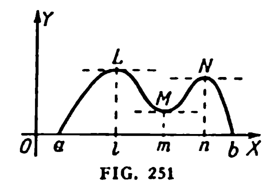


FIG. 251

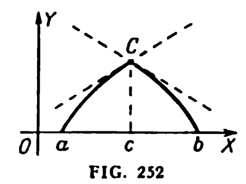


FIG. 252

Sur la fig. 251 il existe entre $x = a$ et $x = b$, points d'intersection de la courbe représentative de la fonction $f(x)$ et de l'axe OX, trois points L, M, N en lesquels la tangente est parallèle à l'axe OX (autrement dit $f'(x) = 0$).

Sur la fig. 252 il n'y a entre $x = a$ et $x = b$ aucun point en lequel la tangente est « horizontale ». La cause en est qu'au point C la courbe ne possède pas de tangente, autrement dit la fonction $f(x)$ n'est pas dérivable au point $x = c$ [il existe ici une dérivée à gauche et une dérivée à droite (§ 231)].

REMARQUE 1. Si la fonction dérivable $f(x)$ prend pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs égales, non obligatoirement nulles, la dérivée $f'(x)$ s'annule à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

REMARQUE 2. Le théorème de Rolle reste valable dans le cas où $f(x)$ est dérivable uniquement aux points intérieurs de l'intervalle (a, b), aux extrémités de cet intervalle la fonction $f(x)$ peut ne pas être dérivable, mais seulement continue.

On énonce habituellement le théorème de Rolle dans ces hypothèses les plus générales, ce qui en complique la formulation et l'assimilation. Dans ce qui suit (§§ 264, 266, 283) nous n'énonçons pas non plus plusieurs théorèmes dans les hypothèses les plus générales; ces dernières sont alors données sous forme de remarques.

§ 264. Théorème des accroissements finis (théorème de Lagrange)

THÉORÈME. Si la fonction $f(x)$ est dérivable dans l'intervalle fermé (a, b), le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est égal à la valeur de la dérivée $f'(x)$ en un certain point $x = \xi$ intérieur à l'intervalle (a, b):

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi). \tag{1}$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{KB}{AK}$ (fig. 253) est le coefficient angulaire de la corde AB et $f'(\xi)$ le coeffi-

---

$nx^{n-1} + (n-1)\,p_1x^{n-2} + \ldots + p_{n-1} = 0$. Cette proposition, cas particulier du « théorème de Rolle » (le premier membre de la seconde équation est la dérivée du premier membre de la première équation), est à l'origine de l'appellation du théorème.

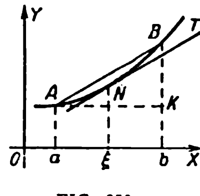


FIG. 253

FIG. 254

cient angulaire de la tangente NT. Le théorème des accroissements finis affirme que sur l'arc de courbe AB il existe au moins un point N en lequel la tangente est parallèle à la corde AB, à condition que la tangente existe *en chaque point* de l'arc de courbe AB.

On voit sur la fig. 254 que si cette condition n'est pas remplie, le théorème peut être faux. Il n'existe pas de tangente unique au point C (seules les demi-tangentes à gauche et à droite existent). La fonction $f(x)$ représentée par la courbe ACB n'est pas dérivable pour $x = c$, et le théorème s'avère faux: pour aucune valeur intermédiaire ξ la dérivée $f'(x)$ n'est égale au rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Interprétation mécanique. Soit $f(t)$ la distance du point à l'instant t de sa position initiale. Dans ce cas $f(b)-f(a)$ est le chemin parcouru entre l'instant $t = a$ et l'instant $t = b$ et le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ la vitesse moyenne dans cet intervalle de temps. Le théorème des accroissements finis affirme qu'à un instant intermédiaire la vitesse du point est égale à la vitesse moyenne, à condition qu'à chaque instant le point possède une vitesse.

Le théorème peut s'avérer faux si cette condition n'est pas vérifiée. Ainsi, si le point se déplace les premières soixante minutes à la vitesse de 20 m/h et la seconde heure à la vitesse de 30 m/h, la vitesse moyenne est égale à 25 m/h; or, le point ne s'est jamais déplacé à cette vitesse au cours des deux heures écoulées. Le théorème est violé: à la fin de la première heure, le point n'avait pas de vitesse définie (*).

Autre énoncé du théorème des accroissements finis. L'équation

$$f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

(si l'hypothèse du théorème est satisfaite) possède au moins une racine $x = \xi$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b).

(*) En réalité, le passage de la vitesse 20 m/h à la vitesse 30 m/h ne s'effectue pas instantanément, mais progressivement au cours d'un laps de temps très court, et dans ce cas il existe un instant où la vitesse est égale à 25 m/h.

La position de cette racine (ou des racines) dépend de la forme de la fonction $f(x)$. Si c'est une fonction du second degré (la courbe représentative est une parabole; fig. 255), nous obtenons une équation du premier degré; sa racine se trouve exactement au milieu de (a, b), autrement dit

$$\xi = \frac{b+a}{2}.$$

FIG. 255

Pour les autres fonctions cette propriété est réalisée approximativement; notamment, si a est constante et b tend vers a, l'une des racines tend généralement (*) vers le milieu de l'intervalle (a, b), c'est-à-dire $\lim \frac{\xi - a}{b - a} = \frac{1}{2}$ quand $b \to a$.

EXEMPLE 1. Soit $f(x) = x^2$. Nous avons alors $f'(\xi) = 2\xi$. La formule (1) prend la forme

$$\frac{b^2 - a^2}{b - a} = 2\xi,$$

d'où

$$\xi = \frac{a+b}{2},$$

autrement dit, ξ est exactement au milieu de l'intervalle (a, b).

EXEMPLE 2. Soit $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$. Posons $a = 10$, $b = 12$. Nous avons:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 364.$$

D'après le théorème des accroissements finis l'équation $3x^2 = 364$ doit avoir une racine comprise entre 10 et 12. En effet, sa racine positive $x = \sqrt{121\frac{1}{3}} \approx 11{,}015$ est intérieure à l'intervalle (10, 12) et est proche de son milieu.

REMARQUE. Le théorème des accroissements finis reste en vigueur dans le cas où la fonction $f(x)$ est dérivable aux points intérieurs de l'intervalle (a, b) et continue à ses extrémités.

§ 265. Formule des accroissements finis

La formule (1) du § 264 peut être mise sous la forme

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)\quad(b - a) \tag{1}$$

(*) La seule exception est le cas où la dérivée seconde $f''(a)$ est nulle ou n'existe pas.

ou avec d'autres notations

$$f(a + h) - f(a) = f'(\xi)\,h. \qquad (2)$$

C'est la *formule des accroissements finis*; on l'écrit également sous la forme:

$$f(a + h) = f(a) + f'(\xi)\,h. \qquad (3)$$

Application au calcul approché. Plus haut (§ 248) nous avons appliqué la formule

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a)\,h \qquad (4)$$

pour calculer $f(a + h)$. La formule *exacte* (3) permet (bien que ξ soit inconnue) d'estimer l'erreur résultant de la formule (4). Si on pose $\xi = \frac{a + b}{2}$ dans la formule (3), cette dernière cesse d'être exacte, mais donne généralement (cf. § 264) une bien meilleure approximation que (4).

Exemple. Trouver sans utiliser les tables lg 101.

Posant $f(x) = \lg x$, nous avons $f'(x) = \frac{M}{x}$ $(M = 0{,}43429)$. Pour $a = 100$ et $h = 1$ la formule (4) donne:

$$\lg 101 \approx \lg 100 + M \cdot \frac{1}{100} \cdot 1 = 2{,}0043429. \qquad (5)$$

Pour estimer l'erreur appliquons la formule exacte (3); nous obtenons:

$$\lg 101 = \lg 100 + M \cdot \frac{1}{\xi} \cdot 1. \qquad (6)$$

Ici ξ est compris entre 100 et 101, de sorte que $\frac{1}{\xi} > \frac{1}{101}$. L'erreur donnée par la formule (5) est égale à $M\left|\frac{1}{100} - \frac{1}{\xi}\right|$, et cette valeur est certainement inférieure à $M\left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right)$, c'est-à-dire à 0,00004. C'est la borne supérieure de l'erreur absolue sur lg 101 (l'erreur précise est deux fois plus petite).

En posant dans la formule (6) $\xi = \frac{1}{2}(100 + 101) = 100{,}5$ nous obtenons:

$$\lg 101 \approx \lg 100 + M \cdot 0{,}00995025 \cdot 1 = 2{,}0043213. \qquad (7)$$

Ici seul le dernier chiffre est faux; la valeur exacte est d'une unité plus grande (soit 4 au lieu de 3).

CONSÉQUENCES DE LA FORMULE (1). Il découle immédiatement de la définition de la dérivée que la dérivée d'une grandeur constante est nulle. Le théorème réciproque découle de la formule (1).

THÉORÈME 1. Si la dérivée $f'(x)$ est nulle partout dans l'intervalle (m, n), la fonction $f(x)$ est une grandeur constante dans cet intervalle [autrement dit, pour toutes les valeurs a, b *dans cet intervalle* (*) les valeurs de la fonction $f(x)$ sont identiques].

EXPLICATION. Par hypothèse la fonction $f(x)$ est dérivable dans l'intervalle (m, n) et *a fortiori* dans l'intervalle (a, b). Cela signifie que l'on peut (§ 264) lui appliquer la formule (1). Par hypothèse on doit poser dans cette dernière $f'(\xi) = 0$. Nous obtenons $f(b) = f(a)$.

Il découle directement du théorème 1 le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Si les dérivées de deux fonctions $f(x)$, $\varphi(x)$ sont partout égales dans l'intervalle (m, n), alors *dans cet intervalle* les valeurs de ces fonctions ne diffèrent que par une grandeur constante.

§ 266. Théorème généralisé des accroissements finis (théorème de Cauchy)

THÉORÈME DE CAUCHY. Supposons que les dérivées $f'(t)$ et $\varphi'(t)$ de deux fonctions $f(t)$ et $\varphi(t)$ dérivables dans l'intervalle fermé (a, b) ne s'annulent simultanément en aucun point intérieur de cet intervalle. Supposons encore qu'au moins l'une des fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ possède des valeurs différentes aux extrémités de l'intervalle [par exemple $\varphi(b) \neq \varphi(a)$]. Les accroissements $f(b) - f(a)$ et $\varphi(b) - \varphi(a)$ des fonctions données sont alors dans le même rapport que leurs dérivées en un certain point $t = \tau$ intérieur à l'intervalle (a, b):

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\tau)}{\varphi'(\tau)}. \qquad (1)$$

La formule (1) du § 264 est un cas particulier de la formule de Cauchy (1) pour $\varphi(t) = t$.

L'INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE est la même que celle du théorème § 264 mais la courbe ACB (fig. 256) est représentée par les équations paramétriques

$$x = \varphi(t), \qquad y = f(t).$$

Nous avons:

$$OA' = \varphi(a), \qquad OB' = \varphi(b);$$

$$AA' = f(a), \qquad BB' = f(b).$$

FIG. 256

(*) Par hypothèse la fonction $f(x)$ est définie *dans tout* l'intervalle (m, n) sinon elle n'aurait pas de dérivée en tous les points. Si, contrairement à l'hypothèse, la fonction $f(x)$ est déterminée en tous les points de l'intervalle (m, n), excepté, disons, deux points $x = k$ et $x = l$ $(k < l)$, il peut s'avérer que la fonction ne soit constante que dans chacun des intervalles (ouverts) (m, k), (k, l) et (l, n) *séparément*, mais change de valeur en passant de l'un à l'autre (cf. exemples 1 et 2 § 247a).

Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ est le coefficient angulaire de la corde AB, le rapport $\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente NT.

Sur la fig. 256 la tangente NT est parallèle à la corde AB, le point N est sur l'arc AB (mais sa projection N' sur l'axe OX n'est pas située sur le segment $A'B'$; il en est de même pour la projection sur l'axe OY).

REMARQUE 1. Si, contrairement à l'hypothèse du théorème, nous avions $f(a) = f(b)$ et $\varphi(a) = \varphi(b)$, le premier membre de (1) serait indéterminé.

REMARQUE 2. Dans l'hypothèse du théorème de Cauchy on demande que $f'(t)$ et $\varphi'(t)$ ne s'annulent pas simultanément *à l'intérieur* de l'intervalle (a, b), mais à l'une de ses extrémités (ou même aux deux) elles peuvent s'annuler simultanément (et même ne pas exister pourvu que $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient continues aux deux extrémités).

EXEMPLE 1. Considérons les fonctions

$$f(t) = t^3 \qquad \text{et} \qquad \varphi(t) = t^2$$

données dans l'intervalle $(0, 2)$. A l'extrémité $t = 0$ les dérivées

$$f'(t) = 3t^2 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(t) = 2t$$

s'annulent, mais elles sont partout différentes de zéro à l'intérieur de cet intervalle. Chacune des fonctions $f(t)$, $\varphi(t)$ a des valeurs différentes aux extrémités $t = 0$ et $t = 2$. Les hypothèses du théorème de Cauchy sont vérifiées. Par conséquent, le rapport

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{f(2)-f(0)}{\varphi(2)-\varphi(0)} = \frac{2^3}{2^2} = 2$$

doit être égal au rapport

$$\frac{f'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3t}{2}$$

en un certain point $t = \xi$ compris entre $a = 0$ et $b = 2$. En effet, l'équation

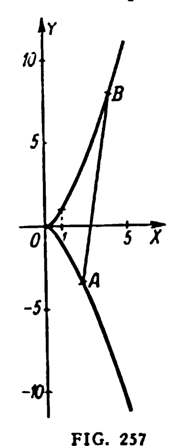


FIG. 257

$$\frac{3}{2}t = 2$$

possède la racine $t = \frac{4}{3}$ située à l'intérieur de l'intervalle $(0, 2)$.

EXEMPLE 2. Considérons les mêmes fonctions $f(t) = t^3$ et $\varphi(t) = t^2$ dans l'intervalle $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. Quand $a = -1\frac{1}{2}$, $b = 2$, nous avons:

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)} = \frac{b^3-a^3}{b^2-a^2} = \frac{b^2+ab+a^2}{b+a} = \frac{13}{2}.$$

L'équation

$$\frac{3}{2}t = \frac{13}{2}$$

possède la racine unique $t = 4\frac{1}{3}$, mais elle est extérieure à l'intervalle $\left(-1\frac{1}{2}, 2\right)$. Le théorème de Cauchy n'est plus applicable car le point $t = 0$ en lequel les deux dérivées $f'(t)$, $\varphi'(t)$ s'annulent simultanément est maintenant intérieur à l'intervalle (a, b). Illustration géométrique: les équations paramétriques $x = t^2$, $y = t^3$ représentent la parabole semi-cubique AOB (fig. 257); aux valeurs

$a = -1\frac{1}{2}$, $b = 2$ correspondent les points $A\left(2\frac{1}{4},\ -3\frac{3}{8}\right)$ et $B(4,\ 8)$. Sur l'arc AOB de la courbe $x = t^2$, $y = t^3$ (parabole semi-cubique) il n'y a pas de points en lesquels la tangente soit parallèle à la corde AB (un tel point existe à l'extérieur de l'arc AB au-dessus du point B).

INTERPRÉTATION MÉCANIQUE. Soient t le temps et

$$s_P = f(t)$$

et

$$s_Q = \varphi(t)$$

les chemins que deux corps P et Q animés d'un mouvement rectiligne ont parcourus à partir de leurs positions initiales. Alors $f'(t)$ et $\varphi'(t)$ sont les vitesses v_P et v_Q des corps P et Q. D'après l'hypothèse du théorème de Cauchy v_P et v_Q ne sont pas simultanément nulles. Le théorème affirme que les chemins parcourus par les corps durant l'intervalle de temps $(a,\ b)$ sont dans le même rapport que les vitesses à un instant intermédiaire (*) (le même pour les deux corps).

§ 267. Indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$

Si une fonction quelconque n'est pas déterminée au point $x = a$, mais possède une limite quand $x \to a$, trouver cette limite équivaut à *lever l'indétermination* ou chercher la vraie valeur. En particulier, lever l'indétermination de la forme $\frac{0}{0}$ c'est trouver la limite du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, où les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des infiniment petits quand $x \to a$.

RÈGLE DE L'HOSPITAL (**). Pour trouver la limite du rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ de deux fonctions, qui sont des infiniment petits quand $x \to a$ (ou quand $x \to \infty$), on peut considérer le rapport de leurs dérivées $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

(*) Donnons-en une explication concrète. Supposons que durant l'intervalle de temps $(a,\ b)$ le corps P ait parcouru un chemin deux fois plus grand que le corps Q($s_P = 2s_Q$). Si les deux mouvements sont uniformes, à tout instant intermédiaire nous avons: $v_P = 2v_Q$. Supposons maintenant que l'un des mouvements (ou les deux) ne soit pas uniforme. Il est impossible que l'on ait toujours $v_P > 2v_Q$ (car dans ce cas le chemin parcouru par le corps P serait plus que le double du chemin parcouru par le corps Q). Il est également impossible que l'on ait toujours $v_P < 2v_Q$. C'est pourquoi si d'abord $v_P > 2v_Q$, par la suite $v_P < 2v_Q$ (et vice versa). Cela signifie qu'à un certain instant intermédiaire on doit avoir $v_P = 2v_Q$. A cet instant on a: $v_P : v_Q = s_P : s_Q$, car par hypothèse on ne prend pas en considération le cas $v_P = v_Q = 0$ (dans ce cas le rapport $v_P : v_Q$ serait indéterminé).

(**) On trouve cette règle (sous une forme moins rigoureuse) dans l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), premier traité imprimé de calcul différentiel. Pour élaborer cet ouvrage L'Hospital utilisa un manuscrit de son maître Jean Bernoulli et, tout particulièrement, la règle en question. C'est pourquoi l'expression «règle de L'Hospital» est abusive.

S'il tend vers une limite (finie ou infinie), le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tend aussi vers cette limite [*].

EXEMPLE 1. Trouver $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$.

Les fonctions $f(x) = x^2 - 1$ et $\varphi(x) = x^3 - 1$ sont des infiniment petits quand $x \to 1$. Considérons le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{2x}{3x^2}$. Il tend vers la limite $\frac{2}{3}$ quand $x \to 1$. Conformément à la règle de L'Hospital le rapport $\frac{x^2-1}{x^3-1}$ tend vers cette même limite. En effet,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{x^2+x+1} = \frac{2}{3}.$$

Si non seulement les fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, mais aussi leurs dérivées $f'(x)$, $\varphi'(x)$ sont des infiniment petits quand $x \to a$, on applique de nouveau la règle de L'Hospital pour la recherche de la limite du rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

EXEMPLE 2. Trouver $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

Le numérateur et le dénominateur sont des infiniment petits. En vertu de la règle de L'Hospital on a

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}.$$

Le numérateur et le dénominateur sont encore des infiniment petits. Appliquons une fois de plus la règle de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{6x-2} = \frac{3}{2}.$$

---

[*] Quand on formule cette règle on exige en général que la dérivée $\varphi'(x)$ ne soit pas nulle dans un certain voisinage du point $x = a$. Cette exigence est superflue, car la règle stipule déjà que le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ possède une limite quand $x \to a$, et en vertu de la définition de la limite (§ 205) cela n'est possible que dans le cas où $\varphi'(x) \neq 0$ au voisinage de $x = a$.

EXEMPLE 3. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$.

Appliquant successivement la règle de L'Hospital, nous obtenons deux fois le rapport de deux infiniment petits

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}, \qquad \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}.$$

La troisième fois nous obtenons le rapport

$$\frac{f'''(x)}{\varphi'''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}.$$

Quand $x \to 0$, il possède la limite 2. Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2.$$

REMARQUE 1. Il est théoriquement possible que toutes les dérivées des deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ soient des infiniment petits. Toutefois, on ne rencontre pas de tels cas en pratique.

Il est utile de combiner l'application de la règle de L'Hospital avec des transformations facilitant la recherche de la limite.

EXEMPLE 4. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$.

D'après la règle de L'Hospital nous cherchons la limite du rapport

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{3 \sin^2 x \cos x} \quad \text{quand} \quad x \to 0.$$

Ici $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ sont des infiniment petits, mais il n'est pas rationnel de chercher $\lim \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$. Il est préférable de mettre $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ sous la forme $\dfrac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x \cdot \cos^3 x}$, puis, ayant en vue que $\lim\limits_{x\to 0} (\cos^3 x) = 1$, de chercher $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos^3 x}{3 \sin^2 x}$. En vertu de la règle de L'Hospital cette limite est

$$\lim_{x\to 0} \frac{3 \cos^2 x \cdot \sin x}{6 \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2}.$$

On peut aussi remplacer dès le début $\sin^3 x$ par l'infiniment petit équivalent x^3. Dans ce cas

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2 \cdot \cos^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^3 x}{3x^2}.$$

Appliquant une nouvelle fois la règle de L'Hospital nous trouvons:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\cos^2 x \cdot \sin x}{6x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}.$$

REMARQUE 2. Il peut arriver que le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ne tende, lorsque $x \to a$ (ou $x \to \infty$), vers aucune limite. Dans ce cas le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ peut ne pas avoir de limite, mais peut également en avoir une. Ainsi, si $f(x) = x + \sin x$ et $\varphi(x) = x$, le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = 1 + \cos x$ n'a pas de limite lorsque $x \to \infty$. Toutefois, le rapport

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{x + \sin x}{x} = 1 + \frac{\sin x}{x}$$

tend vers 1 quand $x \to \infty$.

§ 268. Indéterminations de la forme $\frac{\infty}{\infty}$

La règle de L'Hospital est également valable pour le rapport $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ de deux fonctions infiniment grandes quand $x \to a$ (ou $x \to \infty$).

EXEMPLE 1. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

Les fonctions $f(x) = \ln x$ et $\varphi(x) = x^2$ sont des infiniment grands quand $x \to \infty$. Le rapport $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{2x}$ tend vers la limite 0 quand $x \to \infty$. Le rapport $\frac{\ln x}{x^2}$ tend également vers cette limite.

REMARQUE. Si $f(x)$ et $\varphi(x)$ ont des limites infinies quand $x \to a$ et les limites de $f'(x)$ et $\varphi'(x)$ (si elles existent) sont également infinies, la règle de L'Hospital n'est alors utile que dans le cas où l'expression $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ peut être plus facilement mise sous une forme commode que l'expression $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$.

EXEMPLE 2. Trouver $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

Les fonctions $\operatorname{tg} 3x$ et $\operatorname{tg} x$, ainsi que leurs dérivées $\frac{3}{\cos^2 3x}$ et $\frac{1}{\cos^2 x}$ sont des infiniment grands quand $x \to \frac{\pi}{2}$. Représentant le rapport des dérivées sous la forme $3\left(\frac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2$, nous cherchons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x}$ (maintenant le numérateur et le dénominateur sont des infiniment petits). Appliquant la règle du § 267, nous obtenons $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos 3x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-3\sin 3x} = -\frac{1}{3}$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}.$$

Il est toutefois plus facile de transformer l'expression initiale. Nous avons en effet $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} 3x}$, de sorte que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{cotg} x}{\operatorname{cotg} 3x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 3x}{3\sin^2 x} = \frac{1}{3}.$$

§ 269. Expressions indéterminées d'autres formes

I. Indétermination de la forme $0\cdot\infty$, autrement dit, le produit $f(x)\,\varphi(x)$, où $f(x) \to 0$ et $\varphi(x) \to \infty$. Cette expression peut être ramenée à la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$:

$$f(x)\,\varphi(x) = f(x) : \frac{1}{\varphi(x)} = \varphi(x) : \frac{1}{f(x)}$$

et on peut ensuite appliquer la règle de L'Hospital.

Exemple 1. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{cotg}\frac{x}{2}$.

Nous transformons $x\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = x : \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ et nous trouvons:

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{cotg}\frac{x}{2} = \lim_{x\to 0}\left[1 : \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\right] = 2.$$

Exemple 2. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} x^4 \ln x$.

Nous avons

$$\lim_{x\to 0} x^4 \ln x = \lim_{x\to 0}\left[\ln x : \frac{1}{x^4}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} : \frac{-4}{x^5}\right] = 0.$$

II. Indétermination de la forme $\infty - \infty$, c'est-à-dire la différence de deux fonctions dont chacune possède la limite $+\infty$ (ou $-\infty$). Cette expression peut également être ramenée à la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple 3. Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right]$.

Réduisons les fractions à un dénominateur commun; la grandeur cherchée est $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x(e^x+1)}$, autrement dit, nous avons une indétermination de la forme $\frac{0}{0}$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+1) = 2$,

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x+1)}\right] = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{1} = \frac{1}{2}.$$

III. Indéterminations de la forme 0^0, ∞^0, 1^∞, c'est-à-dire les fonctions de la forme $f(x)^{\varphi(x)}$, où $\lim f(x) = 0$ et $\lim \varphi(x) = 0$, ou $\lim f(x) = \infty$, $\lim \varphi(x) = 0$, ou encore $\lim f(x) = 1$, $\lim \varphi(x) = \infty$.

Nous cherchons ici d'abord la limite du logarithme de la fonction donnée. Nous obtenons dans les trois cas une indétermination de la forme $0 \cdot \infty$.

Exemple 4. Trouver $\lim\limits_{x\to 0} x^x$ (indétermination de la forme 0^0).

Posant $y = x^x$, nous obtenons $\ln y = x \ln x$. Nous avons ensuite

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\left(\ln x : \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} : -\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

Nous en tirons

$$\lim_{x\to 0} y = 1.$$

Exemple 5. Trouver $\lim\limits_{x\to\infty}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$ (indétermination de la forme ∞^0).

Nous posons $y = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$; nous avons alors $\ln y = \frac{1}{x}\ln(1+2x)$, ce qui donne

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+2x} = 0.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to\infty} y = 1$.

EXEMPLE 6. Trouver $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\text{tg } x)^{\text{tg } 2x}$ (indétermination de la forme 1^∞).

Nous avons:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \ln y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \text{tg } 2x \ln \text{tg } x = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \text{tg } x}{\text{cotg } 2x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin x \cos x} : -\frac{2}{\sin^2 2x}\right) = -1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\text{tg } x)^{\text{tg } 2x} = e^{-1}.$$

§ 270. Historique de la formule de Taylor (*)

1. LES SÉRIES DANS L'OEUVRE DE NEWTON. Pour trouver la dérivée d'une fonction donnée et principalement pour résoudre le problème inverse, Newton remplaçait la fonction donnée par *une série entière*, c'est-à-dire par la suite

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

à une infinité de termes. Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$, étaient choisis de telle sorte que l'expression (1) donne des valeurs de plus en plus précises de la fonction au fur et à mesure de la croissance du nombre des termes. Ainsi, Newton remplaçait la fonction $\frac{1}{1+x}$ par l'expression $1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$ et écrivait (**):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots \tag{2}$$

(*) Le présent paragraphe sert d'introduction aux paragraphes 271 et 272; ce dernier peut être lu indépendamment.

(**) On obtient le développement (2) en appliquant au quotient $1 : (1 + x)$ la règle de division des polynômes ordonnés suivant des puissances croissantes. Avant Newton, la formule (2) avait été employée par Mercator (en 1665) pour le calcul des logarithmes $\left[\text{la dérivée de } \ln(1 + x) \text{ est égale à } \frac{1}{1+x}\right]$. Chez Mercator le développement en série infinie se bornait à ce cas unique. Pour Newton c'était une méthode générale.

Si $|x| < 1$, les termes $1, -x, x^2, \dots$ forment une progression géométrique décroissante dont la somme est $\frac{1}{1+x}$. Si par contre $|x| > 1$, la somme $1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$ ne tend pas, quand $n \to \infty$, vers $\frac{1}{1+x}$. Tenant compte de cette circonstance Newton se bornait toujours à de petites valeurs de x.

Pour développer les fonctions en séries infinies Newton utilisait divers artifices. Ainsi il appliquait la formule

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots \qquad (3)$$

établie par Pascal pour les valeurs entières positives de m aux valeurs fractionnaires et négatives de m. Dans ce cas le nombre de termes croît indéfiniment. Quand $m = -1$, on obtient la formule (2), quand $m = -2$, on obtient (*):

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \qquad (4)$$

Pour trouver la dérivée de $\frac{1}{1+x}$, Newton dérivait terme à terme (**) l'expression (2). La comparaison avec (4) montre que

$$\left[\frac{1}{1+x}\right]' = -\frac{1}{(1+x)^2}. \qquad (5)$$

2. Série de Taylor. En 1715 Taylor trouva par des raisonnements très compliqués mais non rigoureux la forme générale de l'expression (1) pour une fonction donnée $f(x)$. Avec les notations modernes ce résultat s'écrit

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots \qquad (6)$$

Ainsi, si $f(x) = \frac{1}{1+x}$, alors $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$. Par conséquent, $f(0) = 1$ et $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^n$, de sorte que la formule (6) donne

---

(*) Sachant que ses raisonnements n'étaient pas rigoureux Newton les vérifiait sur des exemples. Ainsi en effectuant la multiplication terme à terme $(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)(1 - x + x^2 - x^3 + \dots)$ il trouvait $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots$ et ainsi vérifiait la formule (4).

(**) Newton ne savait pas que le théorème sur la dérivée d'une somme peut ne pas être vrai pour un nombre indéfiniment croissant de termes. Par ailleurs, pour des séries de la forme (1) ce théorème (pour de petites valeurs de x) est vrai, de sorte qu'il n'y avait pas d'erreur.

le développement (2). Si $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, nous obtenons le développement (4).

3. Démonstration de Mac-Laurin. Trente ans plus tard Mac-Laurin donna une démonstration simple de la formule de Taylor. Il considère l'égalité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \tag{7}$$

et pour déterminer les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ il trouve en dérivant successivement:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3a_3 x + 3\cdot 4a_4 x^2 + \dots, \\ f'''(x) &= 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4 x + \dots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Portant dans (7) et (8) $x = 0$, il trouve successivement [*]:

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{1\cdot 2}, \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}, \quad \text{etc.} \tag{9}$$

4. Forme générale de la série de Taylor. On établit de la même façon la formule

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}\cdot(x-a)^2 + \dots \tag{10}$$

donnant le développement de la fonction suivant les puissances de $(x-a)$. Cette formule était également connue de Taylor; en fait elle n'apporte rien de nouveau par rapport à (6).

Ainsi pour $f(x) = \ln x$ et $a = 1$ la formule (10) donne:

$$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots \tag{11}$$

Si l'on prend la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, on obtient en vertu de la formule (6):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \tag{12}$$

---

[*] Si l'on démontre que l'on est en droit de dériver terme à terme la série (7), la démonstration de Mac-Laurin établit le théorème suivant: si $f(x)$ peut être développée en série (7), les coefficients $a_0, a_1, a_2, \dots$ s'expriment par les formules (9). Il existe toutefois des fonctions qui ne peuvent être développées en série de la forme (7) [bien que leurs dérivées $f'(0), f''(0), \dots$ existent]. On donne un exemple de fonction de ce genre dans le dernier renvoi de ce paragraphe.

Posant $1 + x = z$, nous obtenons la formule

$$\ln z = \frac{z-1}{1} - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \frac{(z-1)^4}{4} + \ldots \tag{13}$$

qui ne diffère de (11) que par les notations.

5. Reste de la série de Taylor. Les fonctions qui étaient connues au XVIII[e] siècle peuvent être développées en série de Taylor (10) (pour toutes les valeurs de a, à l'exception de celles pour lesquelles la fonction ou l'une de ses dérivées devient infinie). Leur expérience médiocre suggérait aux mathématiciens de l'époque que toute fonction continue peut être développée en série de Taylor. Toutefois le besoin se faisait sentir d'une estimation exacte de l'erreur que l'on commet quand on arrête la formule (10) au terme $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

En 1799 Lagrange introduisit pour « le reste de la série de Taylor », c'est-à-dire pour la différence R_n

$$R_n = f(x) - \left[f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right], \tag{14}$$

l'expression suivante:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{(n+1)}. \tag{15}$$

Ici ξ est un nombre compris entre a et x.

La démonstration de Lagrange supposait que la fonction $f(x)$ est développable en série de Taylor (*). Un quart de siècle plus tard Cauchy démontra la formule (15) sans s'appuyer sur cette hypothèse; il donna également une autre expression pour le reste. Il devint possible de juger d'après l'expression du reste si une fonction peut être développée en série de Taylor: si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, la fonction $f(x)$ est développable en série de Taylor, dans le cas contraire elle n'est pas développable. Cauchy donna le premier exemple d'une fonction (**) dont toutes les dérivées existent au point $x = a$, mais qui n'est pas développable en série (10) suivant les puissances de $(x - a)$ (de telles fonctions n'ont pas d'importance pratique).

(*) Lagrange affirmait même qu'un tel développement était possible pour toute fonction continue, mais la démonstration n'était pas rigoureuse.

(**) Cette fonction est donnée par la formule $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, avec la condition complémentaire $f(0) = 0$ (quand $x = 0$, la formule n'a plus de sens). La fonction $f(x)$ possède au point $x = 0$ des dérivées d'ordre arbitraire. Elles sont toutes nulles en ce point, de sorte que le second membre de la formule (10) est identiquement nul. Cependant la fonction $f(x)$ ne s'annule en aucun point autre que $x = 0$.

§ 271. Formule de Taylor [*]

THÉORÈME. Si la fonction $f(x)$ possède dans l'intervalle fermé (a, b) des dérivées jusqu'à l'ordre $(n + 1)$ inclus [**], alors

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \tag{1}$$

où ξ est un nombre compris entre a et b.

La formule (1) est appelée *formule de Taylor.*

Le dernier terme, $\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$, appelé *reste sous forme de Lagrange* [***], donne l'expression exacte de la différence R_n entre $f(b)$ et l'expression

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n$$

(« polynôme de Taylor »):

$$R_n = f(b) - \left[f(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n\right] = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}. \tag{2}$$

La formule de Taylor établit que l'équation (1), où l'inconnue est ξ, possède au moins une racine [****] comprise entre a et b (cf. § 264).

Quand on considère a comme une constante et b comme une variable, on écrit x au lieu de b:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \\ + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3}$$

Quand $a = 0$, on obtient la « *formule de Mac-Laurin* » [*****]

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{4}$$

---

[*] On recommande de lire au préalable le § 270.

[**] La $(n+1)^{\text{ième}}$ dérivée peut ne pas exister aux extrémités de l'intervalle pourvu que la $n^{\text{ième}}$ dérivée soit continue non seulement à l'intérieur de l'intervalle, mais aussi à ses extrémités.

[***] A la différence des autres formes du reste.

[****] Pour des valeurs constantes de a et b la grandeur ξ varie généralement, avec n.

[*****] Cf. § 270, 3.

Exemple. Appliquons la formule (4), pour $n = 2$, à la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Nous avons:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \qquad f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}.$$

Par conséquent,

$$f(0) = 1, \qquad \frac{f'(0)}{1!} = -1, \qquad \frac{f''(0)}{2!} = +1, \qquad \frac{f'''(\xi)}{3!} = -\frac{1}{(1+\xi)^4}.$$

La formule (4) s'écrit alors

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \frac{x^3}{(1+\xi)^4}. \tag{5}$$

Ici ξ est compris entre 0 et x. Il est important de noter que la formule n'est valable que pour $x > -1$. Dans ce cas l'hypothèse du théorème est vérifiée: dans l'intervalle fermé $(0, x)$ toutes les dérivées de la fonction $\frac{1}{1+x}$ existent.

Résolvant (5) par rapport à ξ nous trouvons:

$$\xi_1 = \sqrt[4]{1+x} - 1, \qquad \xi_2 = -\sqrt[4]{1+x} - 1. \tag{6}$$

On vérifie aisément que pour $x > -1$ la première racine ξ_1 est effectivement comprise entre zéro et x.

Si par contre $x \leqslant -1$, l'hypothèse du théorème n'est pas vérifiée, car la fonction $\frac{1}{1+x}$ ne possède pas de dérivées au point -1, et ce point est soit intérieur à l'intervalle $(0, x)$ (si $x < -1$), soit confondu avec son extrémité (si $x = -1$).

La formule (5) tombe en défaut: pour $x = -1$, le premier membre n'a plus de sens, pour $x < -1$ l'équation (5) possède des racines imaginaires.

Remarque. Pour $n = 0$, la formule de Taylor (2) [dans laquelle on doit écrire $f(a)$ au lieu de $f^{(0)}(a)$] coïncide avec la formule des accroissements finis (§ 265)

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \tag{7}$$

Pour $n = 1$ nous obtenons:

$$f(b) - f(a) - f'(a)(b - a) = \frac{f''(\xi)}{2!}(b - a)^2, \tag{8}$$

ou avec d'autres notations:

$$[f(x + \Delta x) - f(x)] - f'(x)\,\Delta x = \frac{f''(\xi)}{2!}\,\Delta x^2. \qquad (8a)$$

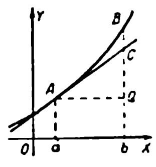


FIG. 258

Cette formule donne l'expression de la différence entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle (le segment CB sur la fig. 258).

Si la dérivée seconde $f''(x)$ est continue pour la valeur considérée de x, alors la différence entre l'accroissement de la fonction et sa différentielle est du deuxième ordre par rapport à Δx [quand $f''(x) \neq 0$] ou d'ordre supérieur [quand $f''(x) = 0$]. Cf. § 230.

§ 272. Application de la formule de Taylor au calcul des valeurs d'une fonction

La formule de Taylor permet souvent de calculer la valeur d'une fonction avec une précision arbitraire.

Supposons que l'on connaisse les valeurs

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ \ldots$$

de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées successives en un point « initial » $x = a$. On demande de trouver la valeur de la fonction $f(x)$ pour une autre valeur de x.

Dans de nombreux cas il suffit pour cela de calculer la valeur du polynôme de Taylor

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \qquad (1)$$

en prenant deux, trois ou un plus grand nombre de termes suivant la précision exigée. Bien entendu nous commettons dans ce cas une erreur R_n égale à

$$R_n = f(x) - \left[f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\right]. \qquad (2)$$

Or, il s'avère souvent que l'erreur R_n décroît indéfiniment (en valeur absolue) avec la croissance du nombre de termes (autrement dit, $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$). Le polynôme de Taylor peut alors donner la valeur cherchée de la fonction $f(x)$ avec le degré de précision voulu.

Le nombre de termes assurant le degré de précision exigé dépend essentiellement de la valeur de la distance $|x - a|$ du point initial a au point x. Plus $|x - a|$ est grand, et plus on doit prendre de termes (cf. exemple 1). Il arrive également que la tendance de R_n vers zéro non seulement devient plus lente avec la croissance de $|x - a|$, mais encore, à partir d'un certain instant, cesse entièrement (cf. exemple 2).

Le polynôme (1) ne permet alors de calculer $f(x)$ qu'à une distance bornée du point initial.

Cela signifie que l'on doit savoir répondre aux questions suivantes: peut-on se servir du polynôme (1) pour calculer $f(x)$ à une distance donnée $|x-a|$ du point initial a, et si oui, combien de termes doit-on prendre pour assurer la précision exigée? Il est également important de savoir si l'erreur R_n tend vers zéro avec la croissance du nombre de termes pour toute distance $|x-a|$, et sinon quelle en est la frontière.

Pour résoudre ces questions divers artifices sont employés. L'un d'eux [*] est basé sur le théorème du § 271 permettant de mettre l'erreur R_n sous la forme [**]:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{3}$$

Le nombre ξ est ici inconnu; nous savons seulement que ξ est compris entre a et x. Cela est toutefois suffisant pour estimer l'erreur R_n et répondre aux questions que nous avons posées.

Exemple 1. Soit $f(x) = e^x$. Toutes les dérivées de cette fonction sont égales à e^x. Nous connaissons la valeur de e^x au point $x = 0$ ($e^0 = 1$). Nous prenons ce point pour point initial. Les hypothèses du théorème du § 271 sont vérifiées pour toutes les valeurs de x. On doit poser dans le polynôme de Taylor (1):

$$a = 0, \quad f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 1, \tag{4}$$

et il prend alors la forme:

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n. \tag{5}$$

En remplaçant la valeur de e^x par la valeur du polynôme (5), nous commettons une certaine erreur R_n; elle est égale à

$$R_n = e^x - \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right]. \tag{6}$$

Comme $f^{(n+1)}(x) = e^x$, l'erreur R_n peut, en vertu de la formule (3), s'écrire sous la forme:

$$R_n = \frac{\xi}{(n+1)!}x^{n+1}. \tag{7}$$

Le nombre ξ est compris entre zéro et x (il dépend de x et de n). Par conséquent, e^ξ est compris entre $e^0 = 1$ et e^x. Cela est suffisant pour estimer l'erreur.

---

[*] Loin d'être le meilleur, cet artifice s'avère parfois parfaitement inefficace. D'autres artifices sont indiqués plus bas (§ 401).

[**] On suppose que la fonction $f(x)$ satisfait aux hypothèses du théorème du § 271; il en est ainsi dans de nombreux cas qui se présentent en pratique.

Supposons, par exemple, que l'on doive calculer la valeur de e^x pour $x = \frac{1}{2}$, autrement dit, extraire la racine carrée du nombre e.

Comme le nombre e est compris entre 2 et 3, le nombre $e^{\frac{1}{2}}$ et *a fortiori* e^{ξ} sont plus petits que 2. Il découle de (7) que $|R_n| < \frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, autrement dit,

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)!\,2^n}. \tag{8}$$

Avec la croissance de n la quantité $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ (la borne supérieure de l'erreur absolue) et *a fortiori* l'erreur R_n tendent vers zéro. Cela signifie que le polynôme (5), qui prend maintenant la valeur

$$1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{2}{2!\,2^2} + \frac{1}{3!\,2^3} + \ldots + \frac{1}{n!\,2^n}, \tag{9}$$

peut servir pour le calcul de $\sqrt{e}$ avec une précision arbitraire.

Déterminons maintenant combien de termes doit comporter la somme (9) pour assurer une précision disons à la quatrième décimale près (c'est-à-dire à $\pm 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ près). Evaluons pour cela la borne supérieure de l'erreur absolue $\frac{1}{(n+1)!\,2^n}$ pour $n = 1, 2, 3$, etc. (*):

$$\frac{1}{2!\,2} = \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{3!\,2^2} = \frac{1}{2!\,2} : 6 = \frac{1}{24},$$

$$\frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{3!\,2^2} : 8 = \frac{1}{192},$$

$$\frac{1}{5!\,2^4} = \frac{1}{4!\,2^3} : 10 = \frac{1}{1\,920},$$

$$\frac{1}{6!\,2^5} = \frac{1}{5!\,2^4} : 12 = \frac{1}{23\,040}.$$

On peut s'arrêter car $\frac{1}{23\,040} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

(*) A partir de la seconde ligne des calculs qui suivent nous utilisons la division successive par les nombres pairs 6, 8, 10,... en nous basant sur l'identité

$$\frac{1}{(n+1)!\,2^n} = \frac{1}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n!\,2^{n-1}}.$$

Ainsi, pour assurer une précision de $0,5 \cdot 10^{-4}$ il suffit que la somme (9) comporte six termes. Nous trouvons (*)

$$
\begin{aligned}
&1 && = 1,00000,\\
&\frac{1}{1!\,2} && = 0,50000,\\
&\frac{1}{2!\,2^2} = \frac{1}{1!\,2} : 4 && = 0,12500,\\
&\frac{1}{3!\,2^3} = \frac{1}{2!\,2^2} : 6 && = 0,02083,\\
&\frac{1}{4!\,2^4} = \frac{1}{3!\,2^3} : 8 && = 0,00260,\\
&\frac{1}{5!\,2^5} = \frac{1}{4!\,2^4} : 10 && = 0,00026\\
& && \overline{\ 1,64869}
\end{aligned}
$$

Nous obtenons en définitive

$$\sqrt{e} = 1,6487.$$

Nous trouverons de même que pour assurer une précision de $\pm\, 0,5 \cdot 10^{-8}$ la somme (9) doit comporter 10 termes, car

$$|R_9| < \frac{1}{10!\,2^9} \approx 0,55 \cdot 10^{-9} < 0,5 \cdot 10^{-8}.$$

Le calcul donne alors:

$$\sqrt{e} = 1 + \frac{1}{1!\,2} + \frac{1}{2!\,2^2} + \ldots + \frac{1}{9!\,2^9} = 1,64872127.$$

En prenant 15 termes on peut calculer $e^{\frac{1}{2}}$ à $0,5 \cdot 10^{-16}$ près, etc. La précision du résultat croît rapidement avec le nombre de termes.

La précision croît plus lentement si l'on calcule e^x pour les valeurs de $|x|$ plus grandes, par exemple pour $x = 1$ ou $x = -1$.

Posons $x = 1$. Le polynôme (5), qui prend alors la forme

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \tag{10}$$

donne une valeur approchée du nombre e. L'erreur R_n est alors, en vertu de (7),

$$R_n = \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}. \tag{11}$$

(*) Nous calculons chaque terme à la cinquième décimale près pour éviter l'accumulation des erreurs.

Le nombre e^{ξ} est maintenant compris entre e^0 et e^1, c'est-à-dire entre 1 et e, et comme $e < 3$, nous avons

$$|R_n| < \frac{3}{(n+1)!}. \tag{12}$$

L'erreur tend comme précédemment vers zéro avec la croissance de n. Mais maintenant pour assurer une précision de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ il faut prendre neuf termes (au lieu de six), car la borne supérieure de l'erreur absolue $\dfrac{3}{(n+1)!}$ ne devient inférieure à $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ que pour $n = 8$. Le calcul donne:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{8!} = 2{,}7183.$$

Si nous devons assurer une précision de $0{,}5 \cdot 10^{-8}$, nous devons prendre 13 termes (au lieu de 10); le calcul donne:

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{12!} = 2{,}718281 83.$$

En prenant 15 termes nous ne pouvons calculer e qu'à $0{,}5 \cdot 10^{-10}$ près (et non à $0{,}5 \cdot 10^{-16}$ près comme pour le calcul de $\sqrt{e}$).

Posons maintenant $x = -1$. Le polynôme (5) qui s'écrit alors

$$1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

donne la valeur approchée du nombre e^{-1} $\left(\text{c'est-à-dire } \dfrac{1}{e}\right)$. En vertu de (7), l'erreur R_n est alors égale à

$$R_n = (-1)^{n+1} \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}.$$

Le nombre ξ est compris entre -1 et 0; par conséquent, $e^{\xi} < e^0$, c'est-à-dire $e^{\xi} < 1$. Nous avons ainsi

$$|R_n| < \frac{1}{(n+1)!}.$$

La borne supérieure de l'erreur absolue est ici trois fois moindre que dans le cas précédent. Cela fait que le nombre de termes que l'on doit prendre pour assurer la précision voulue peut être diminué, mais pas plus que d'une unité. Ainsi, pour assurer une précision de $0{,}5 \cdot 10^{-10}$, il faut maintenant prendre non pas 15, mais 14 termes, ce qui ne modifie guère les calculs.

Si au lieu de $x = \pm 1$, nous prenons des valeurs de x encore plus grandes en valeur absolue, l'erreur résultant de l'égalité approchée

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \tag{13}$$

tendra vers zéro encore plus lentement. Toutefois en utilisant la formule (7) et en raisonnant comme plus haut, nous voyons que l'erreur R_n tendra vers zéro pour *n'importe quelle* valeur de x.

On a représenté sur la fig. 259 la courbe représentative ACB de la fonction $y = e^x$ et les courbes de ses polynômes de Taylor

$$y = 1, \quad y = 1 + x, \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

EXEMPLE 2. Soit

$$f(x) = \ln (1 + x).$$

Nous prenons comme dans l'exemple 1 le point $x = 0$ pour point initial. Les hypothèses du théorème du § 271 ne sont satisfaites que

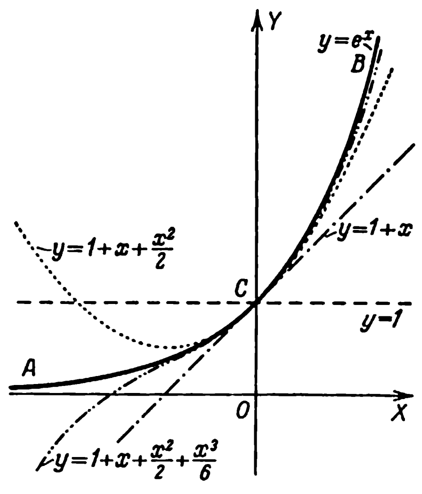


FIG. 259

pour $x > -1$ [pour $x < -1$ la fonction $\ln(1+x)$ n'a pas de sens]. Les dérivées successives s'expriment de la manière suivante:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},$$

$$f^{(IV)}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

de sorte que (§ 256, exemple 3) nous avons:

$$f(0) = 0, \quad \frac{f'(0)}{1!} = 1, \quad \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2},$$

$$\frac{f'''(0)}{3!} = \frac{1}{3}, \ldots, \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Le polynôme de Taylor (1) donne l'égalité approchée

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n. \tag{14}$$

Comme $f^{(n+1)}[\ln(1+x)] = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$, l'erreur R_n résultant de l'égalité (14) peut, en vertu de la formule (3), s'écrire sous la forme

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}, \tag{15}$$

où ξ est compris entre zéro et x.

Calculons, par exemple, la valeur de $\ln(1+x)$ pour $x = -0{,}1$. Nous obtenons l'égalité approchée

$$\ln 0{,}9 \approx -0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}1^2 - \frac{1}{3}\cdot 0{,}1^3 - \ldots - \frac{1}{n}0{,}1^n. \tag{16}$$

L'erreur est

$$R_n = -\frac{1}{n+1}\left(\frac{0{,}1}{1+\xi}\right)^{n+1}.$$

Comme ξ est compris entre zéro et $-0{,}1$, alors $1+\xi > 0{,}9$. Par conséquent, $|R_n| < \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{0{,}1}{0{,}9}\right)^{n+1}$, c'est-à-dire

$$|R_n| < \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}. \tag{17}$$

La borne supérieure de l'erreur absolue tend évidemment vers zéro avec la croissance de n, autrement dit, la formule (16) permet d'évaluer $\ln 0{,}9$ avec la précision voulue. Ainsi, pour assurer une précision de $0{,}5\cdot 10^{-4}$, il faut prendre $n = 4$, et nous obtenons:

$$\ln 0{,}9 \approx -\left[0{,}1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}01 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}001 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}0001\right] \approx -0{,}1054.$$

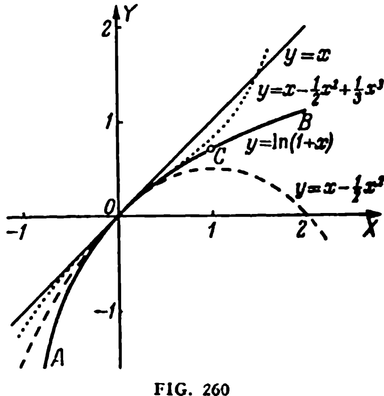


FIG. 260

Nous pouvons vérifier de même que la formule (14) est valable chaque fois que $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$(*). Toutefois avec la croissance de $|x|$ la tendance de l'erreur R_n vers zéro est ralentie. Cette tendance est la plus faible pour $x = 1$. Dans ce cas la formule (14) donne:

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

Pour assurer, par exemple, une précision de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, il faut prendre 19 999 termes.

Il suffit que x soit un peu supérieur à l'unité pour que l'erreur ne tende pas vers zéro; au contraire, $|R_n|$ croît alors indéfiniment avec n.

On a représenté sur la fig. 260 les courbes représentatives de la fonction $y = \ln(1 + x)$ (ABC) et des trois premiers polynômes de Taylor.

§ 273. Croissance et décroissance d'une fonction

DÉFINITION 1. La fonction $f(x)$ est *croissante au point* $x = a$ si dans un VOISINAGE SUFFISAMMENT PETIT de ce point, aux valeurs de x supérieures à a correspondent des valeurs de $f(x)$ supérieures à $f(a)$ et aux valeurs de x inférieures à a des valeurs de $f(x)$ inférieures à $f(a)$.

La fonction $f(x)$ est *décroissante au point* $x = a$ si, dans un VOISINAGE SUFFISAMMENT PETIT de ce point, aux valeurs de x supérieures à a correspondent des valeurs de $f(x)$ inférieures à $f(a)$ et aux valeurs de x inférieures à a des valeurs de $f(x)$ supérieures à $f(a)$.

EXEMPLE 1. La fonction représentée sur la fig. 261 est croissante au point $x = a$, car à droite de A les points de la courbe sont situés plus haut que A, et à gauche plus bas. On ne considère alors que les

---

(*) Elle est valable pour tous les x compris entre -1 et $-\frac{1}{2}$, mais l'expression (15) ne permet pas de s'en assurer.

points de la courbe dont les ordonnées sont suffisamment proches de l'ordonnée aA; dans l'exemple considéré ce sont les points de l'arc KL. En dehors de cet arc la relation mentionnée n'est plus valable; ainsi, le point C est situé à droite, mais plus bas que le point A, le point U à gauche, mais plus haut.

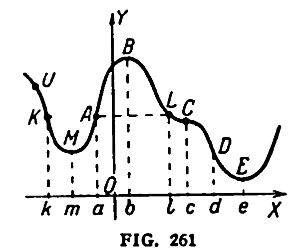


FIG. 261

La même fonction est décroissante au point $x = d$, car dans un voisinage suffisamment petit du point D les points de la courbe situés à droite sont plus bas que D et ceux situés à gauche plus haut.

La fonction considérée est également décroissante au point $x = c$.

Aux points $x = b$, $x = e$, $x = m$ la fonction n'est ni croissante, ni décroissante (au point $x = b$ elle admet un maximum et aux points $x = e$ et $x = m$ un minimum; § 275).

Définition 2. Une fonction est ***croissante dans l'intervalle*** (a, b) si elle est croissante en tout point intérieur de cet intervalle (elle peut ne pas être croissante aux extrémités).

On définit de même une fonction ***décroissante dans l'intervalle*** (a, b).

Exemple 2. La fonction représentée sur la fig. 261 est décroissante dans l'intervalle (l, d), car elle est décroissante en tout point intérieur de cet intervalle (et en ses extrémités). Dans l'intervalle (b, e) cette fonction est également décroissante, car elle décroît en chaque point intérieur de l'intervalle (aux extrémités b et e la fonction n'est pas décroissante). Dans l'intervalle (m, b) la fonction est croissante, dans l'intervalle (a, d) elle n'est ni croissante, ni décroissante. Si l'on divise cet intervalle en deux: (a, b) et (b, d), la fonction sera croissante dans le premier, et décroissante dans le second.

Dire qu'une fonction est croissante dans l'intervalle (a, b), c'est dire que, dans cet intervalle, elle varie comme la variable; inversement si dans l'intervalle (a, b) la fonction varie comme la variable, la fonction est croissante dans cet intervalle (*).

Si une fonction est décroissante dans l'intervalle (a, b), alors elle varie en sens contraire de la variable.

Interprétation géométrique: dans les intervalles où la fonction est croissante, sa courbe (quand on se déplace vers la droite) s'élève, dans les intervalles où la fonction est décroissante, la courbe s'abaisse (cf. exemple 2).

(*) Cette propriété sert souvent de définition d'une fonction croissante dans un intervalle. On définit de façon analogue une fonction décroissante dans un intervalle.

DÉFINITION 3. Les fonctions qui restent ou bien toujours croissantes ou bien toujours décroissantes (dans un intervalle) sont appelées *monotones* (dans cet intervalle).

§ 274. Critères de croissance et de décroissance d'une fonction en un point

CRITÈRE SUFFISANT. Si la dérivée $f'(x)$ est positive au point $x = a$, la fonction $f(x)$ est croissante en ce point; elle est décroissante si la dérivée est négative.

GÉOMÉTRIQUEMENT, si le coefficient angulaire de la tangente MT est positif (fig. 262), alors dans le voisinage de M la courbe représentative est située à droite plus haut que le point M, et à gauche plus bas que ce point; si le coefficient angulaire est négatif (fig. 263), dans le voisinage de M la courbe est à droite plus bas que M et à gauche plus haut.

REMARQUE. Si $f'(a) = 0$, la fonction peut pour $x = a$ être croissante (le point N sur la fig. 262); elle peut aussi être décroissante (le point L sur la fig. 263). Mais généralement, la fonction pour $x = a$ n'est ni croissante, ni décroissante (les points B et C sur la fig. 264). Nous indiquerons aux §§ 278 et 279 les procédés permettant de distinguer ces cas.

EXEMPLE 1. La fonction $y = x - \frac{1}{2}x^2$ (fig. 265) est croissante au point $x = 0$, car $y' = 1 - x = 1 > 0$. La même fonction est décrois-

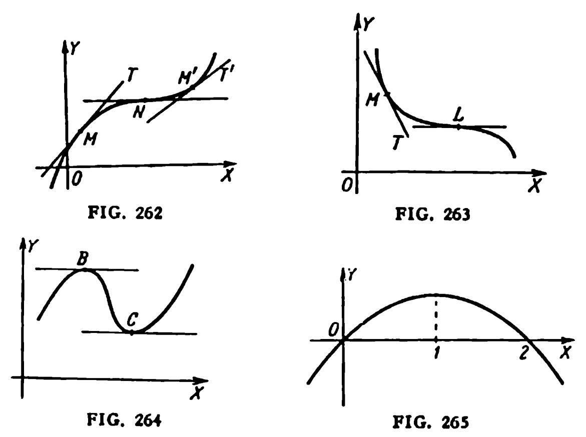


FIG. 262 FIG. 263 FIG. 264 FIG. 265

sante au point $x = 2$, où $y' = -1 < 0$. Au point $x = 1$, où $y' = 0$, la fonction n'est ni croissante, ni décroissante.

CRITÈRE NÉCESSAIRE. Si la fonction $f(x)$ est croissante au point $x = a$, sa dérivée (*) en ce point est positive (comme au point M sur la fig. 262) ou nulle (comme au point N sur la fig. 262):

$$f'(a) \geqslant 0.$$

On a un critère analogue pour une fonction décroissante; sa dérivée est négative ou nulle au point $x = a$:

$$f'(a) \leqslant 0.$$

EXEMPLE 2. La fonction $y = x^3$ (fig. 266) est croissante en tout point. Sa dérivée $y' = 3x^2$ est partout positive, excepté au point $x = 0$, où $y' = 0$.

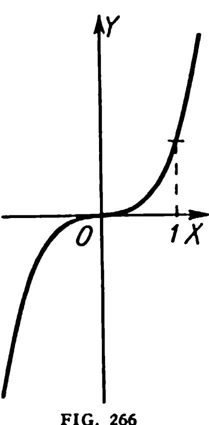


FIG. 266

§ 274a. Critères de croissance et de décroissance d'une fonction dans un intervalle

CRITÈRE SUFFISANT. Si la dérivée $f'(x)$ est partout positive dans l'intervalle (a, b), la fonction $f(x)$ est croissante dans cet intervalle; si $f'(x)$ est partout négative, la fonction $f(x)$ est décroissante (cf. § 274).

REMARQUE. Le critère reste valable quand la dérivée prend également des valeurs nulles dans l'intervalle (a, b), pourvu que $f(x)$ ne soit pas identiquement nulle dans tout l'intervalle (a, b) ou dans un intervalle (a', b'), partie de (a, b) (dans un tel intervalle la fonction $f(x)$ serait constante).

EXEMPLE. La fonction $y = x - \frac{1}{2} x^2$ (fig. 265) est croissante dans l'intervalle $(0, 1)$ car la dérivée $y' = 1 - x$ n'est nulle qu'au point $x = 1$, aux autres points de l'intervalle $(0, 1)$ elle est positive. La même fonction est décroissante dans l'intervalle $(1, 2)$, car la dérivée y' est ici partout négative sauf au point $x = 1$, où $y' = 0$.

CRITÈRE NÉCESSAIRE. Si la fonction $f(x)$ est croissante dans l'intervalle (a, b), sa dérivée (**) $f'(x)$ est positive ou nulle dans cet intervalle:

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ pour } a \leqslant x \leqslant b.$$

D'une manière analogue pour une fonction décroissante

$$f'(x) \leqslant 0 \text{ pour } a \leqslant x \leqslant b.$$

(*) On suppose que $f(x)$ est dérivable en ce point.
(**) On suppose que la fonction est dérivable dans l'intervalle (a, b).

§ 275. Maximum et minimum

DÉFINITION. On dit que la fonction $f(x)$ admet un *maximum au point* $x = a$ si dans un VOISINAGE SUFFISAMMENT PETIT DE CE POINT à toutes les valeurs de x (tant supérieures qu'inférieures à a) correspondent des valeurs de $f(x)$ inférieures à $f(a)$.

La fonction $f(x)$ admet un *minimum au point* $x = a$ si dans un VOISINAGE SUFFISAMMENT PETIT DE CE POINT à toutes les valeurs de x correspondent des valeurs de $f(x)$ supérieures à $f(a)$.

En résumé: *la fonction $f(x)$ admet un maximum (un minimum) au point $x = a$ si la valeur $f(a)$ est plus grande (plus petite) que toutes les valeurs voisines.*

Le maximum et le minimum sont les *extréma* d'une fonction.

EXEMPLE. La fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ (fig. 267) admet un maximum au point $x = 0$ $\left[\text{le point } A\left(0, \frac{1}{3}\right)\right.$ est plus haut que les points voisins$\left.\right]$ et un minimum au point $x = 2$ [le point $B(2, -1)$ est plus bas que les points voisins].

REMARQUE. Dans le langage courant, les expressions « maximum » et « plus grande valeur » sont équivalentes. En analyse le terme « maximum » a un sens plus étroit: le maximum de la fonction peut ne pas être sa plus grande valeur. Ainsi la fonction $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}$ (cf. fig. 267), considérée disons dans l'intervalle $(-1, 4)$, admet un maximum au point $x = 0$, car AU VOISINAGE de ce point [notamment dans l'intervalle $(-1, 3)$] à toutes les valeurs de x correspondent des valeurs de $f(x)$ inférieures à $f(0)$, c'est-à-dire à $\frac{1}{3}$ (dans l'intervalle mentionné la courbe représentative est située plus bas que le point A). Toutefois le maximum $f(0)$ n'est pas la plus grande valeur de la fonction dans l'intervalle $(-1, 4)$, car pour $x > 3$ nous avons:

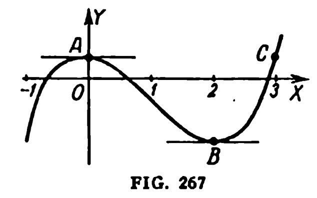


FIG. 267

$$f(x) > \frac{1}{3}$$

(à droite de C la courbe est située plus haut que le point A). Il est vrai que la recherche de la plus grande valeur de la fonction dans un intervalle donné est intimement liée à la recherche de ses maxima (cf. § 280).

Une remarque analogue est valable pour le minimum.

§ 276. Condition nécessaire de maximum et de minimum

THÉORÈME. Si la fonction $f(x)$ admet un extrémum (c'est-à-dire un maximum ou un minimum) au point $x = a$, alors en ce point la dérivée est nulle ou infinie ou encore n'existe pas.

GÉOMÉTRIQUEMENT, si la courbe possède au point A une ordonnée maximale, en ce point la tangente est ou bien horizontale (fig. 267) ou bien verticale (fig. 268) ou bien n'existe pas (fig. 269). Il en est de même pour l'ordonnée minimale (le point B sur la fig. 267, le point A sur la fig. 270, les points B et C sur la fig. 269).

REMARQUE. La condition d'extrémum énoncée dans le théorème est nécessaire, mais *non suffisante*, autrement dit, la dérivée au point $x = a$ peut être nulle (fig. 271), infinie (fig. 272) ou ne pas exister (fig. 273) sans que la fonction admette un extrémum en ce point.

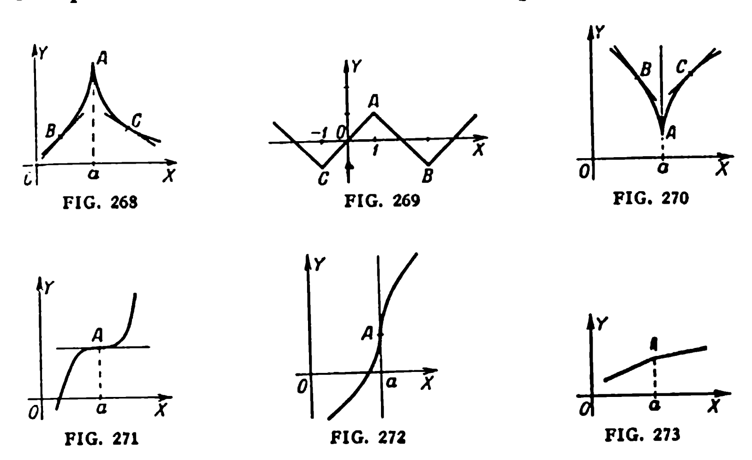


FIG. 268 FIG. 269 FIG. 270

FIG. 271 FIG. 272 FIG. 273

§ 277. Première condition suffisante de maximum et de minimum

THÉORÈME. Si dans un voisinage suffisamment petit du point $x = a$ la dérivée $f'(x)$ est positive à gauche de a et négative à droite de a (fig. 274), la fonction $f(x)$ admet au point $x = a$ un maximum à condition qu'elle y soit continue (*).

Si, au contraire, la dérivée $f'(x)$ est négative à gauche de a et positive à droite de a (fig. 275), alors la fonction $f(x)$ admet un minimum au point a à condition qu'elle y soit continue (**).

Le théorème exprime le fait que $f(x)$ passe par un maximum si, après avoir augmenté, elle cesse de croître pour commencer à décroître, et qu'elle passe par un minimum si, après avoir diminué, elle cesse de décroître pour commencer à croître.

REMARQUE. En vertu de ce théorème le critère d'existence d'un extrémum de la fonction $f(x)$ est le *changement de signe* de la dérivée $f'(x)$ quand l'argument passe par la valeur considérée $x = a$.

Si, par contre, pour $x = a$ la dérivée *conserve* son signe, la fonction $f(x)$ est *croissante* au point $x = a$ quand la dérivée est positive tant à droite qu'à gauche de $x = a$ (fig. 271, 272, 273) et *décroissante* quand la dérivée est négative (fig. 276). [On suppose à nouveau que $f(x)$ est continue pour $x = a$.]

§ 278. Règle de recherche des maxima et des minima

Soit $f(x)$ une fonction dérivable dans l'intervalle (a, b). Pour trouver tous ses maxima et minima dans cet intervalle il faut:

1) *Résoudre l'équation* $f'(x) = 0$ (les racines de cette équation sont appelées les valeurs *critiques* de l'argument; on doit rechercher parmi elles les valeurs de x pour lesquelles la fonction $f(x)$ admet un extrémum; cf. § 276).

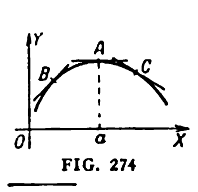


FIG. 274

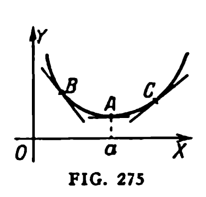


FIG. 275

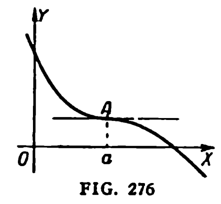


FIG. 276

(*) La fonction $f(x)$ peut toutefois ne pas être dérivable au point $x = a$ (cf. fig. 268).
(**) La fonction $f(x)$ peut toutefois ne pas être dérivable au point $x = a$ (cf. fig. 270).

2) *Pour chaque valeur critique $x = a$ étudier si la dérivée $f'(x)$ change de signe quand l'argument passe par cette valeur.* Si $f'(x)$ passe *des valeurs positives aux valeurs négatives* (en passant de $x < a$ à $x > a$), nous sommes en présence d'*un maximum* (§ 277), si elle passe *des valeurs négatives aux valeurs positives*, nous sommes en présence d'*un minimum*.

Si par contre $f'(x)$ conserve son signe, il n'y a ni maximum, ni minimum: si $f'(x) > 0$, la fonction $f(x)$ est croissante au point $x = a$; elle est décroissante si $f'(x) < 0$ (§ 277, remarque).

Signe de la dérivée		Forme de la courbe représentative au voisinage du point a	
$x < a$	$x > a$		
+	−	A	maximum
−	+	A	minimum
+	+	A	croissance
−	−	A	décroissance

Remarque 1. Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle (a, b), mais non dérivable en certains de ses points, on considérera ces points comme points critiques et on procédera à une étude analogue.

Remarque 2. Les maxima et les minima d'une fonction continue se succèdent alternativement.

Exemple 1. Trouver tous les maxima et les minima de la fonction $f(x) = x - \frac{1}{2} x^2$.

Solution. La fonction donnée est partout dérivable (c'est-à-dire qu'elle possède partout une dérivée finie) $f'(x) = 1 - x$.

1) Nous résolvons l'équation $1 - x = 0$. Elle possède une racine unique $x = 1$.

2) La dérivée $f'(x) = 1 - x$ change de signe quand l'argument passe par la valeur $x = 1$. En effet, quand $x < 1$, la dérivée est positive,

quand $x > 1$, elle est négative. Par conséquent, pour la valeur critique $x = 1$ la fonction admet un maximum. La fonction ne possède pas d'autres extréma (cf. fig. 265).

EXEMPLE 2. Trouver tous les maxima et les minima de la fonction

$$f(x) = (x-1)^2 (x+1)^3. \tag{1}$$

SOLUTION. La fonction donnée est partout dérivable. Nous avons:

$$f'(x) = 2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2 = (x-1)(x+1)^2(5x-1).$$

1) Nous résolvons l'équation $f'(x) = 0$. Ses racines (rangées dans l'ordre de croissance) sont:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = 1. \tag{2}$$

2) Ecrivant la dérivée sous la forme

$$f'(x) = 5(x+1)^2 \left(x - \frac{1}{5}\right)(x-1), \tag{3}$$

étudions chacune des valeurs critiques.

a) Quand $x < -1$, les trois binômes de la formule (3) sont négatifs, de sorte qu'à gauche de $x = -1$ nous avons:

$$f'(x) = 5(-)^2(-)(-) = +. \tag{4}$$

Supposons que l'argument ait passé par la valeur $x_1 = -1$ sans atteindre la valeur critique suivante $x_2 = \frac{1}{5}$. Le binôme $x + 1$ devient alors positif, les deux autres binômes de la formule (3) restent négatifs, et nous avons:

$$f'(x) = 5(+)^2(-)(-) = +. \tag{5}$$

Comparant (4) et (5) nous voyons que lors du passage de l'argument par la valeur critique $x_1 = -1$ la dérivée reste positive. Cela signifie qu'il n'y a pas d'extrémum au point $x = -1$; la fonction est ici croissante (fig. 277).

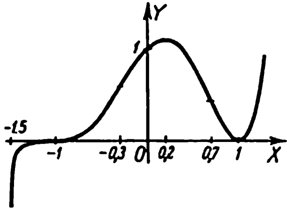


FIG. 277

b) Etudions la plus proche valeur critique suivante $x_2 = \frac{1}{5}$. Dans un voisinage suffisamment petit à gauche $\left(\text{c'est-à-dire entre } x_1 = -1 \text{ et } x_2 = \frac{1}{5}\right)$ la dérivée est positive en vertu de (5),

et à droite $\left(\text{entre } x_1 = \frac{1}{5} \text{ et } x_2 = +1\right)$ le second facteur est positif et nous avons:

$$f'(x) = 5(+)^2 (+) (-) = -. \tag{6}$$

Comparant (5) et (6), nous voyons que le signe de la dérivée change du plus en moins quand on passe par $x_2 = \frac{1}{5}$ [la fonction $f(x)$ cesse de croître pour commencer à décroître]. Cela signifie qu'au point $x = \frac{1}{5}$ la fonction admet un maximum:

$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{5} - 1\right)^2 \left(\frac{1}{5} + 1\right)^3 \approx 1{,}1.$$

c) Etudions la dernière valeur critique $x_3 = 1$. Dans un voisinage suffisamment petit à gauche la dérivée est négative en vertu de (6). A droite de $x = 1$ nous avons:

$$f'(x) = \frac{1}{5} (+)^2 (+) (+) = +. \tag{7}$$

En passant par $x = 1$ la dérivée change de signe du moins en plus [la fonction $f(x)$ cesse de décroître pour commencer à croître]. Cela signifie que pour $x = 1$ la fonction admet un minimum:

$$f(1) = (1 - 1)^2 (1 + 1)^3 = 0.$$

EXEMPLE 3. Trouver tous les extréma de la fonction

$$f(x) = (x - 1) \sqrt[3]{x^2}.$$

SOLUTION. La fonction considérée est dérivable pour toutes les valeurs positives et négatives de x, et nous avons:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5}{3} \frac{x - \frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Pour $x = 0$ la fonction $f(x)$ n'est pas dérivable (le dénominateur de la dérivée s'annule). C'est pourquoi (cf. remarque 1) nous avons deux valeurs critiques: $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{2}{5}$. Pour $x < 0$ nous avons:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \frac{(-)}{\sqrt[3]{-}} = +.$$

Pour $0 < x < \frac{2}{5}$ nous avons:

$$f'(x) = \frac{5}{3}\,\frac{(-)}{\sqrt[3]{+}} = -.$$

Pour $x > \frac{2}{5}$ nous avons:

$$f'(x) = \frac{5}{3}\,\frac{(+)}{\sqrt[3]{+}} = +.$$

Ainsi, au point $x = 0$ la fonction $f(x) = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}$ admet un maximum:

$$f(0) = 0,$$

et au point $x = \frac{2}{5}$ un minimum:

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} \approx -0{,}33.$$

§ 279. Seconde condition suffisante de maximum et de minimum

Quand il est difficile d'établir le signe de la dérivée au voisinage des points critiques (§ 278), on peut utiliser la condition suffisante d'extrémum que voici:

THÉORÈME 1. Supposons qu'au point $x = a$ la dérivée première $f'(x)$ s'annule. Si la dérivée seconde $f''(a)$ est alors négative, la fonction $f(x)$ admet un maximum au point $x = a$, si elle est positive, $f(x)$ admet un minimum. Pour le cas $f''(a) = 0$ cf. le théorème 2.

La seconde condition est liée avec la première de la manière suivante. Soit $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$. La relation $f''(a) < 0$ signifie (§ 274) que $f'(x)$ décroît au point $x = a$. Et comme $f'(a) = 0$, $f'(x)$ est positive pour $x < a$ et négative pour $x > a$. Cela signifie (§ 277) que $f(x)$ admet un maximum pour $x = a$. On raisonne de manière analogue pour $f''(a) > 0$.

EXEMPLE 1. Trouver les maxima et les minima de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1.$$

SOLUTION. Résolvant l'équation

$$f'(x) = 2x^3 - 2x = 0,$$

nous obtenons les valeurs critiques

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1.$$

Portant ces valeurs dans l'expression de la dérivée seconde

$$f''(x) = 6x^2 - 2 = 2(3x^2 - 1),$$

nous trouvons

$$f''(-1) > 0, \quad f''(0) < 0, \quad f''(1) > 0.$$

Cela signifie que pour $x = -1$ et $x = 1$ la fonction admet un minimum, et pour $x = 0$ un maximum (fig. 278).

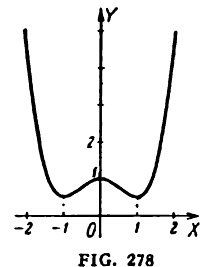


FIG. 278

Il peut arriver que les dérivées première et seconde s'annulent simultanément; il se peut également que plusieurs dérivées successives s'annulent simultanément. On peut alors utiliser la généralisation suivante du théorème 1.

THÉORÈME 2. Si au point $x = a$, où la dérivée première s'annule, la première dérivée non nulle est d'ordre pair $2k$, la fonction $f(x)$ admet un maximum pour $x = a$ quand $f^{(2k)}(a) < 0$, et un minimum quand $f^{(2k)}(a) > 0$.

Si la première dérivée non nulle est d'ordre impair $2k + 1$, la fonction $f(x)$ ne possède pas d'extrémum au point a; elle est croissante si $f^{(2k+1)}(a) > 0$ et décroissante si $f^{(2k+1)}(a) < 0$.

REMARQUE. Il n'est pas exclu théoriquement que pour une fonction $f(x)$ (qui n'est pas une grandeur constante) *toutes les dérivées* soient nulles (*) au point $x = a$. Toutefois, ce cas ne présente pas d'intérêt pratique.

EXEMPLE 2. Trouver les maxima et les minima de la fonction

$$f(x) = \sin 3x - 3 \sin x.$$

SOLUTION. Nous avons:

$$f'(x) = 3 \cos 3x - 3 \cos x.$$

Résolvant l'équation

$$3 \cos 3x - 3 \cos x = 0,$$

nous trouvons:

$$x = k\frac{\pi}{2},$$

où k est un entier quelconque.

Comme la fonction considérée possède une période égale à 2π, il suffit d'étudier les quatre racines:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \pi, \quad x_4 = \frac{3\pi}{2}.$$

Calculons la dérivée seconde

$$f''(x) = -9 \sin 3x + 3 \sin x.$$

(*) Telle est, par exemple, la fonction $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (cf. p. 350).

Portant les valeurs critiques x_1, x_2, x_3, x_4 nous trouvons:

$$f''(0) = 0, \ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 12,$$

$$f''(\pi) = 0, \ f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -12.$$

Au point $x_2 = \frac{\pi}{2}$ la première dérivée non nulle est du second ordre (pair), de plus $f''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$. Donc pour $x = \frac{\pi}{2}$ nous avons un minimum. Nous concluons de même que pour $x = \frac{3\pi}{2}$ nous avons un maximum $\left[\text{car } f''\left(\frac{3\pi}{2}\right) < 0\right]$.

Les valeurs extrémales de la fonction sont:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin 3\frac{\pi}{2} - 3\sin\frac{\pi}{2} = -1 - 3 = -4 \ \text{(minimum)},$$

$$f\left(3\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{9\pi}{2} - 3\sin\frac{3\pi}{2} = 1 - (-3) = 4 \ \text{(maximum)}.$$

Pour étudier les valeurs critiques $x_1 = 0$ et $x_3 = \pi$, calculons la dérivée troisième

$$f'''(x) = -27\cos 3x + 3\cos x.$$

Nous avons:

$$f'''(0) = -24, \qquad f'''(\pi) = +24.$$

Au point $x = 0$ la première dérivée non nulle est du troisième ordre (impair), de plus $f'''(0) < 0$. Donc pour $x = 0$ il n'y a pas d'extrémum. Ici la fonction $f(x)$ est décroissante. Nous concluons de même que pour $x = \pi$ il n'y a pas non plus d'extrémum; mais ici la fonction $f(x)$ est croissante [car $f'''(\pi > 0$].

§ 280. Recherche des plus grandes et plus petites valeurs d'une fonction

1. Supposons que d'après les conditions du problème l'argument de la fonction continue $f(x)$ varie dans un intervalle infini, par exemple, dans l'intervalle $(a, +\infty)$. Il peut alors arriver que parmi les valeurs de la fonction $f(x)$ il n'y ait pas de plus grande valeur; cf. fig. 279*a*, où $f(x)$ croît indéfiniment quand $x \to +\infty$. Si par contre la fonction $f(x)$ possède une plus grande valeur, cette dernière est nécessairement l'un des extréma de la fonction; cf. fig. 279*b*, où la plus grande valeur de la fonction est $f(c)$.

Supposons maintenant que d'après les conditions du problème l'argument x varie dans l'intervalle *fermé* (a, b). Dans ce cas la fonction $f(x)$ possède nécessairement une plus grande valeur (§ 221). Toutefois,

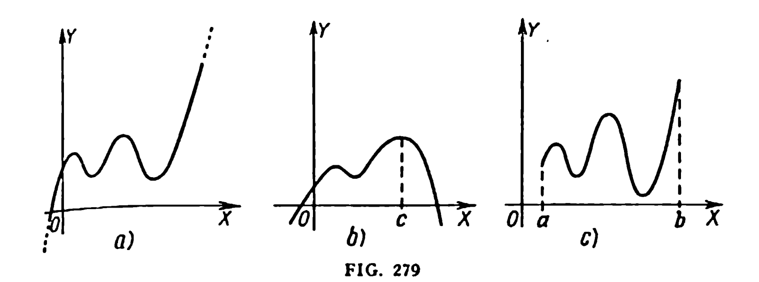


FIG. 279

cette dernière peut ne pas être un extrémum, mais peut être atteinte à l'une des extrémités de l'intervalle (au point $x = b$ (*) sur la fig. 279 *c*). Il en est de même pour la plus petite valeur.

2. Supposons que l'on doive rechercher la plus grande (ou la plus petite) valeur d'une grandeur géométrique ou physique soumise à des conditions déterminées (cf. plus bas les exemples). Il faut alors représenter cette grandeur comme une fonction d'un argument quelconque. Déterminons à l'aide des conditions du problème l'intervalle de variation de cet argument. Trouvons ensuite toutes les valeurs critiques de l'argument situées dans cet intervalle et calculons les valeurs correspondantes de la fonction, ainsi que les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle. Choisissons la plus grande (ou la plus petite) de ces valeurs.

REMARQUE 1. L'argument peut souvent être choisi de différentes manières; un choix rationnel peut simplifier la solution. On y arrive également si on prend en considération les particularités du problème.

Ainsi, si à l'intérieur de l'intervalle considéré il n'existe qu'une seule valeur critique de l'argument et si on a vérifié à la lumière de tel ou tel critère (cf. §§ 277, 279) que c'est un maximum (ou un minimum), nous pouvons conclure, sans même comparer avec les valeurs de la fonction aux extrémités de l'intervalle, que ce maximum (minimum) est la plus grande (la plus petite) valeur cherchée.

EXEMPLE 1. Le segment $AB = a$ est partagé en deux parties par le point C; on construit sur les segments AC et CB (fig. 280) pris comme côtés le rectangle $ACBD$. Déterminer la plus grande valeur de son aire S.

(*) Si l'on fait abstraction de l'extrémité $x = b$, la fonction $f(x)$ n'aura pas de plus grande valeur dans l'intervalle restant *semi-ouvert*.

FIG. 280

SOLUTION. Prenons pour argument x la longueur de AC; nous avons alors

$$CB = a - x \quad \text{et} \quad S = x(a - x).$$

L'argument x de la fonction continue S varie dans l'intervalle $(0, a)$.

Trouvons de l'équation

$$\frac{dS}{dx} = a - 2x = 0$$

la valeur critique (unique) $x = \frac{a}{2}$. Elle appartient à l'intervalle considéré $(0, a)$. Calculons la valeur $S\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4}$ et les valeurs aux extrémités $f(0) = 0$, $f(a) = 0$. La comparaison de ces trois valeurs nous permet d'affirmer que la plus grande valeur cherchée est $\frac{a^2}{4}$.

En fait cette comparaison est superflue si l'on remarque qu'à l'unique point critique $x = \frac{a}{2}$ la dérivée seconde de la fonction $S(x)$ est négative, autrement dit (§ 279) la fonction $S(x)$ admet un maximum en ce point.

Le rectangle variable $ACBD$ possède toujours le même périmètre $(2a)$. Par conséquent, *de tous les rectangles ayant un périmètre donné, le carré est celui qui possède la plus grande aire.*

REMARQUE 2. Le plus commode est de prendre pour argument la distance z du point C au milieu O du segment AB (cf. fig. 280). Nous avons alors

$$AC = AO + OC = \frac{a}{2} + z, \qquad CB = OB - OC = \frac{a}{2} - z$$

et

$$S = \left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2.$$

Il n'est plus nécessaire de rechercher l'extrémum, car $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2$ n'est évidemment pas supérieur à $\left(\frac{a}{2}\right)^2$.

EXEMPLE 2. Dans les hypothèses de l'exemple 1 trouver la plus petite valeur de l'aire S.

SOLUTION. Prenons pour argument x le segment AC. Comparons l'unique valeur extrémale $\left(\frac{a^2}{4}\right)$ de la fonction $S = x(a - x)$ avec sa valeur $(S = 0)$ aux extrémités de

l'intervalle $x = 0$ et $x = a$. Nous trouvons que zéro est la valeur minimale de S [*dans l'intervalle fermé* $(0, a)$].

Toutefois, quand $x = 0$ et $x = a$, nous n'avons pas de rectangle dans le sens propre du terme (il se réduit au segment AB). Si nous ne considérons que les «vrais» rectangles, nous devons exclure les extrémités de l'intervalle $(0, a)$ et alors S n'admet pas de plus petite valeur [dans l'intervalle ouvert $(0, a)$].

EXEMPLE 3. Trouver la plus petite et la plus grande valeur du demi-périmètre p d'un rectangle d'aire donnée S.

SOLUTION. Désignons par x, y les côtés du rectangle. Nous avons par hypothèse

$$xy = S \tag{1}$$

(x, y sont des quantités positives). On demande de trouver la plus grande et la plus petite valeur de la grandeur

$$p = x + y. \tag{2}$$

Soit x l'argument; dans ce cas

$$p = x + \frac{S}{x}. \tag{3}$$

L'argument x varie dans l'intervalle infini $(0, +\infty)$ (l'extrémité $x = 0$ n'y est pas incluse). Dans cet intervalle la fonction $p(x)$ est continue et possède la dérivée

$$\frac{dp}{dx} = 1 - \frac{S}{x^2}. \tag{4}$$

Nous trouvons de l'équation

$$1 - \frac{S}{x^2} = 0 \tag{5}$$

l'unique (dans cet intervalle) valeur critique

$$x = \sqrt{S}.$$

On voit de (4) que pour $0 < x < \sqrt{S}$ la dérivée $\frac{dp}{dx}$ est négative et pour $x > \sqrt{S}$ positive. Cela signifie (§ 277) que p admet un minimum. Etant unique, c'est (cf. remarque 1) la plus petite valeur du demi-périmètre [*]:

$$p_{\text{pl. p}} = \sqrt{S} + \frac{S}{\sqrt{S}} = 2\sqrt{S}, \tag{6}$$

---

[*] On peut résoudre le problème sans rechercher l'extrémum. Les égalités (2) et (1) donnent: $p^2 = (x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy = (x - y)^2 + 4S$. Comme $4S$ est une grandeur constante et que la plus petite valeur de $(x - y)^2$ est zéro (quand $x = y$), la plus petite valeur de p^2 est $4S$; cela signifie que la plus petite valeur de p est $2\sqrt{S}$.

Ce procédé est plus simple (il n'exige pas le recours aux mathématiques supérieures) et plus bref. Mais il est basé sur l'intuition, et dans ce sens il est plus difficile que la méthode générale exposée.

c'est-à-dire que *de tous les rectangles d'aire donnée S le plus petit demi-périmètre est celui du carré* ($x = \sqrt{S}$, $y = \sqrt{S}$).

La grandeur p n'admet pas de plus grande valeur (l'intervalle $(0, +\infty)$ est ouvert).

EXEMPLE 4. Déterminer la plus petite quantité de fer-blanc nécessaire à fabriquer une boîte de conserve cylindrique de capacité $V = 2$ l (nous ne tenons pas compte de la quantité de métal pour les joints de soudure).

SOLUTION. Soient S la surface de la boîte, r le rayon de sa base et h sa hauteur. On demande de trouver la plus petite valeur de la grandeur

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2 \tag{7}$$

à condition que

$$\pi r^2 h = V. \tag{8}$$

Il est commode de prendre r pour argument. Nous trouvons de (7) et (8):

$$S = 2\left(\frac{V}{r} + \pi r^2\right), \tag{9}$$

où l'argument varie dans l'intervalle $(0, \infty)$. D'après le sens du problème il est clair que la grandeur S atteint sa plus petite valeur à l'intérieur de cet intervalle. C'est pourquoi il suffit de considérer les valeurs de la fonction aux points critiques.

Résolvons l'équation

$$\frac{dS}{dr} = 2\left(-\frac{V}{r^2} + 2\pi r\right) = 0. \tag{10}$$

Son unique racine

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \tag{11}$$

correspond à la plus petite valeur de S. Nous trouvons de (8) et (11): $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2r$, autrement dit *la hauteur du cylindre doit être égale au diamètre de la base.* La plus petite quantité de fer-blanc nécessaire est

$$S_{\text{pl. p}} = 2\pi(rh + r^2) = 6\pi r^2 = 3\sqrt[3]{2\pi V^2} \approx 879 \text{ cm}^2.$$

EXEMPLE 5 (PARADOXE DE DESCARTES). En 1638 Descartes reçut (par l'intermédiaire de Mersenne) une lettre de Fermat dans laquelle ce dernier exposait sans démonstration une règle pour rechercher l'extrémum qu'il avait découverte. Dans le langage mathématique moderne il s'agissait de rechercher les valeurs de x annulant la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$.

Dans sa réponse à Fermat Descartes rapportait l'exemple suivant qui, selon lui démontrait la fausseté de la règle de Fermat.

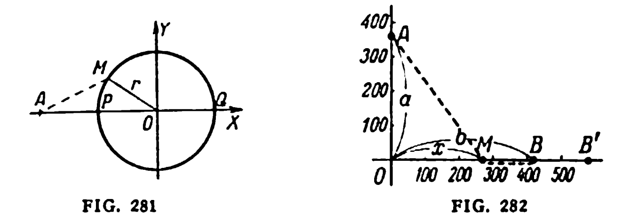


FIG. 281 FIG. 282

Soient donnés une circonférence

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{12}$$

(fig. 281) et un point A $(-a, 0)$, différent du centre (autrement dit, $a \neq 0$). On demande de trouver sur la circonférence (12) le point le plus proche de A. Le carré de la distance d'un point arbitraire $M(x, y)$ au point A s'écrit:

$$AM^2 = (x + a)^2 + y^2. \tag{13}$$

Si M est situé sur la circonférence (12), on a

$$y^2 = r^2 - x^2,$$

de sorte que

$$AM^2 = (x + a)^2 + r^2 - x^2.$$

Pour trouver la valeur de x minimisant la quantité AM^2, Descartes applique la règle de Fermat et obtient l'égalité absurde $2a = 0$.

Or, il est clair, au point de vue géométrique, que le point cherché existe et coïncide avec le point P $(-r, 0)$. Descartes en conclut que la règle de Fermat est fausse. En fait, la raison pour laquelle on n'obtient pas le point $P(x = -r)$ est toute autre: la plus petite valeur de AM^2 qui lui correspond *n'est pas un minimum*. En effet, x ne varie que dans l'intervalle $(-r, +r)$. La fonction considérée prend sa plus petite valeur à l'extrémité de cet intervalle.

EXEMPLE 6. Des nageurs participant à une compétition partent du canot A (fig. 282) en direction d'un point B de la berge. Les conditions de la course permettent d'effectuer une partie du trajet à pied. Le canot est situé en face du quai O, à une distance $OA = a = 360$ m; le point de destination B est distant du quai de $OB = b = 420$ m. Quel sera le meilleur temps réalisé si en une minute on couvre 90 m dans l'eau et 150 m sur terre ferme?

SOLUTION. Supposons que le nageur sorte de l'eau au point M distant du quai de $OM = x$. Il suffit de considérer la variation de x dans l'intervalle $(0, b)$ (*).

Le temps t (en minutes) du trajet AMB est

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{90} + \frac{b - x}{150}. \tag{14}$$

(*) Sans aucun doute le nageur ne sortira de l'eau en dehors du secteur OB: le point B' est plus loin que le point B; en outre, il faudra encore parcourir le chemin $B'B$.

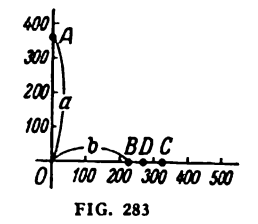


FIG. 283

Ici $a = 360$, $b = 420$. On demande de trouver la plus petite valeur de la fonction t dans l'intervalle $(0, b)$.

Nous avons:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{x}{90\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{150}. \tag{15}$$

Résolvant l'équation

$$\frac{x}{90\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{150} = 0, \tag{16}$$

nous trouvons l'unique valeur critique $x = \frac{3}{4} a = 270$ m. Cette valeur est comprise dans l'intervalle considéré $(0, b)$. Comme la dérivée seconde

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{90} \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right) = \frac{a^2}{90\sqrt{(a^2 + x^2)^3}}$$

est positive au point $x = \frac{3}{4} a$ (comme en tous les autres points), alors (§ 279, théorème 1) en ce point la fonction admet un minimum. Comme il est unique, ce minimum donne (cf. remarque 1) la plus petite valeur cherchée de la fonction t

$$t_{\text{pl. p}} = \frac{\sqrt{a^2 + \left(\frac{3}{4} a\right)^2}}{90} + \frac{b - \frac{3}{4} a}{150} = 6 \text{ (minutes)}.$$

Le chemin du nageur est indiqué en pointillé sur la fig. 282.

Exemple 6a. Résoudre le même problème que dans l'exemple 6 avec $b = 225$ m (fig. 283).

Solution. Il suffit de considérer la variation de x dans l'intervalle $(0, 225)$. Comme la racine $x = 270$ de l'équation (16) se trouve à l'extérieur de cet intervalle, la fonction t n'admet pas de minimum à son intérieur. Elle prend sa plus petite valeur à l'extrémité $x = b = 225$. Ici

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{90} = 4'43''.$$

Le participant doit nager dans la direction de la ligne d'arrivée.

Remarque 3. Lors de la résolution de ce dernier problème nous n'avons considéré avec raison, la variation de l'argument x de la fonction

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{90} + \frac{b - x}{150} \tag{14}$$

(où $a = 360$, $b = 225$) que dans l'intervalle $(0, 225)$.

Or, nous aurions pu élargir le domaine de variation de l'argument et considérer, disons, l'intervalle $(0, 325)$. Nous aurions alors trouvé, en raisonnant comme dans l'exemple 6, que la fonction (14) admet un minimum au point $x = 270$ (car ce point se trouve dans l'intervalle considéré, représente l'unique valeur critique de la fonction (14) et donne le minimum de cette fonction).

On aurait pu en conclure que le sportif devrait nager jusqu'au point D plus éloigné que le point d'arrivée B, ce qui est absurde.

En effet, la fonction (14) *n'exprime t en fonction de x que* sur le tronçon OB; sur le tronçon BC cette dépendance s'exprime par la formule

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{90} + \frac{x - b}{150} \qquad (14')$$

(cf. fig. 284).

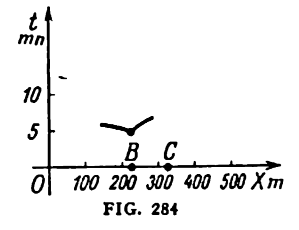


FIG. 284

Pour $x = b$ les deux formules (14), (14') donnent une seule et même valeur, de sorte que la fonction $t(x)$ est continue au point $x = b$, mais en ce point la dérivée $\frac{dt}{dx}$ n'existe pas. C'est pourquoi $x = b$ est maintenant un point critique de la fonction $t(x)$ (cf. § 278, remarque 1). Il n'existe pas d'autres points critiques dans l'intervalle (0, 325).

§ 281. Convexité des courbes planes; point d'inflexion

La courbe plane L est dite *convexe au point M* (fig. 285) si dans un voisinage suffisamment petit de M elle est située d'un seul côté de la tangente MT (*le côté de la concavité* de la courbe L). Le côté opposé est appelé *le côté de la convexité*.

Si au voisinage du point M la courbe L est située de part et d'autre de la tangente MT (fig. 286) le point M est appelé *point d'inflexion* de la courbe L.

Quand on passe par le point d'inflexion, le côté de la convexité devient le côté de la concavité et inversement.

Soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe L. Si *la dérivée* $f'(x)$ est croissante au point $x = a$, la courbe L tourne sa concavité vers le haut (fig. 287), si elle est décroissante, la courbe tourne sa concavité vers le bas (fig. 288). Si par contre la dérivée $f'(x)$ admet un extrémum

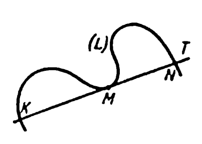


FIG. 285

FIG. 286

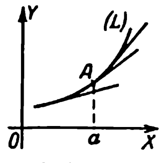


FIG. 287

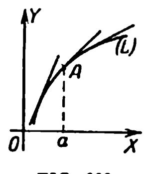


FIG. 288

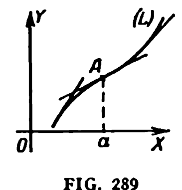


FIG. 289

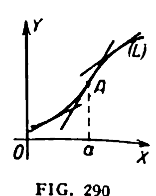


FIG. 290

au point $x = a$ (fig. 289, 290), ce point est un point d'inflexion de la courbe L.

§ 282. Concavité

1. Si la dérivée seconde $f''(x)$ est positive au point $x = a$, la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité vers le haut, si elle est négative vers le bas (cf. le schéma fig. 291).

EXPLICATION. Si $f''(a) > 0$, alors $f'(x)$ est croissante au point $x = a$ (§ 274); cela signifie (§ 281) que la concavité est tournée vers le haut. Un raisonnement analogue est valable pour le cas $f''(a) < 0$.

2. Supposons qu'au point $x = a$ la dérivée seconde $f''(x)$ soit nulle, infinie ou n'existe pas.

Si, en passant par $x = a$ la dérivée seconde (*) change de signe, ce point est un point d'inflexion de la courbe $y = f(x)$ (fig. 292). Si par contre $f''(x)$ conserve son signe, la courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité vers le côté correspondant (cf. 1) (cf. §§ 277 et 281).

EXEMPLE 1. La courbe

$$y = 3x^4 - 4x^3$$

(fig. 293) tourne au point $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{27}\right)$ sa concavité vers le haut et

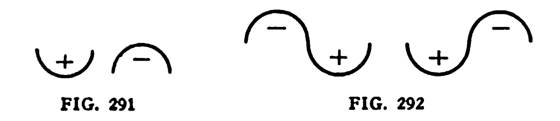


FIG. 291 FIG. 292

(*) On suppose qu'elle existe *dans le voisinage* du point a.

au point $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}\right)$ vers le bas, car la dérivée seconde

$$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2)$$

est positive pour $x = -\frac{1}{3}$ [les deux facteurs $12x$ et $(3x - 2)$ sont positifs] et négative pour $x = \frac{1}{3}$.

Le point O (0, 0), où $y'' = 0$, est un point d'inflexion, car quand on passe par $x = 0$ la dérivée seconde change de signe du plus (quand $x < 0$) en moins (quand $x > 0$). A gauche de O la courbe tourne sa concavité vers le haut, à droite de O vers le bas.

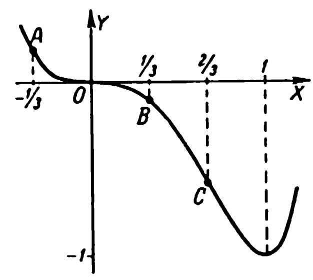


FIG. 293

EXEMPLE 2. La courbe $y = x^4$ (fig. 294) tourne au point O (0, 0), où $y'' = 0$, sa concavité vers le haut, car quand on passe par $x = 0$, la fonction $y'' = 12x^2$ conserve le signe plus.

EXEMPLE 3. Le point O (0, 0), où la dérivée seconde est infinie, est un point d'inflexion de la courbe $y = -x^{\frac{1}{3}}$ (fig. 295), car quand on passe par $x = 0$ la dérivée seconde $y'' = +\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ change son signe du moins en plus. A gauche de O la courbe tourne sa concavité vers le bas, à droite vers le haut.

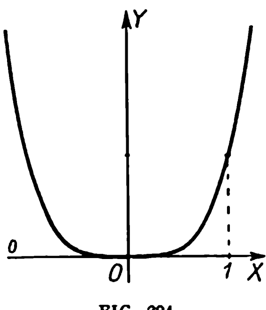


FIG. 294

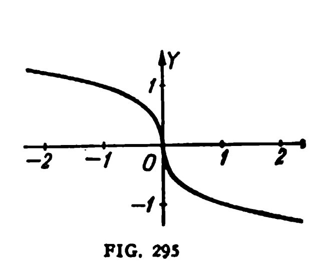


FIG. 295

§ 283. Règle pour rechercher les points d'inflexion

Pour trouver tous les points d'inflexion de la courbe $y = f(x)$, il faut essayer toutes les valeurs de x pour lesquelles la dérivée seconde $f''(x)$ est nulle, infinie ou n'existe pas (ce n'est que ces points qui peuvent être des points d'inflexion; § 282).

Si, en passant par l'une de ces valeurs, la dérivée seconde change de signe, ce point est un point d'inflexion de la courbe. S'il n'y a pas de changement de son signe, il n'y a pas de point d'inflexion (§ 282, 2).

EXEMPLE 1. Trouver les points d'inflexion de la courbe $y = 3x^4 - 4x^3$.

SOLUTION. Nous avons:

$$y'' = 36x^2 - 24x = 12x(3x - 2).$$

La dérivée seconde existe partout et est partout finie; elle s'annule en deux points $x = \frac{2}{3}$ et $x = 0$. Considérons le point $x = \frac{2}{3}$. Si x est un peu inférieur à $\frac{2}{3}$ $\left(\text{notamment, si } 0 < x < \frac{2}{3}\right)$, alors

$$y'' = 12(+)(-) = -;$$

si x est un peu supérieur à $\frac{2}{3}$ $\left(\text{dans ce cas on peut prendre pour } x \text{ tout nombre plus grand que } \frac{2}{3}\right)$, alors

$$y'' = 12(+)(+) = +.$$

Lors du passage par le point $x = \frac{2}{3}$ la dérivée seconde change de signe; donc, le point correspondant de la courbe (le point C sur la fig. 293) est un point d'inflexion. Pour $x = 0$, nous avons également un point d'inflexion (§ 282, exemple 1).

EXEMPLE 2. Trouver les points d'inflexion de la courbe

$$y = x + 2x^4.$$

SOLUTION. Nous avons: $y'' = 24x^2$.

La dérivée seconde est partout finie et ne s'annule qu'au point $x = 0$. Lors du passage par $x = 0$ la dérivée seconde conserve, comme

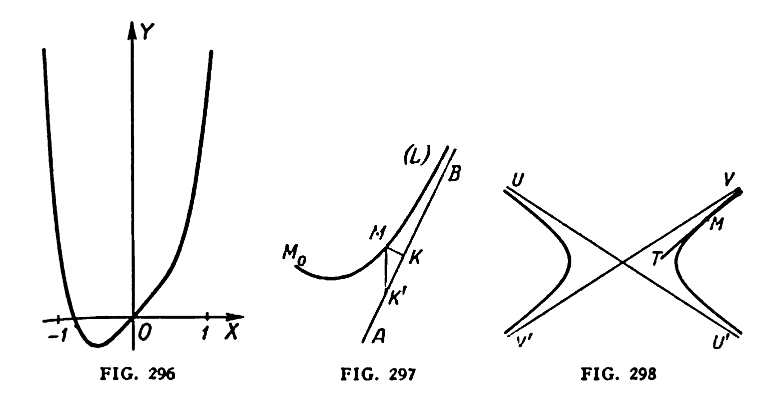


FIG. 296 FIG. 297 FIG. 298

partout, le signe plus. Cela signifie que ce point, pas plus que d'autres points, n'est pas un point d'inflexion. La courbe tourne sa concavité vers le haut (fig. 296).

§ 284. Asymptotes

Supposons que le point M se déplace à partir de la position M_0 le long de la courbe L dans une même direction. Si en outre la distance M_0M (un segment de droite) croît indéfiniment, on dit que le point M *s'éloigne à l'infini*.

DÉFINITION. La droite AB est dite *asymptote* à la courbe L si la distance MK (fig. 297) du point M de la courbe à cette droite tend vers zéro lorsque le point M s'éloigne à l'infini.

REMARQUE 1. La distance de M à AB peut être mesurée non seulement suivant la perpendiculaire, mais aussi suivant une direction arbitraire *constante* MK', car si $MK \to 0$, $MK' \to 0$, et inversement.

REMARQUE 2. La définition donnée au § 46 des asymptotes de l'hyperbole ($U'U$ et $V'V$ sur la fig. 298) répond à la définition générale que nous venons de formuler ici.

REMARQUE 3. Toute courbe sur laquelle le point peut s'éloigner à l'infini n'admet pas nécessairement une asymptote. Ainsi, la parabole et la spirale d'Archimède n'en possèdent pas.

§ 285. Recherche des asymptotes parallèles aux axes de coordonnées

1. *Asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.* Pour rechercher les asymptotes horizontales de la courbe $y = f(x)$ nous cherchons les limites de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$, la droite $y = b$ est une asymptote (fig. 299).

Si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b'$, la droite $y = b'$ est une asymptote (fig. 300).

Si $f(x)$ ne possède pas de limite finie ni quand $x \to +\infty$, ni quand $x \to -\infty$, la courbe $f(x)$ n'a pas d'asymptotes parallèles à l'axe OX.

EXEMPLE 1. Trouver les asymptotes de la courbe $y = 1 + e^x$ qui sont parallèles à l'axe OX.

SOLUTION. Quand $x \to +\infty$, la fonction $1 + e^x$ n'a pas de limite finie $[\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + e^x) = +\infty]$, et quand $x \to -\infty$, elle tend vers 1. C'est pourquoi la droite $y = 1$ est une asymptote (fig. 301).

EXEMPLE 2. Trouver les asymptotes horizontales de la courbe $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

SOLUTION. Nous avons:

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

Les droites $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ sont des asymptotes (fig. 302).

2. *Asymptotes parallèles à l'axe des ordonnées.* Pour rechercher les asymptotes verticales de la courbe $y = f(x)$, il faut trouver les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$ de l'argument x, où $f(x)$ admet une limite infinie (unique ou à droite et à gauche). Les droites $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, ... sont des asymptotes. Si $f(x)$ n'a de limite infinie pour aucune valeur de x, la courbe ne possède pas d'asymptotes verticales.

EXEMPLE 3. Considérons la courbe $y = \ln x$ (fig. 303). La fonction $\ln x$ possède une limite à droite infinie quand $x \to 0$ $(\lim\limits_{x\to+0} \ln x = -\infty)$. La droite $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est une asymptote.

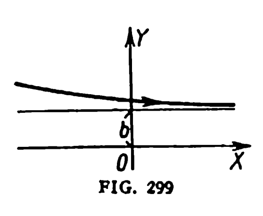


FIG. 299

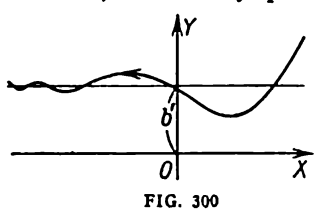


FIG. 300

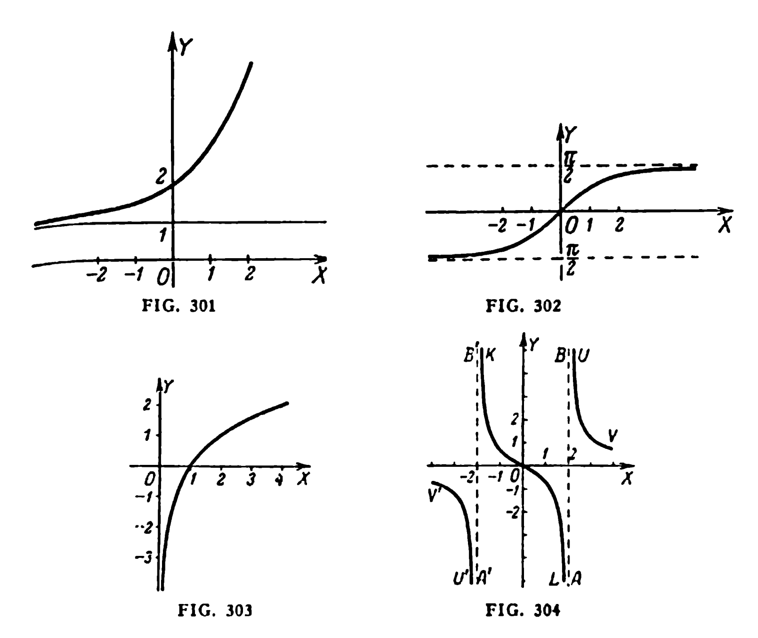


FIG. 301

FIG. 302

FIG. 303

FIG. 304

EXEMPLE 4. Trouver les asymptotes verticales de la courbe

$$y = \frac{2x}{x^2 - 4}.$$

SOLUTION. La fonction $\frac{2x}{x^2-4}$ possède une limite infinie quand $x \to 2$ et $x \to -2$.

Par conséquent, les droites

$$x = 2 \quad \text{et } x = -2$$

(AB et $A'B'$ sur la fig. 304) sont des asymptotes. La droite AB est asymptote aux deux branches UV et KL (car $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{2x}{x^2-4} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{2x}{x^2-4} = -\infty$). Il en est de même pour la droite $A'B'$.

Remarquons que la droite $x = 0$ est une asymptote horizontale (pour les branches UV et $U'V'$) (cf. 1).

§ 286. Recherche des asymptotes non parallèles à l'axe des ordonnées (*)

Pour rechercher les asymptotes de la courbe $y = f(x)$ non parallèles à l'axe OY, il faut d'abord trouver $\lim \frac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$. Si dans les deux cas il n'y a pas de limite finie, il n'y a pas non plus d'asymptotes.

Si par contre $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = c$, il faut ensuite chercher $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - cx]$. Si cette limite est égale à d, la droite $y = cx + d$ est *une asymptote*. D'une manière analogue, si $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = c'$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - c'x] = d'$, la droite $y = c'x + d'$ est *une asymptote*.

Si la grandeur $f(x) - cx$ [ou $f(x) - c'x$] n'a pas de limite finie quand $x \to +\infty$ (ou $x \to -\infty$), l'asymptote correspondante n'existe pas.

L'expression $f(x) - (cx + d)$ donne l'écart vertical LM (fig. 305) de la courbe donnée à son asymptote AB dont l'équation est $y = cx + d$.

Si pour $x \to +\infty$ cette expression conserve, à partir d'un certain moment, le signe plus, le point M est au-dessus de l'asymptote AB (fig. 305, *a*), si elle conserve le signe moins, elle est au-dessous (fig. 305, *b*). S'il y a des changements de signe, le point M oscille autour de l'asymptote (fig. 305, *c*).

Il en est de même pour l'asymptote $y = c'x + d'$.

EXEMPLE 1. Trouver les asymptotes de l'hyperbole

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1. \qquad (1)$$

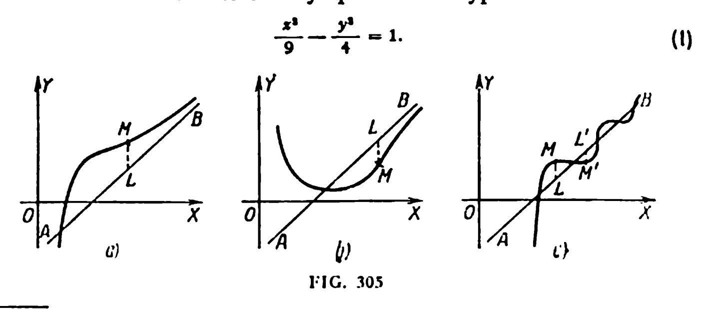


FIG. 305

(*) Le procédé ci-dessous permet en particulier de découvrir des asymptotes horizontales s'il y en a. Mais si seules les asymptotes horizontales nous intéressent, il est plus simple d'appliquer la méthode du § 285, 1. Le procédé ne permet pas de découvrir des asymptotes verticales.

SOLUTION. A l'équation (1) correspondent deux fonctions uniformes

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9} \qquad (2)$$

et

$$y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}. \qquad (3)$$

Considérons la première (il lui correspond les branches infinies AN et $A'K'$ de la fig. 306). Nous avons:

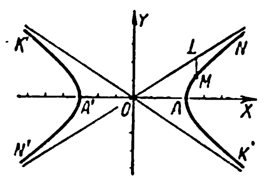


FIG. 306

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-9}}{x} = \frac{2}{3}\ (= c).$$

Par ailleurs,

$$\lim_{x\to+\infty}(y-cx) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x\right) = 0\ (= d).$$

Par conséquent, la droite $y = \frac{2}{3}x$ est asymptote à la branche AN.

L'expression $y-(cx+d) = \frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}-\frac{2}{3}x$ conserve le signe moins quand $x\to+\infty$. C'est pourquoi la branche AN est située au-dessous de l'asymptote.

Nous trouvons ensuite

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -\frac{2}{3}\ (= c'),$$

$$\lim_{x\to-\infty}(y-c'x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x\right) = 0\ (= d').$$

Donc, la droite $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote à la branche $A'K'$.

L'expression $\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}+\frac{2}{3}x$ conserve le signe moins quand $x\to-\infty$. C'est pourquoi la branche $A'K'$ est elle aussi située au-dessous de l'asymptote.

Etudiant de façon analogue la fonction $y = -\frac{2}{3}\sqrt{x^2-9}$ (il lui correspond les branches AK et $A'N'$) nous trouvons que la droite $y = -\frac{2}{3}x$ est asymptote à la branche AK et la droite $y = \frac{2}{3}x$ asymptote à la branche $A'N'$.

Chacune des branches AK, $A'N'$ est située au-dessus de son asymptote

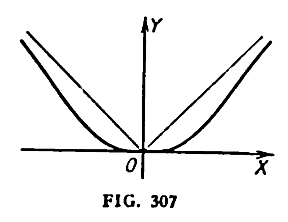


FIG. 307

EXEMPLE 2. Trouver toutes les asymptotes de la courbe

$$y = x\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La fonction $f(x) = x\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ n'a de limite infinie pour aucune valeur de x. Cela signifie qu'elle n'a pas d'asymptotes parallèles à l'axe OY. Pour trouver les asymptotes non parallèles à OY nous cherchons d'abord

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1 \; (= c)$$

et ensuite

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - cx] = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2xe^{-x}}{e^x + e^{-x}} = -\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^{2x} + 1} = 0 \; (= d).$$

Par conséquent, la droite $y = x$ est asymptote à la branche droite infinie. Calculant ces mêmes limites pour $x \to -\infty$ nous trouvons $c' = -1$, $d' = 0$, autrement dit la branche gauche infinie a une asymptote $y = -x$ (fig. 307).

§ 287. Construction des courbes

La courbe d'équation $y = f(x)$ est construite par points que l'on relie ensuite par une ligne régulière. Toutefois si l'on choisit ces points au hasard, on peut commettre de graves erreurs (*).

Pour tracer la courbe avec une grande précision pour un petit nombre de points, il est utile d'élucider au préalable ses particularités. Pour cela il faut:

1. Déterminer dans quel domaine la fonction $f(x)$ est définie et continue. Pour chaque discontinuité infinie tenir compte du signe de $f(x)$ à droite et à gauche; nous obtenons les asymptotes verticales de la courbe (§ 285).

2. Trouver les dérivées première et seconde $f'(x)$, $f''(x)$ et déterminer s'il n'y a pas de points où $f'(x)$ ou $f''(x)$ n'existe pas.

(*) Ainsi, si l'on construit la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}(x + 2)^2(x - 1)^2$ (cf. plus bas fig. 308) par les points F, B, L, K (correspondant aux valeurs de l'argument $-2,5$; $-0,8$; 0; $1,5$) son allure sera absolument fausse sur le tronçon FB.

3. Trouver tous les extréma de la fonction $f(x)$ (§§ 278 et 279), nous obtenons les points supérieurs des bosses et les points inférieurs des creux.

4. Trouver tous les points d'inflexion (§ 283) et la pente de la tangente en ces points.

5. Si le domaine considéré de variation de l'argument est infini, établir s'il n'y a pas d'asymptotes horizontales et obliques (§ 286).

Il est utile de dresser un tableau des résultats obtenus (cf. exemples). En les portant sur un réseau de coordonnées, nous obtenons l'image générale de la courbe. En ajoutant quelques points intermédiaires, nous tracerons celle-ci avec une précision suffisante.

EXEMPLE 1. Construire la courbe d'équation (*)

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3.$$

1. La fonction est définie et continue partout, il n'y a pas d'asymptotes verticales.

2. Trouvons:

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2(5x+4),$$

$$f''(x) = (x-1)(10x^2+16x+1).$$

Les deux dérivées existent partout et sont finies.

3. Pour rechercher les extréma résolvons l'équation $f'(x) = 0$. Nous trouvons les valeurs critiques

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -0{,}8, \qquad x_3 = 1.$$

Portons dans le tableau ces valeurs, ainsi que les valeurs correspondantes de la fonction

$$f(x_1) = 0, \qquad f(x_2) \approx -4{,}20, \qquad f(x_3) = 0.$$

Mettons des zéros pour y'.

Pour étudier les extréma il est ici utile d'appliquer la dérivée seconde, c'est pourquoi nous entreprendrons cette étude au point 4.

4. Pour rechercher les points d'inflexion résolvons l'équation $f''(x) = 0$. Nous retrouvons la valeur $x_3 = 1$, et, en outre,

$$x_4 = -1{,}5; \qquad x_5 = -0{,}07.$$

Portons dans le tableau ces valeurs, ainsi que les valeurs correspondantes de la fonction et de sa dérivée première:

$$f(x_4) = -2{,}0, \qquad f(x_5) = -2{,}3;$$

$$f'(x_4) = -5{,}5, \qquad f'(x_5) = 4{,}0.$$

Mettons des zéros pour y''.

(*) Nous recommandons de dresser le tableau au fur et à mesure des exemples.

Déterminons le signe de $f''(x)$ avant et après le passage par chacune des valeurs

$$x = x_3, \quad x = x_4, \quad x = x_5$$

et introduisons les notations correspondantes dans le tableau. Ainsi, — 0 + dans la troisième ligne de la colonne y'' signifie que $f''(x)$ change son signe du moins en plus en passant par $x = x_3$ de gauche à droite. Comme la dérivée seconde change de signe en chacun des points x_3, x_4, x_5, ils sont tous des points d'inflexion.

Déterminons les signes de $f''(x)$ aux points critiques $x_1 = -2$ et $x_2 = -0{,}8$:

$$f''(-2) < 0, \quad f''(-0{,}8) > 0.$$

Dans la première ligne de la colonne y'' nous écrivons un moins, et dans la seconde un plus. Pour $x = x_1$ nous avons un maximum, pour $x = x_2$ un minimum.

5. Il n'y a pas d'asymptotes horizontales et obliques, car $\lim \frac{y}{x} = \infty$.

Portons (fig. 308) les points trouvés (A, B, C, D, E) sur le réseau et notons les directions des tangentes. En ajoutant encore trois points $x_6 = -2{,}5$, $x_7 = 0$, $x_8 = 1{,}5$ (F, L, K), nous obtenons une courbe assez exacte de la fonction.

Numéro du point	x	y	y'	y''	Extrémum point d'inflexion	Désignation du point
1	-2	0	0	$-$	maximum	A
2	$-0{,}8$	$-4{,}2$	0	$+$	minimum	B
3	1	0	0	$-\ 0\ +$	point d'inflexion	C
4	$-1{,}5$	$-2{,}0$	$-5{,}5$	$-\ 0\ +$	point d'inflexion	D
5	$-0{,}07$	$-2{,}3$	4,0	$+\ 0\ -$	point d'inflexion	E
6	$-2{,}5$	5,4	26			F
7	0	-2	4			L
8	1,5	0,8	5			K

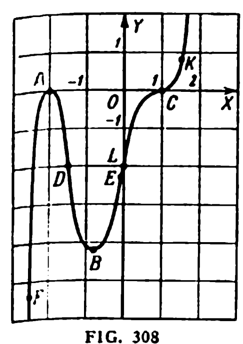


FIG. 308

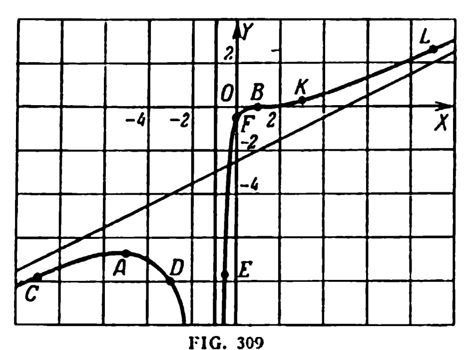


FIG. 309

EXEMPLE 2. Construire la courbe d'équation $y = \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

1. La fonction est définie et continue partout, sauf au point $x = -1$, où elle admet une discontinuité infinie. A droite et à gauche du point de discontinuité la fonction conserve le signe moins (nous portons $-\infty$ dans la colonne y). Nous obtenons l'asymptote $x = -1$. Les deux branches infinies sont dirigées vers le bas (fig. 309).

2. Trouvons:

$$y' = \frac{1}{2}\,\frac{(x-1)^2\,(x+5)}{(x+1)^3}, \qquad y'' = \frac{12(x-1)}{(x+1)^4}.$$

Les deux dérivées existent partout, sauf au point de discontinuité.

3. L'équation $f'(x) = 0$ a deux racines:

$$x_1 = -5, \qquad x_2 = 1.$$

Les valeurs correspondantes de y sont:

$$y_1 = -6{,}75, \qquad y_2 = 0.$$

Nous voyons d'après le signe de $f'(x)$ au voisinage des points critiques (cf. tableau ci-dessous) que le point $x = -5$ est un maximum et le point $x = 1$ n'est pas un point d'extrémum.

4. L'équation $y''(x) = 0$ possède une racine unique $x_2 = 1$; nous voyons d'après le signe de la dérivée seconde (cf. tableau) que c'est un point d'inflexion.

5. Cherchons les asymptotes obliques; pour $x \to +\infty$ comme pour $x \to -\infty$ nous avons

$$\lim \frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \lim\left(y - \frac{1}{2}x\right) = -\frac{5}{2}.$$

Cela signifie que la droite $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ est asymptote aux deux branches infinies de la courbe.

La branche de droite est située au-dessus de son asymptote et celle de gauche au-dessous car l'expression $y - \left(\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)$ conserve le signe plus quand $x \to +\infty$ et le signe moins quand $x \to -\infty$. Cela apparaîtra de la figure quand on aura porté les points C, D, E, F, K, L.

Numéro du point	x	y	y'	y''	Extrémum, point d'inflexion, discontinuités	Désignation du point
1	-1	$-\infty$			discontinuité	
2	-5	$-6{,}75$	$+\ 0\ -$		maximum	A
3	1	0	$+\ 0\ +$	$-\ 0\ +$	point d'inflexion	B
4	-9	$-7{,}81$				C
5	-3	$-8{,}00$				D
6	$-0{,}5$	$-6{,}75$				E
7	0	$-0{,}50$				F
8	3	0,25				K
9	9	2,56				L

§ 288. Résolution des équations. Remarques générales

Les équations algébriques du premier et du second degré se résolvent à l'aide des formules connues de l'algèbre. Pour les équations du troisième et du quatrième degré les formules sont compliquées; l'équation générale du cinquième degré ou d'un degré plus élevé n'est pas résoluble par radicaux. On peut toutefois résoudre une équation tant algébrique que non algébrique avec la précision exigée si l'on trouve au préalable des valeurs approchées quelconques des racines. Ces valeurs sont ensuite de plus en plus précisées.

On peut trouver une solution approchée par l'une des méthodes graphiques suivantes:

PREMIÈRE MÉTHODE. Pour résoudre l'équation $f(x) = 0$, construisons le graphe $y = f(x)$ (cf. § 287) et relevons les abscisses des points en lesquels le graphe coupe l'axe OX.

EXEMPLE 1. Résoudre l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = 0$.

Construisons (fig. 310) le graphe de la fonction $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ et nous relevons les abscisses $x_1 = 1{,}3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4{,}7$. En portant ces valeurs dans l'équation nous voyons que la seconde racine est exacte, et la première et la troisième approchées.

SECONDE MÉTHODE. On peut représenter l'équation $f(x) = 0$ sous la forme $f_1(x) = f_2(x)$, où l'une des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ est arbitraire. Ce fait est utilisé de façon que la construction des courbes $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$ soit la plus facile possible. Trouvons les points d'intersection des graphes. En relevant leurs abscisses nous obtenons les valeurs approchées des racines de l'équation $f(x) = 0$.

EXEMPLE 2. Résoudre l'équation $3x - \cos x - 1 = 0$.

Représentons cette équation sous la forme

$$3x - 1 = \cos x.$$

Construisons (fig. 311) les graphes des fonctions $y = 3x - 1$ et $y = \cos x$. Ils se coupent en un seul point. Nous relevons son abscisse, ce qui nous donne la racine approchée $x_1 = 0{,}6$.

Nous allons exposer aux §§ 289-291 trois méthodes d'approximation des racines. Elles exigent que la racine cherchée $\bar{x}$ soit *séparée*, c'est-à-dire que l'on détermine un intervalle (a, b) dans lequel l'équation donnée ne contient que cette racine. Les extrémités a, b sont elles-mêmes des valeurs approchées de la racine (par défaut et par excès). On peut les trouver par l'une des méthodes graphiques ci-dessus. Plus l'intervalle (a, b) est petit et plus l'approximation est bonne.

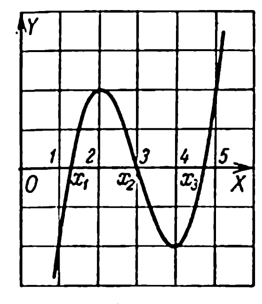


FIG. 310

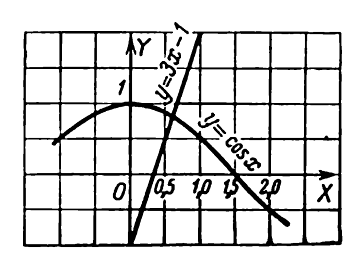


FIG. 311

EXEMPLE 3. Séparer les racines de l'équation $x^3 - 9x^2 + 24x - 18 = 0$.

Nous relevons sur le graphe (fig. 310), s'il a été construit grossièrement, l'intervalle (1, 1,5) de la plus petite racine; lors d'une construction plus précise nous obtenons un intervalle plus étroit, par exemple (1,2, 1,4). Pour la plus grande racine nous obtenons l'intervalle (4,6, 4,8). La racine $x = 3$ n'a pas besoin d'être séparée, elle est exacte.

REMARQUE. Parmi les méthodes spéciales de résolution des équations algébriques, citons celle de Lobatchevski; elle permet de trouver, à l'aide d'opérations algébriques sur les coefficients et avec le degré de précision voulu, toutes les racines, y compris les racines imaginaires.

La méthode de Lobatchevski n'exige pas la séparation des racines.

§ 289. Résolution des équations. Méthode des parties proportionnelles

Supposons qu'aux extrémités de l'intervalle (a, b) la fonction $f(x)$ a des signes contraires (fig. 312). Si en outre la dérivée $f'(x)$ conserve dans l'intervalle (a, b) un signe constant (*), alors à l'intérieur de l'intervalle il existe une seule racine $\bar{x}$ de l'équation $f(x) = 0$ (si $f'(x)$ ne conserve pas son signe, la racine existe, mais peut ne pas être unique).

Prenons comme première approximation de la racine $\bar{x}$ le point $x = x_1$, où la corde AB (fig. 313) coupe l'axe OX:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)\,f(a)}{f(b) - f(a)}, \tag{1}$$

ou, ce qui revient au même (**),

$$x_1 = b - \frac{(b-a)\,f(b)}{f(b) - f(a)}. \tag{2}$$

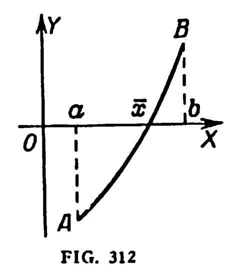


FIG. 312

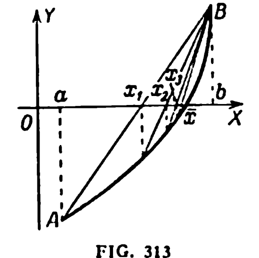


FIG. 313

(*) Autrement dit, le tronçon AB de la courbe est partout croissant ou décroissant.

(**) Sous une forme symétrique $x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$, mais les formules (1) et (2) sont plus commodes pour les calculs.

Nous calculons ensuite $f(x_1)$ et nous prenons celui des intervalles (a, x_1), (x_1, b) aux extrémités duquel $f(x)$ a des signes contraires [l'intervalle (x_1, b) sur la fig. 313]. La racine cherchée se trouve dans cet intervalle. Appliquant une formule analogue à (1), nous obtenons la seconde approximation x_2. Poursuivant ce processus, nous trouvons la suite $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$; elle a pour limite la racine cherchée $\bar{x}$.

Le degré d'approximation peut être déterminé en pratique de la manière suivante. Supposons que l'on exige une précision de 0,01. Nous nous arrêtons alors à l'approximation x_n qui diffère de la précédente de moins de 0,01. Il peut d'ailleurs s'avérer (bien que cela soit peu probable) que la précision soit insuffisante. Pour l'éviter on s'assure que les signes de $f(x_n)$ et $f(x_n \pm 0{,}01)$ sont contraires.

Exemple. La fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7$ a des signes contraires aux extrémités de l'intervalle (3, 4):

$$f(3) = -10 < 0, \qquad f(4) = 9 > 0.$$

La dérivée $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4$ conserve dans l'intervalle (3, 4) le signe plus. Cela signifie qu'à l'intérieur de l'intervalle (3, 4) se trouve une racine de l'équation

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0.$$

Trouvons cette racine avec une précision de 0,01. La formule (1) donne:

$$x_1 = 3 - \frac{1 \cdot (-10)}{9 - (-10)} = 3 + \frac{10}{19} \approx 3{,}53.$$

Calculons maintenant:

$$f(3{,}53) \approx -2{,}05.$$

Choisissons le second des intervalles (3, 3,53), (3,53, 4) car à ses extrémités la fonction $f(x)$ a des signes contraires.

Trouvons la seconde approximation:

$$x_2 = 3{,}53 - \frac{0{,}47 \cdot f(3{,}53)}{f(4) - f(3{,}53)} \approx 3{,}53 + \frac{0{,}47 \cdot 2{,}05}{11{,}05} = 3{,}62.$$

La valeur

$$f(3{,}62) = -0{,}24$$

est négative, c'est pourquoi nous prenons l'intervalle (3,62, 4). Trouvons:

$$x_3 \approx 3{,}62 + \frac{0{,}38 \cdot 0{,}24}{9{,}24} = 3{,}63$$

et

$$f(3{,}63) = -0{,}04.$$

Les calculs nous autorisent à penser que x_4 diffère de x_3 de moins de 0,01 et que x_3 donne l'approximation désirée.

Etant donné que pour avoir une garantie complète nous devons de toute façon calculer $f(3{,}64)$, nous ne déterminerons pas x_4 et calculerons d'emblée

$$f(3{,}64) = 0{,}17.$$

Les signes de $f(3{,}63)$ et $f(3{,}64)$ sont contraires. Donc x_3 est l'approximation désirée.

REMARQUE. La méthode des parties proportionnelles, de même que toutes les autres méthodes des approximations successives, « ne craint pas les erreurs »: une erreur commise lors d'un calcul intermédiaire est automatiquement corrigée dans le pas suivant. Le dernier pas doit bien entendu être réalisé minutieusement. Pour éviter des erreurs d'arrondissement il convient de conserver les chiffres de réserve.

§ 290. Résolution des équations. Méthode de Newton

Supposons que la fonction $f(x)$ ait des signes contraires aux extrémités de l'intervalle (a, b) (fig. 314 et 315) et que les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$ conservent dans cet intervalle un signe constant (*). Pour rechercher la racine $\bar{x}$ située dans l'intervalle (a, b) (§ 289) nous procédons ainsi:

A l'extrémité de l'arc AB où les signes de $f(x)$ et $f''(x)$ sont identiques (**) menons la tangente (BK sur la fig. 314, AL sur la fig. 315).

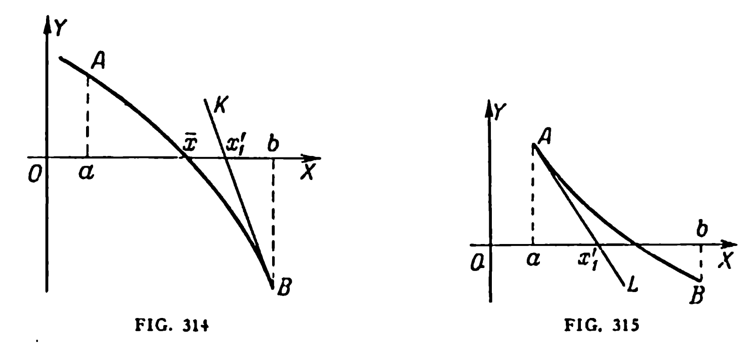


FIG. 314 FIG. 315

(*) Autrement dit, le tronçon AB de la courbe est partout croissant ou partout décroissant et tourne sa concavité partout vers le haut ou partout vers le bas.

(**) C'est-à-dire à l'extrémité supérieure si AB tourne sa concavité vers le haut, et à l'extrémité inférieure s'il la tourne vers le bas.

Prenons pour première approximation de la racine cherchée le point $x = x_1'$ (*) où la tangente coupe l'axe OX.

Si la tangente est prise au point $x = b$, alors

$$x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}, \quad (1)$$

si par contre elle est prise au point $x = a$, alors

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \quad (2)$$

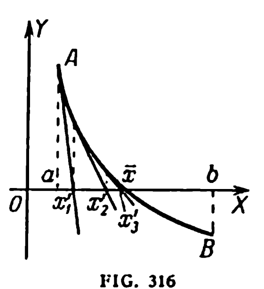


FIG. 316

Dans les deux cas la seconde approximation est trouvée d'après la formule

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}. \quad (3)$$

Poursuivant ce processus nous trouverons la suite x_1', x_2', x_3', ... (fig. 316). Elle a pour limite la racine cherchée $\bar{x}$. Le degré d'approximation peut être déterminé de la même manière que pour la méthode des parties proportionnelles.

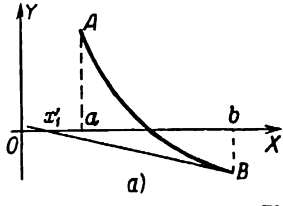
REMARQUE 1. Si l'on mène la tangente à l'extrémité de l'arc où $f(x)$ et $f''(x)$ sont de signes contraires, x_1' peut sortir des limites de l'intervalle (a, b) et détériorer l'approximation (fig. 317, *a*).

REMARQUE 2. Si $f''(x)$ ne conserve pas son signe dans l'intervalle (a, b), les tangentes aux deux extrémités de l'arc peuvent couper OX à l'extérieur de cet intervalle (fig. 317, *b*).

EXEMPLE. Calculer à 0,01 près la racine de l'équation

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0,$$

contenue (cf. exemple § 289) dans l'intervalle (3, 4).



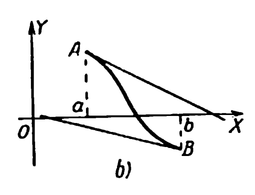


FIG. 317

(*) Les notations x_1', x_2', ... permettent de distinguer les approximations d'après la méthode de Newton de celles données par la méthode des parties proportionnelles.

Solution. Nous avons:

$$f(3) = -10; \quad f(4) = 9;$$
$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4; \quad f''(x) = 6x - 4.$$

Les deux dérivées conservent dans l'intervalle (3, 4) le signe plus. C'est pourquoi nous prenons l'extrémité de l'intervalle considéré où $f(x) > 0$, c'est-à-dire l'extrémité $b = 4$. Trouvons d'après la formule (1) la première approximation:

$$x_1' = 4 - \frac{f(4)}{f'(4)} = 4 - \frac{9}{28} \approx 3,68.$$

Trouvons ensuite:

$$f(3,68) = 1,03, \quad f'(3,68) = 21,9$$

et, en vertu de la formule (3), obtenons la seconde approximation

$$x_2' = 3,68 - \frac{f(3,68)}{f'(3,68)} = 3,68 - 0,047 = 3,633 \text{ (par excès)}.$$

Les approximations suivantes seront de plus en plus petites, et les calculs donnent à penser que la précision ultérieure n'influera pas sur le chiffre des centièmes. C'est pourquoi nous ne calculerons que $f(3,633)$ et $f(3,630)$. Le calcul donne

$$f(3,633) = 0,020; \quad f(3,630) = -0,042,$$

de sorte que (avec une précision trois fois supérieure à celle exigée) $\bar{x} = 3,63$.

§ 291. Méthode combinée

Quand les conditions du § 290 sont vérifiées, les approximations x_n (méthode des parties proportionnelles) et x_n' (méthode de Newton) tendent vers la racine $\bar{x}$ de deux côtés opposés (les premières du côté de la concavité, les secondes du côté de la convexité du graphique; cf. fig. 318). L'application simultanée de ces deux méthodes permet d'obtenir des approximations par excès et par défaut et le degré de précision peut être estimé immédiatement.

Soit a l'extrémité de l'intervalle (a, b) où les signes de $f(x)$ et $f''(x)$ sont identiques. Nous trouvons alors d'après les formules (1) § 289 et (2) § 290 (*):

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b)-f(a)}, \quad x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)}. \tag{1}$$

(*) Dans le cas où les signes de $f(x)$ et $f''(x)$ sont identiques à l'extrémité b, la seconde formule est remplacée par la formule $x_1' = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

La racine cherchée est comprise entre x_1 et x_1'. De plus $f(x_1')$ a le même signe que $f''(x_1')$ (cf. fig. 318). Par conséquent, nous pouvons de nouveau appliquer les formules (1) du présent paragraphe en remplaçant a par x_1' et b par x_1. Nous obtenons les secondes approximations:

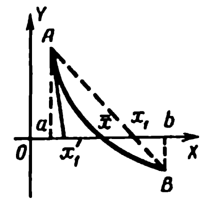


FIG. 318

$$x_2 = x_1' - \frac{(x_1 - x_1')f(x_1')}{f(x_1) - f(x_1')},$$

$$x_2' = x_1' - \frac{f(x_1')}{f'(x_1')}.$$

Pour calculer x_3 nous appliquons les mêmes formules, en remplaçant x_1 et x_1' par x_2 et x_2', etc. En poursuivant ce processus nous trouverons $\bar{x}$ avec la précision exigée.

EXEMPLE. Résoudre l'équation $2^x = 4x$.

Conformément à la seconde méthode du § 288, nous construisons les graphes $y = 2^x$ et $y = 4x$ (fig. 319). Outre le point A, qui nous donne la racine exacte $x = 4$, nous obtenons un seul point d'intersection B. Son abscisse $\bar{x}$ est comprise entre $a = 0$ et $b = 0{,}5$.

Calculons $\bar{x}$ à 0,0001 près. Nous avons:

$$f(x) = 2^x - 4x, \qquad f'(x) = 2^x \ln 2 - 4,$$

$$f''(x) = 2^x \ln^2 2, \qquad f(0) = 1, \qquad f(0{,}5) = -0{,}586.$$

La dérivée première conserve dans l'intervalle (0, 0,5) le signe moins (*), la dérivée seconde le signe plus. Pour calculer x_1' il faut prendre l'extrémité $a = 0$, car en ce point les signes de $f(x)$ et $f''(x)$ sont identiques. Trouvons:

$$x_1 = a - \frac{(b-a)f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0{,}5 \cdot 1}{0{,}586 + 1} \approx$$

$$\approx 0{,}316 \text{ (par excès)},$$

$$x_1' = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = -\frac{1}{\ln 2 - 4} =$$

$$= \frac{-1}{0{,}69315 - 4} \approx 0{,}302 \text{ (par défaut)}.$$

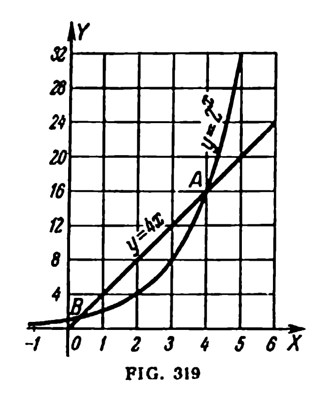


FIG. 319

(*) On voit de la figure que dans l'intervalle (0, 0,5) la pente de la courbe $y = 2^x$ est plus petite que celle de la courbe $y = 4x$.

Obtenons à l'aide des tables de logarithmes à cinq décimales

$$f(0{,}302) = 0{,}0249, \qquad f'(0{,}302) = -3{,}14544,$$
$$f(0{,}316) = -0{,}0191.$$

Cela donne les secondes approximations:

$$x_2 = 0{,}302 - \frac{0{,}014 \cdot f(0{,}302)}{f(0{,}316) - f(0{,}302)} = 0{,}302 + 0{,}0079 = 0{,}3099 \text{ (par excès)},$$

$$x_2' = 0{,}302 - \frac{f(0{,}302)}{f'(0{,}302)} = 0{,}302 + 0{,}0079 = 0{,}3099 \text{ (par défaut)}.$$

La racine cherchée $\bar{x}$ est comprise dans l'intervalle (x_2', x_2) et c'est pourquoi on a, à moins de $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ près, $\bar{x} = 0{,}3099$. En réalité, la précision est encore plus élevée (en utilisant les tables de logarithmes à sept décimales nous obtenons pour $\bar{x}$, pour les mêmes valeurs de x_1, x_1', les limites 0,30990 et 0,30991).

Calcul intégral

§ 292. Remarques préliminaires

1. HISTORIQUE. Le calcul intégral est né de la nécessité d'élaborer une méthode générale de calcul des aires, des volumes et des centres de gravité.

Archimède avait déjà appliqué les rudiments de cette méthode. Au XVII[e] siècle elle a été systématiquement développée dans les travaux de Cavalieri, Torricelli, Fermat, Pascal et d'autres savants. En 1659 Barrow a établi le lien entre le problème de calcul des aires et celui de recherche des tangentes. Un peu plus tard Newton et Leibniz ont fait abstraction de ce lien et ont ainsi établi la relation entre le calcul différentiel et le calcul intégral (cf. plus bas).

Cette liaison fut utilisée par Newton, Leibniz et leurs élèves pour développer les procédés d'intégration. Les méthodes d'intégration ont atteint leur niveau actuel principalement dans les travaux d'Euler. Les travaux d'Ostrogradski et de Tchébicheff ont parachevé leur développement.

2. NOTION D'INTÉGRALE. Soit

$$y = f(x)$$

l'équation de la courbe MN (fig. 320). Trouver l'aire F du « trapèze mixtiligne » $aABb$.

Divisons le segment ab en n parties ax_1, x_1, x_2, ..., $x_{n-1}\,b$ (égales ou non égales) et construisons la figure en escalier hachurée sur la fig. 320. Son aire est égale à

$$F_n = y_0(x_1 - a) + y_1(x_2 - x_1) + \ldots + y_{n-1}(b - - x_{n-1}). \quad (1)$$

Si l'on introduit les notations

$$x_1 - a = dx_0,\ x_2 - x_1 = dx_1, \ldots, b - x_{n-1} = dx_{n-1}, \quad (2)$$

la formule (1) s'écrira

$$F_n = y_0 dx_0 + y_1 dx_1 + \ldots + y_{n-1} dx_{n-1}. \quad (3)$$

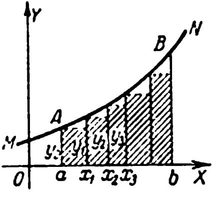


FIG. 320

L'aire cherchée est la limite de la somme (3) quand n est infiniment grand. Leibniz introduisit pour cette limite la notation

$$\int y\,dx, \tag{4}$$

où le symbole $\int$ est la première lettre (stylisée) du mot latin *summa* (somme), et l'expression $y\,dx$ indique la forme typique des termes (*).

Leibniz appela l'expression $\int y\,dx$ *intégrale* (du lat. *integer*, entier)(**).

Fourier perfectionna la notation de Leibniz en lui donnant la forme

$$\int\limits_a^b y\,dx. \tag{5}$$

Ici on indique également les valeurs initiale et finale de x.

3. Relation entre l'intégration et la dérivation. Soient a une grandeur constante et b une grandeur variable. Remplaçons la notation b par $\bar{x}$. L'intégrale

$$\int\limits_a^{\bar{x}} f(x)\,dx$$

(c'est-à-dire l'aire $aABb$ pour une ordonnée fixe aA et une ordonnée variable bB) sera une fonction de $\bar{x}$. Il s'avère que la différentielle de cette fonction est égale à $f(\bar{x})\,d\bar{x}$(***)

$$d\int\limits_a^{\bar{x}} f(x)\,dx = f(\bar{x})\,d\bar{x}. \tag{6}$$

(*) La notion de limite n'était pas encore élaborée et Leibniz parlait de la somme d'un nombre infini de termes.

(**) Cette appellation avait été proposée par l'élève de Leibniz Jean Bernoulli pour distinguer « la somme d'un nombre infini de termes » d'une somme ordinaire.

(***) Cela ressort de la fig. 321. L'accroissement ΔF de l'aire du trapèze $aABb$ est l'aire à $bBCc$. On peut représenter cette dernière sous forme de la somme aire $bBDc$ + aire BDC. Le premier terme est égal $bB \cdot bc = f(\bar{x})\Delta\bar{x}$ et le second est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\bar{x}$ (il est inférieur à l'aire $BDCK = \Delta\bar{x}\Delta y$). Donc (§ 228) $f(\bar{x})\Delta\bar{x}$ est la différentielle de l'aire F.

FIG. 321

4. Problème fondamental du calcul intégral. Le calcul de l'intégrale (5) se ramène ainsi à la *recherche d'une fonction d'après l'expression de sa différentielle.* La recherche de cette fonction constitue le problème fondamental du calcul intégral.

§ 293. Fonction primitive

Définition. Soit $f(x)$ la dérivée de la fonction $F(x)$, autrement dit $f(x)\,dx$ est la différentielle de la fonction $F(x)$:

$$f(x)\,dx = dF(x).$$

La fonction $F(x)$ est alors appelée la *primitive* de la fonction $f(x)$.

Exemple 1. La fonction $3x^2$ est la dérivée de x^3, autrement dit $3x^2\,dx$ est la différentielle de la fonction x^3:

$$3x^2\,dx = d(x^3).$$

Par définition la fonction x^3 est la fonction primitive de la fonction $3x^2$.

Exemple 2. L'expression $3x^2\,dx$ est la différentielle de la fonction $x^3 + 7$:

$$3x^2\,dx = d(x^3 + 7).$$

Par conséquent, la fonction $x^3 + 7$ (de même que la fonction x^3) est une primitive de la fonction $3x^2$.

Toute fonction continue $f(x)$ possède une infinité de primitives. Si $F(x)$ est l'une d'entre elles, n'importe quelle autre est représentée par l'expression $F(x) + C$, où C est une constante. Cette dernière peut être donnée arbitrairement.

Exemple 3. La fonction $3x^2$ possède une infinité de primitives. L'une d'elles (cf. exemple 1) est x^3, n'importe quelle autre est représentée par l'expression $x^3 + C$, où C est une constante. Pour $C = 7$ nous obtenons la primitive $x^3 + 7$ (exemple 2), quand $C = 0$ nous obtenons de nouveau la primitive x^3.

Exemple 4. L'une des primitives de $3x^2$ est $x^3 + 7$. Toute autre primitive est représentée par l'expression $x^3 + 7 + C$. Quand $C = -7$ nous obtenons la primitive x^3.

Avertissement. Toute primitive de la fonction $3x^2$ peut être mise sous la forme $x^3 + C$ ou sous la forme $x^3 + 7 + C$. Toutefois ces expressions *ne peuvent être égalées*, car les constantes C qui y figurent ne sont pas les mêmes. Par exemple, la première expression donne ${}^3x + 10$ quand $C = 10$ et la seconde quand $C = 3$.

Si en dépit de l'avertissement nous égalons $x^3 + C$ et $x^3 + 7 + C$, nous obtenons l'égalité absurde $0 = 7$. On peut toutefois écrire

$$x^3 + C = x^3 + 7 + C_1,$$

où C et C_1 sont des constantes. Elles sont liées par la relation

$$C = C_1 + 7.$$

§ 294. Intégrale indéfinie

On appelle *intégrale indéfinie* de l'expression donnée $f(x)\,dx$ [ou de la fonction donnée $f(x)$] la forme la plus générale de sa fonction primitive.

L'intégrale indéfinie de l'expression $f(x)\,dx$ est notée

$$\int f(x)\,dx.$$

On sous-entend que le terme constant est inclus dans cette notation.

La provenance du symbole $\int$ et l'appellation « intégrale » ont été expliquées au § 292. Le mot « indéfinie » souligne le fait que l'expression générale de la fonction primitive contient un terme constant que l'on peut choisir arbitrairement (*).

L'expression $f(x)\,dx$ est appelée *expression sous le signe somme*, la fonction $f(x)$ *fonction à intégrer*, la variable x *variable d'intégration*. La recherche de l'intégrale indéfinie de la fonction donnée est appelée *intégration* (**).

EXEMPLE 1. La forme la plus générale de la fonction primitive de l'expression $2x\,dx$ est $x^2 + C$. Cette fonction est l'intégrale indéfinie de l'expression $2x\,dx$:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C. \qquad (1)$$

On peut également écrire:

$$\int 2x\,dx = x^2 - 5 + C_1. \qquad (2)$$

La différence dans les notations des constantes (C et C_1) souligne le fait qu'elles ne sont pas identiques ($C = C_1 - 5$; cf. § 293, avertissement).

EXEMPLE 2. Trouver l'intégrale indéfinie de l'expression $\cos x\,dx$.

(*) A la différence de l'intégrale indéfinie, la limite de la somme $y_0\,dx_0 + y_1 dx_1 + \ldots + y_{n-1}dx_{n-1}$ (§ 292, 2) est appelée *intégrale définie*. L'intégrale indéfinie est une *fonction*, l'intégrale définie est un *nombre*.

(**) On appelle également intégration la recherche de l'intégrale définie.

SOLUTION. La fonction cos x est la dérivée de sin x. C'est pourquoi

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C.$$

EXEMPLE 3. Trouver l'intégrale indéfinie de l'expresion $\frac{dx}{x}$.

SOLUTION. La fonction $\frac{1}{x}$ est discontinue pour $x = 0$. Considérons d'abord les valeurs positives de x. Comme $d(\ln x) = \frac{dx}{x}$, nous avons

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad (3)$$

Comme $d(\ln 3x) = \frac{dx}{x}$, nous pouvons également écrire:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln 3x + C_1. \quad (4)$$

Les constantes C et C_1 sont liées par la relation

$$C = \ln 3 + C_1.$$

On peut écrire de même:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln \frac{x}{7} + C_2, \quad (5)$$

c. Pour les valeurs négatives de x la fonction ln x n'est pas définie, les formules (3), (4), (5) ne sont pas valables. Par contre la fonction (— x) est définie: sa différentielle est aussi égale à $\frac{dx}{x}$. Nous avons aintenant:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C \quad (6)$$

d'une manière analogue:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-2x) + C_1, \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln\left(-\frac{x}{5}\right) + C_2.$$

On peut réunir les formules (3) et (6):

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \quad (7)$$

formule (7) est valable pour toutes les valeurs de x, excepté $x = 0$ § 295, exemple 3).

§ 295. Interprétation géométrique de l'intégration

Soient $f(x)$ une fonction continue donnée et $F(x)$ une primitive quelconque. Si l'on construit la courbe représentative PQ de la fonction $y = F(x)$ (fig. 322), le coefficient angulaire de la tangente MT s'exprime par la fonction donnée $f(x)$.

Soit $F_1(x)$ une autre primitive de cette même fonction $f(x)$. Les coefficients angulaires des tangentes MT et M_1T_1 (les points de tangence M, M_1 ont la même abscisse x) sont identiques, autrement dit MT est parallèle à M_1T_1.

Le graphe de la fonction primitive $F(x)$ est appelé *courbe intégrale* de la fonction $f(x)$ [ou de l'équation $dy = f(x)\ dx$]. Les tangentes à deux courbes intégrales aux points correspondants sont parallèles. Par ailleurs, la distance (suivant la verticale) entre deux courbes intégrales est une constante C ($M\,M_1$ sur la fig. 322), de sorte que si l'on dispose d'une courbe intégrale, il est facile de construire les autres.

Il y a une courbe intégrale et une seule passant par un point donné.

On peut construire (approximativement) les courbes intégrales de la manière suivante. Menons par quelques dizaines de points (cf., par exemple, fig. 323) d'une partie du plan de courts segments (ou des flèches) indiquant la direction de la tangente.

Nous obtenons un « champ de directions ». Menons au jugé une courbe régulière de sorte qu'en divers points elle soit tangente aux flèches. Nous obtenons une courbe intégrale. Procédons de même pour d'autres courbes intégrales.

EXEMPLE 1. Trouver les courbes intégrales de l'équation

$$dy = dx.$$

Dans l'exemple considéré la fonction $f(x)$ est la grandeur constante 1. Le coefficient angulaire de toutes les flèches est égal à l'unité, autrement dit la pente de la tangente est partout égale à 45°. Les courbes inté-

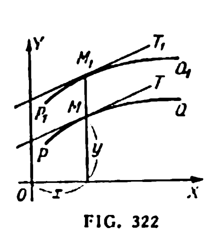


FIG. 322

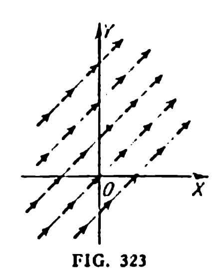


FIG. 323

grales (fig. 323) sont des droites parallèles. L'équation de chacune d'elles est $y = \int dx$, c'est-à-dire $y = x + C$. La grandeur C est constante pour chaque droite et varie d'une droite à l'autre.

Exemple 2. Trouver les courbes intégrales de la fonction $\frac{1}{2}x$ $\left(\text{autrement dit de l'équation } dy = \frac{1}{2}x\,dx\right)$.

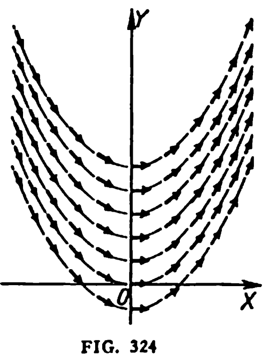


FIG. 324

Prenons le long de l'axe $OY(x = 0)$ des flèches horizontales $\left(\frac{1}{2}x = 0\right)$, le long de l'ordonnée $x = 1$ des flèches de coefficient angulaire $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$, etc. Traçant au jugé les courbes intégrales, nous obtenons des paraboles « parallèles » $\left(y = \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + C\text{; fig. 324}\right)$.

Exemple 3. On a indiqué sur la fig. 325 les courbes intégrales de la fonction $y = \frac{1}{x}$. Aucune d'elles ne coupe l'axe OY, car pour

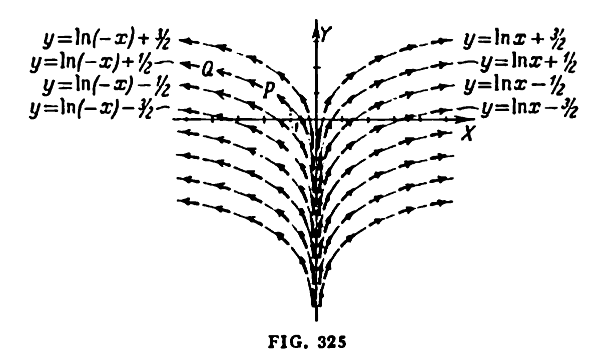


FIG. 325

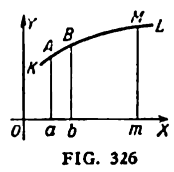


FIG. 326

$x = 0$ les primitives de la fonction ne sont pas définies (la fonction $\frac{1}{x}$ est discontinue pour $x = 0$). Cela fait que seules les courbes intégrales situées d'un même côté de l'axe des ordonnées sont équidistantes. Les courbes situées à droite sont représentées par l'équation $y = \ln x + C$, celles situées à gauche par l'équation $y = \ln(-x) + C$. L'intégrale indéfinie $\int \frac{dx}{x}$ est représentée (pour tous les x différents de zéro) par la formule

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C.$$

REMARQUE. Une autre interprétation géométrique de l'intégration suppose que l'on trace le graphe KL (fig. 326) de la fonction donnée $f(x)$. Supposons que l'arc KL soit entièrement situé au-dessus de l'axe OX. Menons deux ordonnées aA et mM et admettons que l'ordonnée de gauche aA soit fixe et l'ordonnée de droite mM variable. L'aire $aAMm$ sera l'une des primitives de la fonction $f(x)$ de l'argument $x = Om$ (cf. § 292, 2). Prenant au lieu de aA l'ordonnée fixe bB, nous obtenons une autre primitive, l'aire $bBMm$. Ces deux primitives diffèrent d'une grandeur constante $C =$ aire $aABb$.

§ 296. Calcul de la constante d'intégration d'après les données initiales

Parmi l'infinité de primitives de la fonction considérée $f(x)$ une seule peut prendre une valeur donnée b pour une valeur donnée a de l'argument $x = a$. Si l'on connaît l'intégrale indéfinie

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

la valeur correspondante de la constante C est trouvée à partir de la relation

$$b = F(a) + C.$$

EXEMPLE 1. Trouver la primitive de la fonction $\frac{1}{2}x$ qui prend la valeur 3 pour $x = 2$.

SOLUTION. Nous avons:

$$\int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}x^2 + C. \qquad (1)$$

Nous trouvons la constante C de la relation $3 = \frac{1}{4} \cdot 2^2 + C$. Nous obtenons $C = 2$. Portant dans (1) nous trouvons la fonction primitive cherchée

$$y = \frac{1}{4} x^2 + 2. \tag{2}$$

Le problème peut être formulé géométriquement de la manière suivante: trouver la courbe intégrale de la fonction $\frac{1}{2} x$ qui passe par le point (2, 3). La courbe cherchée est la parabole UV (fig. 324).

EXEMPLE 2. Trouver la primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ qui prend la valeur $\frac{1}{2}$ pour $x = -1$.

SOLUTION. Pour les valeurs négatives de x l'intégrale indéfinie de la fonction $\frac{1}{x}$ (§ 294, exemple 3) est de la forme

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C. \tag{3}$$

Nous avons par hypothèse:

$$\frac{1}{2} = \ln 1 + C, \tag{4}$$

d'où

$$C = \frac{1}{2}.$$

La fonction cherchée est $\ln(-x) + \frac{1}{2}$. Il lui correspond la courbe intégrale PQ sur la fig. 325.

§ 297. Propriétés de l'intégrale indéfinie

1. Le signe de la différentielle placé devant le signe somme élimine ce dernier:

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx \tag{1}$$

(en vertu de la définition de l'intégrale indéfinie).

En d'autres termes, la dérivée d'une intégrale indéfinie est égale à la fonction à intégrer

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x). \tag{2}$$

Exemple.

$$d\int 2x\,dx = d(x^2 + C) = 2x\,dx, \tag{1a}$$

$$\frac{d}{dx}\int 2x\,dx = 2x.$$

2. Le signe somme placé devant le signe de la différentielle élimine ce dernier, mais il faut alors introduire un terme constant arbitraire.

Exemple.

$$\int d\sin x = \sin x + C. \tag{3}$$

3. On peut sortir un facteur constant de sous le signe somme:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx. \tag{4}$$

Exemple.

$$\int 6x\,dx = 6\int x\,dx = 6\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right) = 3x^2 + 6C = 3x^2 + C_1,$$

où

$C_1 = 6C.$

4. L'intégrale d'une somme algébrique est égale à la somme des intégrales des termes. Pour trois termes nous avons

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx; \tag{5}$$

il en est de même pour un nombre quelconque (mais fixe) de termes.

Exemple.

$$\int(5x^2 - 2x + 4)\,dx = \int 5x^2\,dx - \int 2x\,dx + \int 4dx = \left(\frac{5}{3}x^3 + C_1\right) -$$

$$-(x^2 + C_2) + (4x + C_3) = \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4x + C,$$

où

$$C = C_1 - C_2 + C_3.$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire d'écrire lors des calculs intermédiaires le terme constant de chaque intégrale; il suffit de l'ajouter quand toutes les intégrations sont effectuées.

§ 298. Tableau d'intégrales usuelles

En inversant la formule de dérivation, nous obtenons la formule correspondante d'intégration. Ainsi de la formule

$$d \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

nous obtenons la formule (*)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C. \tag{2}$$

Des dix formules que nous rapportons plus bas, les neuf premières s'obtiennent en inversant les formules principales de dérivation, la dixième coïncide avec (2). Elle est établie dans l'exemple 1 § 312.

I. $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1),$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$ (**),

III. $\int e^x dx = e^x + C,$

IIIa. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$

IV. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C,$

V. $\int \cos x \, dx = \sin x + C.$

VI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C,$

VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$

VIII. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C,$

VIIIa. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$

IX. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C,$

(*) La grandeur $x + \sqrt{a^2 + x^2}$ est positive puor tout x, de sorte que dans (2) nous n'écrivons pas $\ln |x + \sqrt{a^2 + x^2}|$.

(**) Cf. § 294, exemple 3.

IXa. $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C,$$

X. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

On doit apprendre ces formules par cœur (dans les trois couples de formules III, VIII, IX, il suffit de retenir une seule, de préférence celle qui est affectée de l'indice « a »).

Dans la formule IXa, à la différence de VIIIa, l'arc est précédé du facteur $\frac{1}{a}$. Ce fait est lié à la *dimension* de l'expression $\frac{dx}{a^2 + x^2}$: au numérateur figure le premier degré de la grandeur dx, au dénominateur les seconds degrés de a et de x. La dimension est ainsi — 1; le second nombre a aussi la même dimension grâce au facteur $\frac{1}{a}$.

L'expression $\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ dans la formule VIIIa possède la dimension zéro, de même que le second membre.

REMARQUE 1. Nous recommandons d'apprendre par cœur les formules I-X au fur et à mesure que vous les rencontrez dans les exercices. Il serait bon si vous retenez les cinq autres formules (*):

XI. $$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C,$$

XII. $$\int \operatorname{cotg} x \, dx = \ln |\sin x| + C,$$

XIII. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

XIV. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

XV. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

REMARQUE 2. On peut également écrire les intégrales XIII et XIV sous la forme suivante:

XIIIa. $$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln |\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x| + C,$$

XIVa. $$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln |\sec x - \operatorname{tg} x| + C.$$

Leur lien réciproque devient plus visible, mais pour les calculs les formes XIII et XIV sont plus commodes.

(*) Elles sont toutes, de même que les formules de l'Annexe (pp. 834-844), établies à partir des formules I-X conformément aux règles exposées aux §§ 300-302.

§ 299. Intégration immédiate

En utilisant les propriétés 3 et 4 du § 297, on peut, en certains cas, effectuer l'intégration directement à partir du tableau du § 298.

EXEMPLE 1.

$$\int (3\sqrt{x} - 4x)\,dx = 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 4\int x\,dx = 3\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4\,\frac{x^2}{2} + C = 2x\sqrt{x} - 2x^2 + C.$$

Lors de la première transformation on a utilisé les propriétés du § 297, lors de la seconde la formule I du tableau. On introduit la constante C dès que le signe somme disparaît.

EXEMPLE 2.

$$\int (2 \sin t - 3 \cos t)\,dt = 2\int \sin t\,dt - 3\int \cos t\,dt = -2 \cos t - 3 \sin t + C$$

(on a utilisé les formules IV et V).

EXEMPLE 3.

$$\int \frac{\sin^3\varphi + 1}{\sin^2\varphi}\,d\varphi = \int \sin\varphi\,d\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi} = -\cos\varphi - \operatorname{cotg}\varphi + C$$

(on a utilisé les formules IV et VI).

EXEMPLE 4.

$$\int (x^2 + 1)^4 x^3\,dx = \int (x^{11} + 4x^9 + 6x^7 + 4x^5 + x^3)\,dx = \frac{1}{12}x^{12} + \frac{2}{5}x^{10} +$$
$$+ \frac{3}{4}x^8 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^4 + C.$$

§ 300. Procédé de substitution (intégration par changement de variable)

On peut remplacer x dans l'expression sous le signe somme $f(x)\,dx$ par une variable auxiliaire z, liée à x par une certaine relation (*). Supposons que l'on obtient par transformation $f_1(z)\,dz$ (**); alors $\int f(x)\,dx = \int f_1(z)\,dz$. Si l'intégrale $\int f_1(z)\,dz$ est une intégrale usuelle ou peut être ramenée à une intégrale du tableau plus facilement que l'intégrale initiale, la transformation a atteint son but.

(*) On suppose que la fonction $x = \varphi(z)$ exprimant cette relation possède une dérivée continue.

(**) Nous avons $f_1(z)\,dz = f[\varphi(z)]\,\varphi'(z)\,dz$.

Il n'existe pas de règle générale permettant de faire adéquatement la substitution (cf. § 309); des règles pour les cas particuliers importants sont données plus bas en fonction des exemples rapportés.

EXEMPLE 1. $\int \sqrt{2x-1}\, dx$.

Cette intégrale ne figure pas dans le tableau, mais on peut calculer d'après la formule I l'intégrale $\int \sqrt{x}\, dx$, semblable à celle que nous désirons calculer. C'est pourquoi essayons d'introduire la variable auxiliaire z liée à x par la relation

$$2x - 1 = z. \tag{1}$$

Dérivant (1) nous obtenons:

$$2dx = dz. \tag{2}$$

L'expression sous le signe somme $\sqrt{2x-1}\, dx$ se transforme en vertu de (1) et (2) en $\sqrt{z}\,\frac{dz}{2}$, et nous obtenons:

$$\int \sqrt{2x-1}\, dx = \int \sqrt{z}\,\frac{dz}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} + C. \tag{3}$$

Revenant à la variable initiale x, nous trouvons:

$$\int \sqrt{2x-1}\, dx = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Vérifiant par dérivation, nous obtenons:

$$d\left[\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} + C\right] = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\, d(2x-1) = \sqrt{2x-1}\, dx.$$

$2x-1$ est de nouveau utilisée en tant que fonction auxiliaire (cf. § 237).

REMARQUE 1. Dans les cas simples, il est inutile d'introduire une nouvelle notation. Ainsi, dans l'exemple 1, où l'on a introduit la fonction auxiliaire $2x-1$, trouvons mentalement sa différentielle $d(2x-1) = 2dx$. Introduisons dans l'expression sous le signe somme le facteur 2 devant dx; pour compenser écrivons $\frac{1}{2}$ devant l'intégrale. Nous obtenons:

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{2x-1}\, 2dx = \frac{1}{2}\int (2x-1)^{\frac{1}{2}}\, d(2x-1) = \frac{1}{2}\,\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C.$$

Règle 1. *Si la fonction à intégrer* (comme dans l'exemple 1) *est de la forme $f(ax+b)$, la substitution $ax+b=z$ peut s'avérer utile.*

Exemple 2. $\int \frac{dx}{(8-3x)^2}$.

Introduisons la fonction auxiliaire $8-3x=z$; nous en tirons $dx = -\frac{dz}{3}$ et alors

$$\int \frac{dx}{(8-3x)^2} = \int -\frac{dz}{3z^2} = \frac{1}{3z} + C = \frac{1}{3(8-3x)} + C.$$

Exemple 3. $\int \frac{dx}{6x-7}$.

Nous prenons $6x-7$ en qualité de fonction auxiliaire. Sans introduire pour elle une nouvelle notation (cf. remarque 1), nous trouvons (à l'aide de II):

$$\int \frac{dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\int \frac{6\,dx}{6x-7} = \frac{1}{6}\int \frac{d(6x-7)}{6x-7} = \frac{1}{6}\ln|6x-7| + C.$$

Exemple 4. $\int e^{3x}dx$ (fonction auxiliaire $3x$).

$$\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x) = \frac{1}{3}e^{3x} + C.$$

Exemple 5.

$$\int \cos\frac{x+1}{3}\,dx = 3\int \cos\frac{x+1}{3}\,d\left(\frac{x+1}{3}\right) = 3\sin\frac{x+1}{3} + C.$$

Règle 2. Supposons que l'expression sous le signe somme est le produit de deux facteurs et que l'un d'eux est la différentielle d'une certaine fonction $\varphi(x)$. Il peut s'avérer qu'avec le changement de variable $\varphi(x)=z$ le second facteur se ramène à une fonction de z que nous savons intégrer. La substitution sera alors utile.

Exemple 6. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Décomposons l'expression sous le signe somme en deux facteurs $\frac{1}{1+x^2}$ et $2x\,dx$. Le facteur $2x\,dx$ est la différentielle de la fonction $1+x^2$ figurant au dénominateur de l'autre facteur. Après le changement de variable $1+x^2=z$ le facteur $\frac{1}{1+x^2}$ prend la forme $\frac{1}{z}$. Nous savons intégrer cette fonction. Le calcul peut être conduit ainsi:

$$\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C.$$

REMARQUE 2. La ressemblance de cette intégrale avec l'intégrale du tableau $\int \frac{dx}{1+x^2}$ est trompeuse. La présence au numérateur du facteur $2x$ modifie considérablement la forme de la fonction primitive.

EXEMPLE 7. $\int \sin x \cos^3 x \, dx$.

Décomposons l'expression sous le signe somme en facteurs $\cos^3 x$ et $\sin x \, dx = -d \cos x$. Le changement de variable $\cos x = z$ transforme $\cos^3 x$ en la fonction z^3 que nous savons intégrer. Le calcul est conduit de façon suivante:

$$\int \sin x \cos^3 x \, dx = -\int \cos^3 x \, d \cos x = -\frac{\cos^4 x}{4} + C.$$

EXEMPLE 8. $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

La ressemblance avec l'intégrale VIIIa du tableau est trompeuse. Introduisons la fonction auxiliaire $a^2 - x^2 = z$. Nous avons $-2x \, dx = dz$, c'est-à-dire $x \, dx = -\frac{dz}{2}$. L'intégrale s'écrit alors

$$\int -\frac{dz}{2\sqrt{z}} = -\sqrt{z} + C.$$

Le calcul est conduit de façon suivante:

$$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{-2x \, dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

EXEMPLE 9. $\int \frac{5x \, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

La fonction auxiliaire est x^2. Nous avons:

$$\int \frac{5x \, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \frac{5}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{(a^2)^2 - (x^2)^2}} = \frac{5}{2} \arcsin \frac{x^2}{a^2} + C.$$

EXEMPLE 10. $\int \frac{\ln^2 x \, dx}{x} = \int \ln^2 x \, d \ln x = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$

Il n'est pas toujours facile de décider si un changement de variable est adéquat ou non. On peut s'en convaincre en étudiant les exemples 11 et 12.

EXEMPLE 11. $\int (x^2+1)^4 x^3\,dx$.

La substitution $x^2+1=z$ est ici utile. Décomposons l'expression sous le signe somme en facteurs $x\,dx = \frac{1}{2}\,dz$ et $(x^2+1)^4 x^2 = z^4(z-1)$. Nous obtenons:

$$\int (x^2+1)^4 x^3\,dx = \frac{1}{2}\int z^4(z-1)\,dz = \frac{1}{2}\int z^5\,dz - \frac{1}{2}\int z^4\,dz =$$
$$= \frac{1}{12}(x^2+1)^6 - \frac{1}{10}(x^2+1)^5 + C$$

(cf. exemple 4 § 299, où cette même intégrale avait été trouvée sans substitution).

EXEMPLE 12. $\int (x^2+1)^4 x^2\,dx$.

Ici la substitution $x^2+1=z$ n'est pas utile: elle conduit à l'intégrale $\frac{1}{2}\int z^4\sqrt{z-1}\,dz$, qui est plus difficile à calculer que l'intégrale initiale. Le plus simple est de calculer l'intégrale directement comme dans l'exemple 4 § 299. Nous obtenons: $\frac{1}{11}x^{11} + \frac{4}{9}x^9 + \frac{6}{7}x^7 + \frac{4}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + C$.

EXEMPLE 13. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\,\mathrm{arc\,tg}\,x} = \ln|\mathrm{arc\,tg}\,x| + C$ (la fonction auxiliare est arc tg x).

EXEMPLE 14. $\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^6}} = \frac{1}{3}\arcsin y^3 + C$ (la fonction auxiliaire est y^3).

EXEMPLE 15. $\int \frac{u^3\,du}{\sqrt{1-u^4}} = -\frac{1}{2}\sqrt{1-u^4} + C$ (la fonction auxiliaire est $1-u^4$).

EXEMPLE 16. $\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx = \ln(e^x + e^{-x}) + C$ (la fonction auxiliaire est $e^x + e^{-x}$).

EXEMPLE 17. $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3\cos^3 x} + C$ (la fonction auxiliaire est $\cos x$)

EXEMPLE 18. $\int \frac{\sin^3 x\,dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C$ (la fonction auxiliaire est $\operatorname{tg} x$; l'expression sous le signe somme est égale à $\frac{\operatorname{tg}^3 x\,dx}{\cos^2 x}$).

§ 301. Intégration par parties

Toute expression sous le signe somme peut d'une infinité de manières être représentée sous la forme $u\,dv$ (u et v sont des fonctions de la variable d'intégration).

On appelle *intégration par parties* le procédé consistant à ramener l'intégrale $\int u\,dv$ à l'intégrale $\int v\,du$ à l'aide de la formule

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{1}$$

Ce procédé s'avère bon si $\int v\,du$ est plus facile à calculer que $\int u\,dv$ (exemples 1-4) ou si l'une de ces intégrales s'exprime en fonction de l'autre (exemple 5).

EXEMPLE 1. $\int e^x x\,dx$.

Représentons l'expression sous le signe somme sous la forme $x(e^x\,dx) = x\,de^x$. Ici le rôle de u est joué par x, celui de v par la fonction e^x. Appliquons la formule (1):

$$\int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx.$$

L'intégrale $\int e^x\,dx$ figure dans le tableau. Le calcul est conduit de la manière suivante:

$$\int e^x x\,dx = \int x\,de^x = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C.$$

REMARQUE 1. Si l'on représente l'expression sous le signe somme sous la forme $e^x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$, c'est-à-dire si l'on pose $u = e^x$, $v = \frac{1}{2}x^2$, nous obtenons en vertu de la formule (1):

$$\int e^x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right) = \frac{1}{2}x^2e^x - \int \frac{1}{2}x^2e^x\,dx.$$

L'intégrale $\int \frac{1}{2} x^2 e^x \, dx$ n'est pas plus facile à calculer que l'intégrale initiale.

On peut représenter l'expression $e^x x \, dx$ sous la forme $u \, dv$ d'une infinité de manières en prenant pour v une fonction arbitraire. Ainsi, si l'on prend $v = x^4$, alors $dv = 4x^3 \, dx$ et $e^x x \, dx = \frac{e^x}{4x^2} (4x^3 \, dx)$, c'est-à-dire $u = \frac{e^x}{4x^2}$. Toutefois la formule (1) nous conduit de nouveau à une intégrale plus difficile que l'intégrale initiale.

Avant d'intégrer par parties il faut calculer mentalement ce que peut donner tel ou tel choix de la fonction v.

EXEMPLE 2. $\int x \ln x \, dx$.

Il est bon de représenter l'expression sous le signe somme sous la forme $\ln x \, d\left(\frac{1}{2} x^2\right)$. La formule (1) $\left(\text{pour } u = \ln x, \; v = \frac{1}{2} x^2\right)$ donne:

$$\int \ln x \, d\left(\frac{1}{2} x^2\right) = \ln x \left(\frac{1}{2} x^2\right) - \int \frac{1}{2} x^2 \, d \ln x = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x}.$$

L'intégrale $\int \frac{1}{2} x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \int x \, dx$ est égale à $\frac{1}{4} x^2 + C$, de sorte que

$$\int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

EXEMPLE 3. $\int x \sin x \, dx$.

Nous avons:

$$\int x \sin x \, dx = \int x d(-\cos x) = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

EXEMPLE 4. $\int x^2 \cos x \, dx$.

Nous avons:

$$\int x^2 \cos x \, dx = \int x^2 d \sin x = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx.$$

Nous appliquons de nouveau à l'intégrale ainsi obtenue l'intégration par parties (cf. exemple 3). Nous obtenons en définitive:

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$$

EXEMPLE 5. $\int e^x \cos x\,dx$.

Représentons l'expression sous le signe somme sous la forme $e^x d \sin x$:

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\,dx + C_1. \tag{2}$$

L'intégrale obtenue n'est pas plus simple que l'intégrale initiale, mais on peut l'exprimer à l'aide de celle-ci. Pour cela nous intégrons de nouveau par parties:

$$-\int \sin x\, e^x\,dx = \int e^x d \cos x = e^x \cos x - \int \cos x\, e^x\,dx + C_2. \tag{3}$$

Portant (3) dans (2), nous obtenons l'équation

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx + C_1 + C_2, \tag{4}$$

d'où nous trouvons l'inconnue $\int e^x \cos x\,dx$:

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{1}{2}\, e^x(\sin x + \cos x) + C,$$

où

$$C = \frac{C_1 + C_2}{2}.$$

REMARQUE 2. On peut représenter l'expression sous le signe somme sous la forme $\cos x\, de^x$. Dans ce cas, lors de la seconde intégration par parties il faut représenter la nouvelle expression $e^x \sin x\,dx$ sous la forme $\sin x\, de^x$ (et non sous la forme $e^x d \cos x$), sinon l'équation servant à déterminer $\int e^x \cos x\,dx$ devient une identité.

§ 302. Intégration de quelques expressions trigonométriques

RÈGLE 1. Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx, \quad \int \sin^{2n+1} x\,dx \tag{1}$$

(n est un entier positif) il est commode d'introduire la fonction auxiliaire $\sin x$ dans le premier cas et $\cos x$ dans le second.

EXEMPLE 1.

$$\int \cos^3 x\, dx = \int (1 - \sin^2 x)\, d \sin x = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

EXEMPLE 2.

$$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x \sin x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^2\, d \cos x =$$

$$= -\int (1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x)\, d \cos x =$$

$$= -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C.$$

Pour les puissances paires de $\sin x$ ou de $\cos x$ la règle 1 n'est pas utile (cf. règle 2).

RÈGLE 2. Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \cos^{2n} x\, dx, \quad \int \sin^{2n} x\, dx \tag{2}$$

il est commode d'utiliser les formules

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \tag{4}$$

et d'introduire la fonction auxiliaire $\cos 2x$.

EXEMPLE 3.

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

EXEMPLE 4.

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x\, dx.$$

Nous calculons immédiatement les deux premières intégrales et nous appliquons à la troisième la formule (3) écrite sous la forme

$$\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}.$$

Nous obtenons:

$$\int \cos^4 x\, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} \int (1 + \cos 4x)\, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x +$$

$$+ \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

reste à mettre en facteur les termes semblables.

RÈGLE 3. Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \cos^m x \sin^n x \, dx, \tag{5}$$

où l'un au moins des nombres m, n est impair, il est commode d'introduire la fonction auxiliaire $\cos x$ (si m est impair) ou $\sin x$ (si n est impair) et de procéder comme dans les exemples 1 et 2.

EXEMPLE 5. $\int \cos^6 x \sin^5 x \, dx$.

Nous avons ici la fonction sinus à une puissance impaire. Mettons l'expression sous le signe somme sous la forme

$$\cos^6 x \sin^4 x d(-\cos x) = -\cos^6 x(1 - \cos^2 x)^2 \, d \cos x.$$

Nous obtenons:

$$\int \cos^6 x \sin^5 x \, dx = -\int \cos^6 x \, d \cos x + 2\int \cos^8 x \, d \cos x - \int \cos^{10} x \, d \cos x =$$

$$= -\frac{1}{7}\cos^7 x + \frac{2}{9}\cos^9 x - \frac{1}{11}\cos^{11} x + C.$$

Quand les deux nombres m, n sont pairs, la règle 3 n'est plus applicable (cf. règle 4).

RÈGLE 4. Pour calculer les intégrales de la forme (5), où m et n sont des nombres pairs, il est commode d'utiliser les formules

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \tag{3}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \tag{4}$$

$$\sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}. \tag{6}$$

EXEMPLE 6. $\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx$.

Représentons l'expression sous le signe somme sous la forme

$$(\cos x \sin x)^2 \cos^2 x \, dx$$

et appliquons (6) et (3); nous obtenons alors:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1 + \cos 2x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x \, dx.$$

Transformons le premier terme conformément à la formule (4), en l'écrivant sous la forme

$$\sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} .$$

Calculons le second terme à l'aide de la fonction auxiliaire $\sin 2x$. Nous obtenons:

$$\int \cos^4 x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

RÈGLE 5. Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \tag{7}$$

$$\int \sin mx \sin nx \, dx, \tag{8}$$

$$\int \cos mx \cos nx \, dx, \tag{9}$$

il est commode d'utiliser les transformations

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2} [\sin (m - n) x + \sin (m + n) x], \tag{7'}$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x - \cos (m + n) x], \tag{8'}$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2} [\cos (m - n) x + \cos (m + n) x]. \tag{9'}$$

EXEMPLE 7.

$$\int \sin 5x \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin (5 - 3) x + \sin (5 + 3) x] \, dx =$$

$$= - \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

RÈGLE 6. Pour calculer les intégrales de la forme

$$\int \mathrm{tg}^n x \, dx, \qquad \int \mathrm{cotg}^n x \, dx,$$

(n est un entier supérieur à un) il est commode d'isoler le facteur $\mathrm{tg}^2 x$ (ou $\mathrm{cotg}^2 x$)..

EXEMPLE 8. $\int \mathrm{tg}^5 x \, dx$.

Isolant le facteur $\mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ nous obtenons:

$$\int \mathrm{tg}^5 x \, dx = \int \mathrm{tg}^3 x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \mathrm{tg}^3 x \, dx.$$

La première intégrale est égale à $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x$. La seconde est calculée par le même procédé:

$$\int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \int \operatorname{tg} x\,\frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|.$$

Nous obtenons en définitive:

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - \ln|\cos x| + C.$$

§ 303. Intégration par un changement de variable trigonométrique

Pour les expressions sous le signe somme contenant les radicaux

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad \sqrt{x^2 + a^2}, \qquad \sqrt{x^2 - a^2}$$

(ainsi que les carrés de ces radicaux $a^2 - x^2$, $x^2 \pm a^2$), il est souvent commode d'utiliser un changement de variable trigonométrique:

$$x = a\sin t, \quad \text{pour le cas } \sqrt{a^2 - x^2},$$
$$x = a\operatorname{tg} t, \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sqrt{x^2 + a^2},$$
$$x = a\sec t \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \sqrt{x^2 - a^2}.$$

EXEMPLE 1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Posant $x = a\sin t$, nous obtenons (*):

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \qquad dx = a\cos t\,dt. \tag{1}$$

Par conséquent,

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2\int \cos^2 t\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C \tag{2}$$

[cf. (3) § 302]. Revenant à la variable x, nous trouvons:

$$t = \arcsin\frac{x}{a}, \quad \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2}. \tag{3}$$

Nous avons en définitive:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

(*) Le signe du radical est choisi dans l'hypothèse que $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLE 2. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$.

Posant $x = a \operatorname{tg} t$, nous obtenons:

$$x^2 + a^2 = a^2(\operatorname{tg}^2 t + 1) = \frac{a^2}{\cos^2 t}, \quad dx = \frac{a\,dt}{\cos^2 t}.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C.$$

Revenant à la variable x, nous trouvons:

$$t = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}, \quad \frac{1}{2}\sin 2t = \sin t \cos t = \frac{ax}{a^2+x^2}.$$

Nous avons en définitive:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C.$$

EXEMPLE 3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$.

Posant $x = a \sec t$, nous obtenons (*):

$$\sqrt{x^2-a^2} = a \operatorname{tg} t, \quad dx = a \operatorname{tg} t \sec t\,dt.$$

Par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,sec}\frac{x}{a} + C = \frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x} + C.$$

§ 304. Fonctions rationnelles

On appelle *fonction* ou *fraction rationnelle* le rapport de deux polynômes entiers fonctions d'une même variable

$$\frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}. \tag{1}$$

Si la puissance du numérateur est inférieure à celle du dénominateur, la fraction (1) est dite *régulière*, dans le cas contraire on l'appelle *irrégulière*.

(*) Le signe du radical est choisi dans l'hypothèse que $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

EXEMPLES. Les fonctions $\dfrac{2x^2 - 1}{4x^3 - 5}$, $\dfrac{3x^2 + \pi}{x^2 + 4}$ sont des fractions rationnelles. La première fraction est régulière, la seconde irrégulière. La fonction $\dfrac{2\sqrt{x}}{x - 1}$ est irrationnelle.

§ 304a. Partie entière d'une fraction rationnelle

On peut *dégager la partie entière* d'une fraction irrégulière par division avec reste, autrement dit on peut représenter une fraction irrégulière sous la forme de la somme d'un polynôme entier et d'une fraction rationnelle régulière. Il peut s'avérer que la division se fait exactement; dans ce cas la fraction irrégulière est un polynôme entier.

EXEMPLE 1. Après avoir dégagé la partie entière de la fraction irrégulière $\dfrac{4x^3 - 16x}{15x^2 - 3}$, celle-ci devient $\dfrac{4}{15}x - \dfrac{15\frac{1}{5}x}{15x^2 - 3}$ $\left(\dfrac{4}{15}x\right.$ est le quotient, $-15\dfrac{1}{5}x$ le reste de la division du numérateur par le dénominateur).

EXEMPLE 2. $\dfrac{1 + x^5 - x^6}{1 - x} = x^5 + \dfrac{1}{1 - x}$.

On obtient ce résultat en divisant $-x^6 + x^5 + 1$ par $-x + 1$ ou, plus brièvement, de la manière suivante:

$$\frac{1 + x^5 - x^6}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + \frac{x^5(1 - x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} + x^5.$$

EXEMPLE 3. Dégageant la partie entière de la fraction $\dfrac{x^3 - x^2}{x - 1}$, nous obtenons x^2 (la division se fait exactement).

§ 305. Procédés d'intégration des fractions rationnelles

Pour intégrer une fraction rationnelle irrégulière on dégage d'abord sa partie entière (§ 304a).

EXEMPLE 1.

$$\int \frac{1 + x^5 - x^6}{1 - x}\, dx = \int \left(x^5 + \frac{1}{1 - x} \right) dx = \frac{x^6}{6} - \ln|1 - x| + C \text{ (*)}$$

(cf. § 304a, exemple 2).

Comme la partie entière peut être intégrée immédiatement, l'intégration de toute fraction rationnelle se ramène à l'intégration d'une fraction régulière. Toutefois, la méthode générale correspondante (§ 307) est souvent liée à des calculs laborieux. C'est pourquoi on utilisera, si cela est possible, les particularités concrètes de l'expression sous le signe somme.

Ainsi, *si le numérateur de l'expression sous le signe somme est égal à la différentielle du dénominateur* (ou en diffère par un facteur constant), *il faut considérer le dénominateur comme une fonction auxiliaire.*

EXEMPLE 2.

$$\int \frac{(2x^3 + 6x^2 + 7x + 3)\, dx}{x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2)}{x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln (x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 6x + 2) + C.$$

On applique le procédé analogue si au numérateur figure la différentielle d'un polynôme et au dénominateur une puissance de ce même polynôme.

EXEMPLE 3.

$$\int \frac{(3x^2 + 1)\, dx}{x^2(x^2 + 1)^2} = \int \frac{d(x^3 + x)}{(x^3 + x)^2} = -\frac{1}{x^3 + x} + C.$$

Si le numérateur et le dénominateur ont un facteur commun, il est utile de simplifier.

EXEMPLE 4. $\displaystyle\int \frac{(x^2 - x - 2)\, dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

Cette fraction est divisible par $x + 1$. Nous obtenons:

$$\int \frac{(x - 2)\, dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln (x^2 + 1) - 2 \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

REMARQUE 1. Il est parfois inutile de simplifier la fraction. Ainsi, dans l'exemple 2 on aurait pu représenter la fraction sous la forme

$$\frac{(x + 1)(2x^2 + 4x + 3)}{(x + 1)^2 (x^2 + 2x + 2)}$$

(*) On aurait pu appliquer la substitution $1 - x = z$ sans dégager préalablement la partie entière, mais les calculs auraient été plus longs.

et simplifier par $x + 1$. Or l'intégrale

$$\int \frac{(2x^2 + 4x + 3)\,dx}{(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}$$

est plus difficile à calculer que l'intégrale initiale, de plus la décomposition en facteurs est aussi liée à certaines difficultés.

REMARQUE 2. La méthode générale d'intégration des fractions rationnelles consiste à décomposer la fraction donnée en *éléments simples*. On explique au § 306 quels sont ces éléments simples et comment on les intègre. Au § 307 on expose le procédé de décomposition d'une fraction en éléments simples.

§ 306. Intégration des éléments simples

On appelle *éléments simples* les fractions que l'on peut ramener aux deux types suivants (dits éléments simples de première et de deuxième espèce):

I. $\frac{A}{(x-a)^n}$ (n est un nombre naturel),

II. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}$ (n est un nombre naturel),

où $x^2 + px + q$ ne *peut être décomposé en facteurs réels du premier degré* $\left[\text{autrement dit } q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0\right]$; si par contre $x^2 + px + q$ se décompose en facteurs réels du premier degré $\left[\text{c'est-à-dire si } q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 < 0\right]$, alors la fraction II *n'est pas un élément simple.*

$\frac{5}{x+2}$, $\frac{\sqrt{3}}{(x-\sqrt{2})^3}$ sont des éléments simples de première espèce, $\frac{0{,}2}{x^2+1}$, $\frac{7x-1}{x^2+2}$, $\frac{5(x+4)}{x^2+\sqrt{3}}$ des éléments simples de deuxième espèce. $\frac{1}{x^2-1}$, $\frac{3x-2}{(x^2-\sqrt{3})^3}$ ne sont pas des éléments simples, car les expressions $x^2 - 1$, $x^2 - \sqrt{3}$ peuvent être décomposées en facteurs réels du premier degré.

La fraction $\frac{3}{2x-9}$ est simple, car on peut la mettre sous la forme $\frac{\frac{3}{2}}{x-\frac{9}{2}}$. La fraction $\frac{18x-3}{(x^2+x+1)^3}$ est simple car elle est du type II.

A) Les *éléments simples de première espèce* s'intègrent d'après les formules

$$\int\frac{A\,dx}{(x-a)^n}=-\frac{1}{n-1}\,\frac{A}{(x-a)^{n-1}}+C\ (n>1), \tag{1}$$

$$\int\frac{A\,dx}{x-a}=A\ln|x-a|+C. \tag{2}$$

B) Les *éléments simples de deuxième espèce* s'intègrent, *dans le cas* $n=1$, par la substitution

$$x+\frac{p}{2}=z,$$

ramenant le dénominateur

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

à la forme $z^2+k^2\left[\text{où } k^2=q-\left(\frac{p}{2}\right)^2\right]$.

EXEMPLE 1.

$$\int\frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx\ \left[p=-8,\ q=25;\ q-\left(\frac{p}{2}\right)^2=9\right].$$

La substitution

$$x-4=z$$

permet de ramener l'intégrale à la forme

$$\int\frac{3z+7}{z^2+9}\,dz=3\int\frac{z\,dz}{z^2+9}+7\int\frac{dz}{z^2+9}=$$

$$=\frac{3}{2}\ln(z^2+9)+\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{3}+C.$$

Revenant à l'argument x, nous obtenons:

$$\int\frac{3x-5}{x^2-8x+25}\,dx=\frac{3}{2}\ln(x^2-8x+25)+\frac{7}{3}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-4}{3}+C.$$

La formule (il est inutile de la retenir) est de la forme

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\, dx = \frac{M}{2} \ln (x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}} + C.$$

C) Les *éléments simples de deuxième espèce* s'intègrent, *dans le cas* $n > 1$, par la même substitution

$$x + \frac{p}{2} = z.$$

Elle ramène l'intégrale $\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}\, dx$ à la forme

$$\int \frac{Mz + L}{(z^2 + k^2)^n}\, dz \qquad (3)$$

$\left[\text{où } L = \frac{2N - Mp}{2}, \quad k^2 = q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right].$

Le premier terme $\int \frac{Mz\, dz}{(z^2 + k^2)^n}$ peut être intégré immédiatement à l'aide de la fonction auxiliaire $z^2 + k^2$

$$\int \frac{Mz\, dz}{(z^2 + k^2)^n} = -\frac{M}{2} \frac{1}{(n-1)(z^2 + k^2)^{n-1}} + C. \qquad (4)$$

Le second terme $L \int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^n}$ est calculé par un changement de variable trigonométrique (§ 303, exemple 2) ou à l'aide de la *formule de récurrence* (*)

$$\int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)\, k^2} \left[\frac{z}{(z^2 + k^2)^{n-1}} + (2n - 3) \int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^{n-1}}\right] \qquad (5)$$

(on peut la vérifier par dérivation). Elle ramène l'intégrale $\int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^n}$ à une intégrale du même type, dont l'indice n du dénominateur est diminué d'une unité. Répétant ce processus nous parvenons en définitive à l'intégrale

$$\int \frac{dz}{z^2 + k^2} = \frac{1}{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{z}{k} + C.$$

(*) On appelle ainsi toute formule exprimant une grandeur dépendant du nombre n $\left[\text{dans notre cas} \int \frac{dz}{(z^2 + k^2)^n}\right]$ à l'aide de cette même grandeur, mais pour une valeur absolue moindre de n.

EXEMPLE 2. $\displaystyle\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3}$.

La substitution $x-1=z$ ramène cette intégrale à la forme

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3}\,dz = 3\int \frac{z\,dz}{(z^2+2)^3} + \int \frac{dz}{(z^2+2)^3}. \tag{6}$$

Le premier terme est égal à

$$\frac{3}{2}\int \frac{d(z^2+2)}{(z^2+2)^3} = -\frac{3}{4(z^2+2)^2}. \tag{7}$$

Nous omettons la constante C en l'associant au second terme que nous calculons d'après la formule (5) (en y posant $k^2=2$, $n=3$):

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^3} = \frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dz}{(z^2+2)^2}. \tag{8}$$

Appliquons de nouveau la formule (5) en posant $k^2=2$, $n=2$:

$$\int \frac{dz}{(z^2+2)^2} = \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4}\int \frac{dz}{z^2+2} =$$
$$= \frac{1}{4}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} + C. \tag{9}$$

Nous trouvons des formules (6)-(9):

$$\int \frac{3z+1}{(z^2+2)^3}\,dz =$$
$$= -\frac{3}{4(z^2+2)^2} + \frac{1}{8}\,\frac{z}{(z^2+2)^2} + \frac{3}{32}\,\frac{z}{z^2+2} + \frac{3}{32\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} + C =$$
$$= \frac{3z^3+10z-24}{32(z^2+2)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{z}{\sqrt{2}} + C.$$

Revenant à la variable x, nous obtenons:

$$\int \frac{(3x-2)\,dx}{(x^2-2x+3)^3} = \frac{3x^3-9x^2+19x-37}{32(x^2-2x+3)^2} + \frac{3}{32\sqrt{2}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

§ 307. Intégration des fonctions rationnelles (méthode générale)

La méthode générale d'intégration des fonctions rationnelles prévoit les étapes suivantes:

1. On dégage la partie entière de la fonction; elle est intégrée immédiatement (§ 305, exemple 1).

2. On décompose le dénominateur de la fraction régulière restante en facteurs réels du type $x-a$ et du type x^2+px+q, et cela de

sorte que les facteurs du second type *ne soient pas décomposables en facteurs réels du premier degré* (*).

La décomposition est de la forme:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x-a)(x-b)\dots(x^2+px+q)(x^2+rx+s)\dots \quad (1)$$

Une telle décomposition existe toujours (**), elle est unique.

3. Nous essayons de diviser le numérateur de la fraction régulière par chaque facteur de l'expression (1). Si la division peut être effectuée sans reste, nous simplifions la fraction par le facteur correspondant (§ 305, exemple 4).

4. Nous décomposons la fraction obtenue en éléments simples et intégrons séparément chaque élément (§ 306).

REMARQUE 1. Toute fraction régulière est décomposable de façon unique en éléments simples. Le procédé de décomposition est expliqué plus bas. Pour mieux le comprendre on a considéré 4 cas épuisant toutes les possibilités.

Cas 1. La décomposition du dénominateur ne comprend que des facteurs du premier degré (tous distincts).

La fraction régulière se décompose alors en éléments simples d'après la formule

$$\frac{F(x)}{a_0(x-a)(x-b)\dots(x-l)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots + \frac{L}{x-l}, \quad (2)$$

où les constantes A, B, ..., L sont trouvées (d'après la méthode des coefficients indéterminés) de la manière suivante:

a) nous chassons les dénominateurs dans l'égalité (2);

b) nous égalons les coefficients des puissances identiques de x dans le premier et le second membre (il peut arriver que dans le premier membre le terme correspondant fasse défaut; on sous-entend alors qu'il est représenté avec le coefficient 0). Nous obtenons pour les inconnues A, B, ..., L un système d'équations du premier degré;

c) nous résolvons le système (il possède toujours une solution unique).

EXEMPLE 1. Calculer $\int \frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx$.

SOLUTION. La fraction donnée est régulière. Décomposons le dénominateur en facteurs:

$$x^3 + x^2 - 6x = x(x-2)(x+3). \quad (3)$$

(*) Si l'on obtient le facteur x^2+px+q décomposable en facteurs réels $x-m$ et $x-n$, on le remplace par ces deux facteurs.

(**) Dans les cas les plus simples, elle est effectuée en groupant les termes et par d'autres artifices connus de l'algèbre. En ce qui concerne le cas général cf. § 308.

Le numérateur n'est divisible par aucun de ces facteurs, de sorte que la fraction est irréductible. Tous ces facteurs sont du premier degré et distincts.

Conformément à la formule (2) on a

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}. \tag{4}$$

Pour rechercher les constantes A, B, C nous chassons les dénominateurs. Nous obtenons:

$$7x-5=A(x-2)(x+3)+B(x+3)x+C(x-2)x, \tag{5}$$

ou

$$7x-5=(A+B+C)x^2+(A+3B-2C)x-6A. \tag{6}$$

Egalons les coefficients des puissances identiques de x (dans le premier membre nous sous-entendons le terme $0\cdot x^2$). Nous obtenons le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0,\\ A+3B-2C&=7,\\ -6A&=-5.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

En le résolvant nous trouvons

$$A=\frac{5}{6},\qquad B=\frac{9}{10},\qquad C=-\frac{26}{15} \tag{8}$$

et nous obtenons de (4) la décomposition suivante de la fraction donnée en éléments simples:

$$\frac{7x-5}{x(x-2)(x+3)}=\frac{5}{6}\,\frac{1}{x}+\frac{9}{10}\,\frac{1}{x-2}-\frac{26}{15}\,\frac{1}{x+3}.$$

En intégrant terme à terme nous trouvons l'intégrale cherchée

$$\int\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}\,dx=\frac{5}{6}\ln|x|+\frac{9}{10}\ln|x-2|-\frac{26}{15}\ln|x+3|+C.$$

Remarque 2. Les constantes A, B, C peuvent également être trouvées de la manière suivante: nous prenons trois valeurs arbitraires de x et nous les portons dans (5). Nous obtenons un système de trois équations, d'où nous retrouvons les mêmes valeurs (8).

Cette remarque se rapporte également aux cas 2, 3 et 4. Mais dans le cas 1 ce procédé peut être simplifié si l'on prend les valeurs de x qui annulent les dénominateurs des éléments simples; dans l'exemple considéré ce sont les valeurs $x=0$, $x=2$, $x=-3$. Nous obtenons alors le système $-5=-6A$, $9=10B$, $-26=15C$, d'où nous obtenons immédiatement les valeurs de A, B, C.

Cas 2. La décomposition du dénominateur ne comporte que des facteurs du premier degré, pas tous distincts.

Supposons que le facteur $x - a$ se répète k fois. Il faut alors dans la décomposition (2) remplacer les k termes identiques correspondants par les éléments simples de la forme

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}. \tag{9}$$

On procède de même pour les autres facteurs qui se répètent. Les éléments simples qui correspondent aux facteurs distincts restent les mêmes. Les constantes figurant dans la décomposition sont déterminées comme dans le cas 1.

EXEMPLE 2. Calculer $\int \frac{(x^3+1)\,dx}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x}$.

SOLUTION. La décomposition du dénominateur est de la forme

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x = x(x-1)^3.$$

Tous les facteurs sont du premier degré. Le facteur x ne se répète pas, le facteur $x - 1$ se répète trois fois. Au facteur qui ne se répète pas correspond, comme dans l'exemple 1, l'élément simple de la forme $\frac{A}{x}$, au facteur $(x - 1)$ qui se répète trois éléments simples de la form

$$\frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

La décomposition de la fraction considérée est de la forme

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x-1}.$$

En chassant le dénominateur, nous obtenons:

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2 \tag{10}$$

ou

$$x^3 + 1 = (A + D)\,x^3 + (-3A + C - 2D)\,x^2 + (3A + B - C + D)\,x - A. \tag{11}$$

En égalant les coefficients des puissances identiques de x, nous obtenons:

$$\left.\begin{aligned} A + D &= 1, \\ -3A + C - 2D &= 0, \\ 3A + B - C + D &= 0, \\ -A &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

En résolvant ce système nous trouvons:

$$A = -1, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = 2.$$

Nous obtenons la décomposition de la fraction donnée

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1}.$$

Intégrant terme à terme nous trouvons:

$$\int \frac{(x^2+1)\,dx}{x^4-3x^3+3x^2-x} =$$

$$= -\ln|x| - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + 2\ln|x-1| + C =$$

$$= -\frac{x}{(x-1)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} + C.$$

Autre variante. Si l'on pose dans (10) d'abord $x = 0$, puis $x = 1$ (cf. remarque 2), nous obtenons immédiatement $A = -1$, $B = 2$. Portant dans (10) deux autres valeurs, par exemple, $x = 2$ et $x = -1$ et tenant compte des valeurs trouvées de A et B nous obtenons le système $2C + 2D = 6$, $2C - 4D = -6$, d'où nous trouvons $C = 1$, $D = 2$.

Ce procédé est particulièrement commode quand la décomposition du dénominateur comporte de nombreux facteurs distincts, la multiplicité des facteurs non distincts étant peu élevée.

Cas 3. La décomposition du dénominateur comporte des facteurs du second degré tous distincts et non décomposables en facteurs réels du premier degré.

Dans la décomposition de la fraction à chaque facteur $x^2 + px + q$ correspond un élément simple $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (type II). Aux facteurs du premier degré (s'ils existent) correspondent comme auparavant des éléments simples du type I.

Exemple 3. Calculer $\int \frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}$.

Solution. Décomposons le dénominateur en facteurs:

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 9 = (x^2 + 2x)^2 - 3^2 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 2x - 3).$$

Nous obtenons deux facteurs de la forme $x^2 + px + q$ dont seu le premier ne se décompose pas en facteurs réels du premier degré

$$\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = 3 - 1^2 = 2 > 0\right].$$

Le second

$$\left[q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -3 - 1^2 = -4 < 0\right]$$

se décompose en facteurs du premier degré:

$$x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3).$$

C'est pourquoi la décomposition de la fraction en éléments simples est de la forme (*):

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}. \tag{13}$$

En chassant le dénominateur nous obtenons:

$$7x^2+26x-9=(x^2+2x+3)[A(x+3)+B(x-1)]+ \\ +(Cx+D)(x-1)(x+3). \tag{14}$$

Egalons les coefficients des puissances identiques de x:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C&=0,\\ 5A+B+2C+D&=7,\\ 9A+B-3C+2D&=26,\\ 9A-3B-3D&=-9.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Résolvant le système (15) nous trouvons

$$A=1,\quad B=1,\quad C=-2,\quad D=5,$$

de sorte que

$$\frac{7x^2+26x-9}{(x^2+2x+3)(x-1)(x+3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+3}+\frac{-2x+5}{x^2+2x+3}.$$

En intégrant (cf. § 306, cas B), nous trouvons:

$$\int\frac{(7x^2+26x-9)\,dx}{x^4+4x^3+4x^2-9}=\ln|x-1|+\ln|x+3|-$$
$$-\ln(x^2+2x+3)+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C=$$
$$=\ln\left|\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+3}\right|+\frac{7}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C.$$

(*) On pourrait rechercher une décomposition de la forme

$$\frac{A'x+B'}{x^2+2x-3}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3};$$

dans l'exemple considéré le calcul s'en trouverait simplifié: nous obtenons $A'=2$, $B'=2$ et nous trouvons:

$$\int\frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x-3}=\ln|x^2+2x-3|+C.$$

Dans le cas général on aurait dû de toute façon décomposer la fraction $\frac{A'x+B'}{x^2+2x-3}$ en éléments simples $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$.

Autre variante. Pour déterminer A et B posons dans (14) d'abord $x = 1$, puis $x = -3$ (cf. remarque 2). Nous obtenons des équations simples $24 = 24A$, $-24 = -24B$, ce qui donne:

$$A = 1, \quad B = 1.$$

Posant dans (14) $x = 0$, nous obtenons $-9 = 9A - 3B - 3D$, d'où $D = 5$. Posant $x = -1$, nous trouvons $C = -2$.

Cas 4. La décomposition du dénominateur comporte des facteurs du second degré (non décomposables en facteurs réels du premier degré), pas tous distincts.

Dans la décomposition de la fraction à chaque facteur $x^2 + px + q$ se répétant k fois correspond alors une somme d'éléments simples de la forme

$$\frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_{k-1} x + N_{k-1}}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q}. \qquad (16)$$

Exemple 4. Calculer $\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^5 + 2x^3 + x}$.

Solution. Décomposons le dénominateur en facteurs:

$$x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2 + 1)^2.$$

Le facteur $x^2 + 1$ ne se décompose pas en facteurs réels du premier degré; il se répète deux fois. C'est pourquoi la décomposition de la fraction est de la forme:

$$\frac{3x + 5}{x(x^2 + 1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Dx + E}{x^2 + 1}.$$

Chassons le dénominateur:

$$3x + 5 = A(x^2 + 1)^2 + (Bx + C)\,x + (Dx + E)\,x(x^2 + 1).$$

Egalons les coefficients des puissances identiques de x:

$$A + D = 0, \quad E = 0, \quad 2A + B + D = 0, \quad C + E = 3, \quad A + E = 5.$$

Résolvant ce système nous obtenons:

$$A = 5, \quad B = -5, \quad C = 3, \quad D = -5, \quad E = 0,$$

de sorte que

$$\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^5 + 2x^3 + x} = 5\int \frac{dx}{x} \int \frac{(-5x + 3)\,dx}{(x^2 + 1)^2} - 5\int \frac{x\,dx}{x^2 + 1}.$$

Calculant la seconde intégrale du second membre comme il est expliqué au § 306 (cas C), nous trouvons:

$$\int \frac{(3x + 5)\,dx}{x^5 + 2x^3 + x} = 5 \ln |x| + \left[\frac{5}{2(x^2 + 1)} + \frac{3x}{2(x^2 + 1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} x\right] - \frac{5}{2} \ln (x^2 + 1) + C = 5 \ln \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{3x + 5}{2(x^2 + 1)} + \frac{3}{2} \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

REMARQUE 3. L'intégrale de toute fraction rationnelle s'exprime théoriquement (cf. exemples 1 à 4) par les logarithmes des fonctions rationnelles, par des fonctions trigonométriques inverses et par la « partie algébrique » (c'est-à-dire par une fonction rationnelle). Toutefois les facteurs des formes $x - a$, $x^2 + px + q$ (en lesquels se décompose le dénominateur de toute fonction rationnelle) ne peuvent généralement être trouvés qu'approximativement (cf. § 308).

On peut toujours par ailleurs, par la méthode d'Ostrogradski, exprimer exactement la partie *algébrique*, car pour la rechercher il n'est pas besoin de décomposer le dénominateur.

§ 308. Décomposition d'un polynôme en un produit de facteurs

La décomposition du polynôme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

en produit de facteurs se ramène à la résolution de l'équation

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{2}$$

En effet, si l'on connaît une racine quelconque x_1 de l'équation (2), le polynôme (1) est divisible par $x - x_1$, et nous obtenons la décomposition de la forme

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0\,(x - x_1)\,(x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}). \tag{3}$$

On peut toujours trouver par des procédés utilisés en algèbre supérieure (approximativement, mais avec une précision arbitraire) l'une des racines de toute équation algébrique numérique (*). Toutefois la racine x_1 peut aussi être imaginaire.

Après avoir obtenu la décomposition (3), nous pouvons trouver la racine x_2 de l'équation $x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1} = 0$. Le nombre x_2 est en même temps une racine de l'équation (2). Nous obtenons pour le polynôme (1) la décomposition:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x^{n-2} + c_1x^{n-3} + \ldots + c_{n-2}), \tag{4}$$

etc. Nous obtenons en définitive la décomposition en n facteurs du premier degré (réels ou imaginaires)

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\ldots(x - x_n); \tag{5}$$

une telle décomposition est unique. Les nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines de l'équation (2). Ils sont également appelés *zéros* du polynôme (1). Il n'est pas exclu que certaines racines soient égales. Toutefois, on estime, dans ce cas également, que l'équation (2) a n racines, ces racines étant comptées une, deux, trois fois, etc., suivant le nombre de fois que le facteur correspondant figure dans la décomposition (5).

Si tous les coefficients du polynôme (1) sont réels, à chaque racine complexe $\alpha + \beta i$ correspond une autre racine complexe $\alpha - \beta i$ (*racines complexes conjuguées*). Si l'une des racines complexes conjuguées se répète, l'autre se répète un nombre égal de fois.

Le produit de deux racines complexes conjuguées $x - (\alpha + \beta i)$ et $x - (\alpha - \beta i)$ donne un polynôme *réel* de la forme

$$x^2 + px + q.$$

(*) Lors de la division du polynôme (1) par le binôme $x - x_1'$, où x_1' est la valeur *approchée* de la racine, le reste est un certain nombre q (égal à la valeur du polynôme pour $x = x_1'$). Le reste q tend vers zéro lorsque $x_1' \to x_1$.

Ici

$$p = -2\alpha, \quad q = \alpha^2 + \beta^2; \quad q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \beta^2 > 0.$$

Cela signifie que *tout polynôme* (à coefficients réels) *peut être décomposé en facteurs réels du type* $x - x_k$ et $x^2 + px + q$ (les facteurs du second type ne peuvent être décomposés en facteurs réels du premier degré).

REMARQUE. Bien que les nombres x_k, p, q figurant dans les facteurs de la forme $x - x_k$, $x^2 + px + q$ soient réels, ils sont généralement irrationnels. De plus, dans le cas où le polynôme (1) est du cinquième degré ou d'un degré supérieur, ces nombres ne peuvent être exprimés exactement même à l'aide de radicaux. C'est pourquoi il n'est pas toujours possible de décomposer *exactement* une fraction rationnelle en éléments simples.

§ 309. Intégration des fonctions élémentaires

L'intégrale d'une fonction rationnelle *n'est généralement pas une fonction rationnelle* (par exemple $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$). De même, l'intégrale d'une fonction élémentaire (irrationnelle) *n'est généralement pas une fonction élémentaire.*

Ainsi, les intégrales

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}, \quad \int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{x\,dx}{\ln x}$$

ne s'expriment pas à l'aide de fonctions élémentaires (*) bien que les intégrales semblables

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int \ln x\,dx, \quad \int x \ln x\,dx$$

soient des fonctions élémentaires.

On peut, en vertu des règles du calcul différentiel, trouver la dérivée de toute fonction élémentaire (elle est aussi élémentaire). En calcul intégral de telles règles pour la recherche de la primitive sont *impossibles en principe.*

Toutefois, pour certaines classes de fonctions élémentaires l'intégrale est toujours une fonction élémentaire (bien qu'elle ait une forme compliquée). Au § 307 on a étudié l'une de ces classes (celle des fonctions rationnelles). Aux §§ 310 à 313 on considère d'autres classes importantes et on indique des règles générales pour le calcul de leurs intégrales. D'ailleurs, selon le cas, l'artifice peut être dicté par l'expérience.

(*) Néanmoins l'intégrale indéfinie de toute fonction continue existe (et est une fonction continue).

§ 310. Quelques intégrales dépendant des radicaux

Ici et dans ce qui suit le symbole $R(x, y)$ signifie une fraction dont le numérateur et le dénominateur sont des polynômes en x, y. Une telle fraction est appelée *fonction rationnelle* de deux variables x, y (cf. § 304). Si le dénominateur est une grandeur constante (un polynôme de degré 0), la fonction rationnelle est un polynôme *entier*.

On définit de même une fonction rationnelle de trois variables $R(x, y, z)$, de quatre variables, etc.

L'intégrale de la forme (*)

$$I = \int R\left[x, \quad \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\alpha}, \quad \left(\frac{px+q}{rx+s}\right)^{\beta}, \dots\right] dx, \tag{1}$$

où α et β sont des nombres *rationnels* et p, q, r, s des constantes (numériques ou littérales), se ramène à l'intégrale d'une fonction rationnelle et, par conséquent, peut être exprimée à l'aide de fonctions élémentaires. A cette fin on utilise la substitution (**) $\frac{px+q}{rx+s} = t^n$, où n est le dénominateur commun des fractions α, β, ...

En particulier l'intégrale

$$I = \int R[x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \dots]\, dx \tag{2}$$

se calcule par le changement de variable $x = t^n$.

REMARQUE. La méthode d'intégration selon laquelle l'intégrale donnée se ramène à une intégrale d'une fonction rationnelle est appelée *rationalisation*.

EXEMPLE 1. $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$.

Ici $p = q = s = 1$, $r = 0$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$. Le dénominateur commun est $n = 6$. La rationalisation de l'intégrale s'effectue par la substitution

$$1 + x = t^6, \quad dx = 6t^5\, dt.$$

(*) Ici et dans ce qui suit, la lettre I est la notation abrégée de l'intégrale.

(**) On suppose que $\frac{p}{r} \neq \frac{q}{s}$; dans le cas où $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$ la fraction $\frac{px+q}{rx+s}$ se ramène à une constante de sorte qu'aucun changement de variable n'est nécessaire.

Nous obtenons:

$$I = \int \frac{(t^6 - 1)\, 6t^5\, dt}{t^3 - t^2} = -6\int (t^8 + t^7 + t^6 + t^5 + t^4 + t^3)\, dt =$$

$$= -6t^4\left(\frac{t^5}{9} + \frac{t^4}{8} + \frac{t^3}{7} + \frac{t^2}{6} + \frac{t}{5} + \frac{1}{4}\right) + C,$$

où $t = \sqrt[6]{1 + x}$.

EXEMPLE 2. $I = \int x^{-\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{3}} + 1)^{-2}\, dx$.

C'est une intégrale de la forme (2). Posons $x = t^6$. Nous obtenons:

$$I = 6\int \frac{t^2\, dt}{(1 + t^2)^2} = -\frac{3t}{1 + t^2} + 3 \operatorname{arc\,tg} t + C,$$

où $t = \sqrt[6]{x}$.

§ 311. Intégration des différentielles binômes

On appelle *différentielle binôme* l'expression de la forme

$$x^m(a + bx^n)^p\, dx,$$

où m, n, p sont des nombres rationnels et a, b des constantes non nulles. L'intégrale

$$I = \int x^m(a + bx^n)^p\, dx \qquad (1)$$

s'exprime à l'aide de fonctions élémentaires dans les trois cas suivants:

Cas 1. p est un entier. On est alors ramené au § 310.

Cf. exemple 2 § 310, où $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$, $p = -2$.

Cas 2. p est une fraction $\left(p = \frac{r}{s}\right)$, mais $\frac{m + 1}{n}$ est un entier. L'intégrale est alors rendue rationnelle par la substitution

$$a + bx^n = z^s$$

(s est le dénominateur de la fraction p).

EXEMPLE 1.

$$I = \int x^{\frac{1}{5}}\left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} dx. \qquad (2)$$

Ici $m = \frac{1}{5}$, $n = \frac{3}{5}$, $\frac{m+1}{n} = 2$ est un entier. Posons

$$3 - 2x^{\frac{3}{5}} = z^2. \qquad (3)$$

On peut exprimer x en fonction de z et le porter dans (2). Mais il est plus simple de dériver (3):

$$x^{-\frac{2}{5}}\,dx = -\frac{5}{3}z\,dz \qquad (4)$$

et de transformer I en vertu de (3) et (4) de la manière suivante:

$$I = \int\left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{5}}\left(x^{-\frac{2}{5}}dx\right) =$$

$$= \int (z^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{3-z^2}{2}\left(-\frac{5}{3}z\,dz\right) = -\frac{5}{6}\int (3 - z^2)\,dz =$$

$$= -\frac{5}{2}z + \frac{5}{18}z^3 + C,$$

où

$$z = \left(3 - 2x^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cas 3. Les deux nombres $p = \frac{r}{s}$ et $\frac{m+1}{n}$ sont fractionnaires, mais leur somme $\frac{m+1}{n} + p$ est un entier.

L'intégrale est alors rendue rationnelle par la substitution

$$ax^{-n} + b = z^s$$

(s est le dénominateur de la fraction p).

Exemple 2.

$$I = \int x^{-6}(1 + 2x^3)^{\frac{2}{3}}dx.$$

Ici $m = -6$, $n = 3$, $p = \frac{2}{3}$ (fraction), $\frac{m+1}{n} = -\frac{5}{3}$ (fraction), $\frac{m+1}{n} + p = -1$ (un entier).

Posons

$$x^{-3} + 2 = z^3, \quad x^{-4}\,dx = -z^2\,dz.$$

Mettant $1 + 2x^3$ sous la forme $x^3(x^{-3} + 2)$ nous obtenons:

$$I = \int x^{-4}(x^{-3} + 2)^{\frac{2}{3}} dx = \int z^2(-z^2\,dz) = -\frac{1}{5}z^5 + C = -\frac{1}{5}x^{-5}(1 + 2x^3)^{\frac{5}{3}} + C.$$

Les trois cas que nous avons rapportés avaient été indiqués par Newton. Euler qu'aucun mathématicien n'a jamais surpassé dans l'art d'effectuer des transformations et qui rechercha sans succès de nouveaux cas d'intégrabilité des différentielles binômes affirma que ces cas sont uniques. Mais ce n'est qu'en 1853 que Tchébicheff démontra la proposition d'Euler. En 1926 Mordoukhaï-Boltovskoï démontra le théorème correspondant pour une intégrale de la forme (1) dans le cas des exposants m, n, p irrationnels.

§ 312. Intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\,dx$

Les intégrales de cette forme (*) sont rendues rationnelles par l'une des substitutions d'Euler.

La première substitution d'Euler est applicable quand $a > 0$. Posons (**)

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} + x\sqrt{a} = t. \tag{1}$$

Nous avons alors

$$ax^2 + bx + c = (t - x\sqrt{a})^2.$$

Les termes en x^2 s'annulent et x (et, par conséquent, dx) s'exprime rationnellement en fonction de t. Portant cette expression dans (1) nous trouvons également une expression rationnelle pour le radical $\sqrt{ax^2 + bx + c}$.

Exemple 1.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{k^2 + x^2}}.$$

Posons

$$\sqrt{k^2 + x^2} = t - x.$$

(*) On admet que $a \neq 0$, car si $a = 0$ on revient au cas du § 310.

(**) On aurait pu aussi bien poser

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} - x\sqrt{a} = t.$$

Nous en tirons

$$x = \frac{t^2 - k^2}{2t}, \quad dx = \frac{(t^2 + k^2)\,dt}{2t^2},$$

$$\sqrt{k^2 + x^2} = t - x = \frac{t^2 + k^2}{2t}.$$

Par conséquent,

$$I = \int \frac{(t^2 + k^2)\,dt}{2t^2} : \frac{t^2 + k^2}{2t} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C,$$

$$I = \ln (x + \sqrt{k^2 + x^2}) + C.$$

La troisième substitution d'Euler (au sujet de la deuxième substitution cf. remarque) est applicable chaque fois que le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède des racines réelles, et en particulier quand $a < 0$(*).

Soient x_1, x_2 les racines. Posons alors

$$\sqrt{\frac{a(x - x_1)}{x - x_2}} = t, \tag{2}$$

d'où nous trouvons x rationnelle en t:

$$x = \frac{x_2 t^2 - a x_1}{t^2 - a}. \tag{3}$$

Nous trouvons aussi l'expression rationnelle du radical:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = \sqrt{\frac{a(x - x_1)}{x - x_2}(x - x_2)^2} = t\,|x - x_2|. \tag{4}$$

Exemple 2. $I = \int \frac{dx}{(x - 1)\sqrt{-x^2 + 3x - 2}}$.

Le trinôme $-x^2 + 3x - 2$ possède les racines $x_1 = 1$, $x_2 = 2$:

$$-x^2 + 3x - 2 = -(x - 2)(x - 1).$$

L'expression sous le radical est positive pour $1 < x < 2$ (pour $x = 1$ et $x = 2$ la fonction à intégrer devient infinie).

Posons (**)

$$\sqrt{\frac{-(x - 1)}{x - 2}} = t. \tag{5}$$

(*) Quand $a < 0$, le trinôme $ax^2 + bx + c$ pourrait avoir des racines complexes (si $4ac - b^2 > 0$), mais alors, en vertu de l'identité $ax^2 + bx + c = \frac{1}{4a}[(2ax + b)^2 + (4ac - b^2)]$ le trinôme aurait toujours des valeurs négatives, de sorte que la racine $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ serait imaginaire pour toute valeur de x.

(**) On peut poser $x_1 = 2$, $x_2 = 1$. Dans ce cas la troisième substitution d'Euler est modifiée $\left(\text{on doit poser } \sqrt{\frac{-(x - 2)}{x - 1}} = t\right)$.

Nous en tirons

$$x = \frac{2t^2+1}{t^2+1}, \quad dx = \frac{2t\,dt}{(t^2+1)^2}, \tag{6}$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \sqrt{\frac{-(x-1)}{x-2}}\,|x-2| = t\,|x-2| = -t(x-2)$$

(en vertu de l'inégalité $1 < x < 2$ la grandeur $x - 2$ est négative). Portant dans le second membre l'expression de x en fonction de t, nous trouvons:

$$\sqrt{-(x-2)(x-1)} = \frac{t}{t^2+1}. \tag{7}$$

Nous avons alors en vertu de (6) et (7):

$$I = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-(x-2)(x-1)}} = \int \frac{2dt}{t^2} = -\frac{2}{t} + C = -2\sqrt{\frac{x-2}{-(x-1)}} + C.$$

REMARQUE. La première et la troisième substitution d'Euler suffisent pour calculer toute intégrale de la forme considérée. Nous rapportons toutefois, pour que notre exposé soit complet, la DEUXIÈME SUBSTITUTION D'EULER

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = tx + \sqrt{c}. \tag{8}$$

Elle est applicable quand $c > 0$. En élevant au carré et en divisant par x, nous obtenons x s'exprimant rationnellement en fonction de t; ensuite, (8) donne l'expression rationnelle du radical.

§ 313. Intégrales de la forme $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$

Les intégrales de cette forme deviennent rationnelles par la substitution

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z, \tag{1}$$

d'où

$$\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \quad \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}, \tag{2}$$

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2}. \tag{3}$$

EXEMPLE. $I = \int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

Nous obtenons à l'aide de (2) et (3):

$$I = \int \frac{2dz}{(1+z^2)\left(3+5\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)} = \int \frac{dz}{4-z^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+z}{2-z}\right| + C.$$

Portant ici $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ nous trouvons:

$$I = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

§ 314. Intégrale définie (*)

Soit $f(x)$ une fonction continue à l'intérieur de l'intervalle (a, b) et à ses extrémités. Prenons à l'intérieur de cet intervalle n points successifs $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n$ (fig. 327, où $n = 5$). Pour unifier les notations désignons a par x_0 et b par x_{n+1}. L'intervalle (a, b) est ainsi divisé en $n+1$ intervalles partiels $(x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, x_{n+1})$.

Prenons dans chacun de ces intervalles partiels (à l'intérieur ou à l'une de ses extrémités) un point [le point ξ_1 dans l'intervalle (x_0, x_1), ξ_2 dans l'intervalle (x_1, x_2), etc.].

Formons la somme

$$S_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_{n+1})(x_{n+1} - x_n). \tag{1}$$

On a le théorème suivant:

THÉORÈME. Si, lorsque le nombre des intervalles partiels (x_0, x_1), (x_1, x_2), ... croît indéfiniment, le plus grand d'eux tend vers zéro, la somme S_n tend vers une limite S. Le nombre S est le même pour toute division de l'intervalle en intervalles partiels et pour tout choix des points $\xi_1, \xi_2, \ldots$

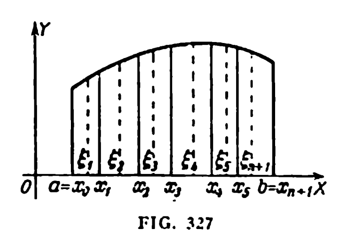


FIG. 327

La fig. 328 illustre ce théorème. La somme S_n est numériquement égale à l'aire des rectangles hachurés [la base du premier rectangle à gauche est égale à $x_1 - x_0$, sa hauteur est $KL = f(\xi_1)$; son aire est donc

(*) Nous recommandons de lire au préalable § 292, 2.

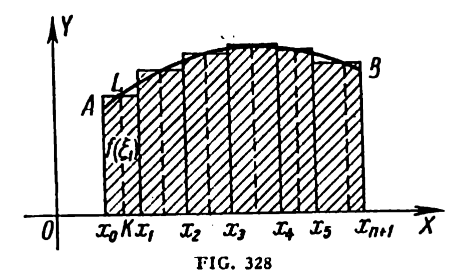


FIG. 328

$f(\xi_1)\ (x_1 - x_0)$, etc.]. Plus les bases des rectangles sont petites et plus l'aire limitée par le contour polygonal est proche de l'aire du «trapèze mixtiligne» x_0ABx_{n+1}, de sorte que la limite S de la somme S_n est numériquement égale à l'aire x_0ABx_{n+1}.

On emploie souvent une notation abrégée de la somme (1)

$$\Sigma f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}). \tag{2}$$

Ici le signe Σ indique que l'expression (2) est la somme de termes du même type. L'expression $f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1})$ indique la loi de formation des termes; quand $i = 1$, on obtient le premier terme, quand $i = 2$, le second, etc. On utilise également l'écriture plus détaillée

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} f(\xi_i)\ (x_i - x_{i-1}). \tag{2a}$$

On précise ici que le premier terme correspond à la valeur $i = 1$ et le dernier à la valeur $i = n + 1$.

DÉFINITION. La limite vers laquelle tend la somme (1), quand le plus grand des intervalles partiels tend vers zéro, est appelée *intégrale définie* de la fonction $f(x)$. Les extrémités a, b de l'intervalle *(intervalle d'intégration)* sont appelées *limites* (ou *bornes*) *d'intégration*, a la limite inférieure et b la limite supérieure.

L'intégrale définie est notée

$$\int_a^b f(x)\ dx, \tag{3}$$

ce qui se lit ainsi: somme de a à b de $f(x)\ dx$.

La valeur de l'intégrale définie dépend de la forme de la fonction $f(x)$ et des valeurs des limites. L'argument de la fonction peut être

désigné par une lettre quelconque, par exemple y, de sorte que l'expression

$$\int_a^b f(y)\,dy \tag{4}$$

représente le même nombre que l'expression (3).

REMARQUE. La limite supérieure b peut être plus grande ou plus petite que la limite inférieure a. Dans le premier cas

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n < b. \tag{5}$$

Dans le second cas

$$a > x_1 > x_2 > \ldots > x_{n-1} > x_n > b. \tag{6}$$

COMPLÉMENT DE LA DÉFINITION. On suppose dans la définition que $a \neq b$. Toutefois, la notion d'intégrale définie est étendue au cas où $a = b$; notamment on estime que l'intégrale définie dont les deux limites sont égales vaut zéro:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \tag{7}$$

[cette convention est justifiée car l'intégrale (3) tend vers zéro quand a se rapproche de b, cf. fig. 327].

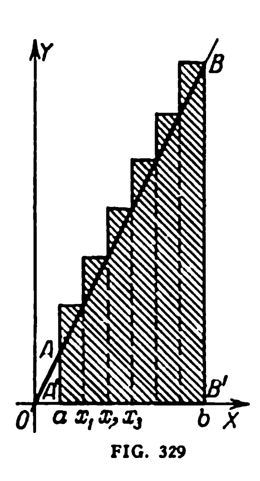


FIG. 329

EXEMPLE. Calculer $\int_a^b 2x\,dx$. Ici

$$f(x) = 2x. \tag{8}$$

SOLUTION. PREMIER PROCÉDÉ. Divisons l'intervalle (a, b) en parties égales (fig. 329); dans ce cas les abscisses

$$x_0 = a, \quad x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} = b$$

forment une progression arithmétique de raison

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = \frac{b-a}{n+1}. \tag{9}$$

Prenons pour $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les extrémités de droite des intervalles successifs (a, x_1), (x_1, x_2), ... de sorte que

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2, \ldots, \quad \xi_n = x_n, \quad \xi_{n+1} = b;$$
$$f(\xi_1) = 2x_1, f(\xi_2) = 2x_2, \ldots, f(\xi_n) = \\ = 2x_n, f(\xi_{n+1}) = 2b. \tag{10}$$

En vertu de (8) et de (10) la somme (1) prend la forme

$$S_n = 2x_1(x_1 - x_0) + 2x_2(x_2 - x_1) + \dots + 2x_n(x_n - x_{n-1}) +$$
$$+ 2x_{n+1}(x_{n+1} - x_n) = 2\frac{b-a}{n+1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}).$$

Sommant la progression arithmétique, nous trouvons:

$$S_n = 2\,\frac{b-a}{n+1}\,\frac{(x_1 + x_{n+1})(n+1)}{2} = (b-a)(x_1+b). \tag{11}$$

Lorsque le nombre des intervalles égaux croît indéfiniment, leur longueur tend vers *zéro*; x_1 tend alors vers a. C'est pourquoi

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (b-a)(a+b) = b^2 - a^2;$$

et, par conséquent,

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2. \tag{12}$$

On a de même

$$\int_a^b 2y\,dy = b^2 - a^2,$$

$$\int_a^b 2t\,dt = b^2 - a^2,$$

etc.

La grandeur $b^2 - a^2$ est l'aire S du trapèze $A'ABB'$ (fig. 329); en effet,

$$S = \frac{1}{2}(A'A + B'B)\,A'B' = \frac{1}{2}(2a+2b)(b-a) = b^2 - a^2.$$

Second procédé. Divisons l'intervalle (a, b) en parties inégales de sorte que les points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ forment une progression géométrique (*) (fig. 330)

$$x_0 = a, \quad x_1 = aq, \dots, x_n = aq^n, \quad x_{n+1} = b = aq^{n+1}. \tag{13}$$

Cette dernière égalité donne:

$$q^{n+1} = \frac{b}{a}. \tag{14}$$

(*) Cela est possible si les deux limites a, b sont de même signe (aucune d'elles ne doit être nulle). Dans le procédé précédent les nombres a et b pouvaient être arbitraires.

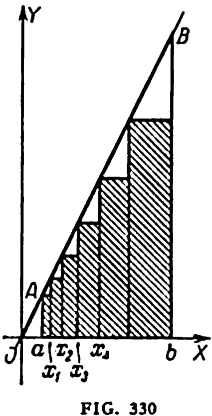


FIG. 330

Prenons pour $\xi_1, \xi_2, \ldots$ les extrémités de gauche des intervalles successifs (a, x_1), (x_1, x_2), ... de sorte que

$$\xi_1 = a, \quad \xi_2 = x_1, \ldots, \quad \xi_n = x_{n-1}, \quad \xi_{n+1} = x_n.$$

La somme (1) devient alors

$$S_n = 2x_0(x_1 - x_0) + 2x_1(x_2 - x_1) + \ldots + 2x_n(x_{n+1} - x_n) = 2a^2(q-1)[1 + q^2 + \ldots + q^{2n}].$$

L'expression entre crochets est une progression géométrique de raison q^2. Nous trouvons en la sommant:

$$S_n = 2a^2(q-1)\frac{q^{2(n+1)} - 1}{q^2 - 1} = \frac{2a^2[(q^{n+1})^2 - 1]}{q+1}$$

ou, en vertu de (14),

$$S_n = \frac{2a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 1\right]}{q+1} = \frac{2(b^2 - a^2)}{q+1}. \tag{15}$$

Lorsque n croît indéfiniment, la raison q, comme le montre (14), tend vers l'unité:

$$\lim_{n \to \infty} q = 1. \tag{16}$$

Les longueurs de tous les intervalles partiels tendent vers zéro. Nous avons alors en vertu de (15) et (16):

$$\lim S_n = b^2 - a^2,$$

c'est-à-dire

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2.$$

§ 315. Propriétés de l'intégrale définie

1. Si on intervertit les limites d'intégration, l'intégrale définie change de signe:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \tag{1}$$

Cette propriété découle de la comparaison de la somme S_n pour les deux intégrales.

2.
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{2}$$

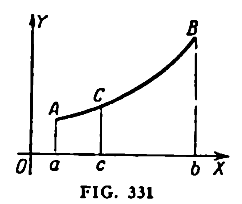


FIG. 331

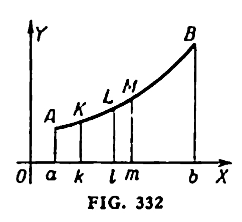


FIG. 332

Cette propriété est illustrée par la fig. 331 (aire $aABb$ = aire $aACc$ + + aire $cCBb$), mais elle est valable également dans le cas où le point c est extérieur à l'intervalle (a, b).

2a. On peut prendre non pas un, mais plusieurs points; par exemple pour trois points k, l, m on a:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^k f(x)\,dx + \int_k^l f(x)\,dx + \int_l^m f(x)\,dx + \int_m^b f(x)\,dx.$$

L'ordre des points est indifférent; le cas où a, k, l, m, b sont pris dans l'ordre de croissance (fig. 332) ou de décroissance est pratiquement important.

3. L'intégrale de la somme algébrique d'un nombre fixe de termes est égale à la somme algébrique des intégrales de ces termes; ainsi, dans le cas de trois termes

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx. \tag{3}$$

4. On peut faire sortir une constante du signe somme

$$\int_a^b mf(x)\,dx = m\int_a^b f(x)\,dx. \tag{4}$$

§ 316. Interprétation géométrique de l'intégrale définie

Considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

dont la limite inférirure est plus petite que la limite supérieure ($a < b$) (*)

(*) Le cas $a > b$ se ramène au cas considéré en vertu du § 315, 1.

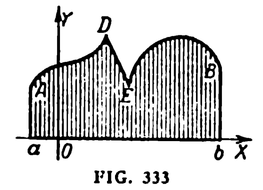


FIG. 333

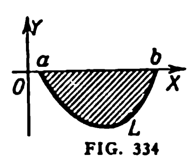


FIG. 334

Si la fonction $f(x)$ est positive à l'intérieur de l'intervalle (a, b) (fig. 333), l'intégrale est numériquement égale (§ 314) à l'aire définie par les ordonnées de la courbe $y = f(x)$ ($aADEBb$) sur la fig. 333.

Si la fonction $f(x)$ est négative à l'intérieur de (a, b) (fig 334), l'intégrale est en valeur absolue égale à l'aire définie par les ordonnées, mais a une valeur négative.

Supposons maintenant que la fonction $f(x)$ change de signe un nombre quelconque de fois dans l'intervalle (a, b) (fig. 335). L'intégrale est alors égale à la différence de deux nombres dont l'un exprime l'aire définie par les ordonnées positives et l'autre l'aire définie par les ordonnées négatives (cf. § 315, 2a). Ainsi, pour le cas représenté sur la fig. 335,

$$\int_a^b f(x)\,dx = (S_1 + S_3 + S_5) - (S_2 + S_4).$$

Exemple. L'intégrale $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$ est égale (§ 314, exemple) à $1^2 - (-2)^2 = -3$. Ce nombre est égal à la différence des aires (fig. 336)

$$ObB = \frac{1}{2} Ob \cdot bB = 1$$

et

$$OaA = \frac{1}{2} aO \cdot Aa = 4.$$

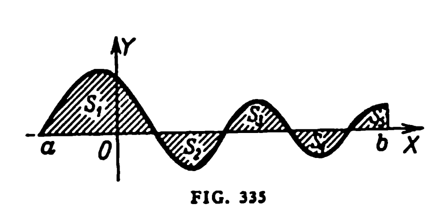


FIG. 335

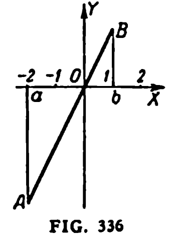


FIG. 336

§ 317. Interprétation mécanique de l'intégrale définie

1. Chemin parcouru par un point matériel. Supposons qu'un point matériel se déplace dans une direction quelconque avec la vitesse

$$v = f(t)$$

(t est la durée du trajet). On demande de trouver le chemin s parcouru par le point à partir de l'instant $t = T_1$ jusqu'à l'instant $t = T_2$.

Si la vitesse est constante, nous avons:

$$s = v(T_2 - T_1).$$

Si la vitesse est variable, pour trouver s il faut partager l'intervalle de temps en intervalles partiels

$$(T_1, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_{n-1}, t_n), (t_n, T_2).$$

Soit τ_1 un instant de l'intervalle (T_1, t_1), τ_2 un instant de l'intervalle (t_1, t_2), etc.

La grandeur $f(\tau_1)$ est la vitesse à l'instant τ_1 ; le produit $f(\tau_1)(t_1 - T_1)$ exprime approximativement le chemin parcouru au cours du premier intervalle de temps. De même $f(\tau_2)(t_2 - t_1)$ exprime approximativement le chemin parcouru au cours du second intervalle de temps, etc. Plus les intervalles partiels sont petits et plus la somme

$$s_n = f(\tau_1)(t_1 - T_1) + f(\tau_2)(t_2 - t_1) + \ldots + f(\tau_{n+1})(T_2 - t_n)$$

exprime exactement le chemin s. La limite de la somme s_n, c'est-à-dire l'intégrale

$$\int_{T_1}^{T_2} f(t)\, dt,$$

donne la valeur exacte du chemin s.

Exemple. La vitesse du point matériel est en raison du temps écoulé depuis l'instant initial:

$$v = mt.$$

Trouver le chemin parcouru depuis l'instant initial jusqu'à l'instant T.

Solution. Le chemin cherché s'exprime par l'intégrale de la fonction mt; la limite inférieure est égale à zéro et la limite supérieure à T

$$s = \int_0^T mt\, dt = m \int_0^T t\, dt$$

(§ 315, 4). Nous avons (§ 314, exemple) que $\int_a^b 2t\,dt = b^2 - a^2$. Par conséquent (§ 315, 4), $\int_a^b t\,dt = \frac{b^2 - a^2}{2}$. Quand $a = 0$ et $b = T$, nous avons:

$$s = m\int_0^T t\,dt = \frac{1}{2}mT^2.$$

2. Travail d'une force. Si une force constante P agit sur un point matériel se déplaçant dans la direction de la force, le travail A de la force sur le segment (s_1, s_2) est trouvé d'après la formule

$$A = P(s_2 - s_1).$$

Si la direction de la force P est constante, mais si la grandeur de P varie en fonction du chemin s, autrement dit si $P = f(x)$, le travail s'exprime par la formule

$$A = \int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds.$$

§ 318. Evaluation de l'intégrale définie

Théorème 1. Si m est la plus petite et M la plus grande valeur de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle (a, b), alors la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ est comprise entre $m(b - a)$ et $M(b - a)$. Quand $a < b$, nous avons:

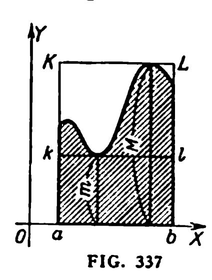


FIG. 337

$$m(b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b - a). \qquad (1)$$

Quand $a > b$, les inégalités changent de signes.

Géométriquement, l'aire hachurée sur la fig. 337 est plus grande que celle du rectangle $ablk$ et plus petite que celle du rectangle $abLK$.

Exemple. Evaluer l'intégrale $\int_4^6 2x\,dx$.

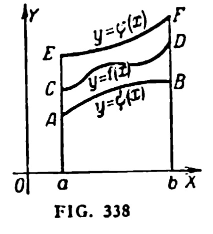


FIG. 338

SOLUTION. La plus petite valeur de la fonction $2x$ dans l'intervalle $(4, 6)$ est $m = 2 \cdot 4 = 8$, la plus grande $M = 2 \cdot 6 = 12$. Enfin $b - a = 6 - 4 = 2$. Cela signifie que la valeur de l'intégrale est comprise entre $8 \cdot 2 = 16$ et $12 \cdot 2 = 24$;

$$16 < \int_a^b 2x\,dx < 24.$$

La valeur exacte de l'intégrale est (§ 314, exemple) égale à 20.

THÉORÈME 2. Si en chaque point de l'intervalle (a, b) on a les inégalités

$$\psi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x), \qquad (2$$

alors

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (3)$$

GÉOMÉTRIQUEMENT (fig. 338), aire $aABb$ < aire $aCDb$ < aire $aEFb$.
Le théorème 1 est un cas particulier du théorème 2 [$\psi(x) = m$, $\varphi(x) = M$].
REMARQUE. Le théorème 2 affirme que l'on peut intégrer une inégalité. Par contre, on ne peut la dériver.

§ 318a. Inégalité de Bouniakovski

L'évaluation de l'intégrale d'après la formule (1) § 318 est habituellement très grossière. Il existe diverses formules donnant une évaluation plus précise; parmi elles un rôle important est dévolu à l'inégalité de Bouniakovski

$$\left[\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(x)]^2\,dx \cdot \int_a^b [\varphi(x)]^2\,dx.$$

EXEMPLE. Evaluer l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,dx$.

Mettons la fonction à intégrer sous la forme $1 \cdot \sqrt{1 + x^2}$, de sorte que $f(x) = 1$, $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$. L'inégalité de Bouniakovski donne alors:

$$I^2 \leqslant \int_0^1 1^2\,dx \cdot \int_0^1 (\sqrt{1 + x^2})^2\,dx = \int_0^1 (1 + x^2)\,dx = \frac{4}{3},$$

d'où

$$I \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}} < 1,155.$$

La formule (1) du § 318 aurait donné ($M = \sqrt{2}$); $I \leqslant \sqrt{2} < 1,415$. La valeur exacte de l'intégrale (trouvée d'après le procédé du § 323) est

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right) = 1,147\ldots$$

§ 319. Théorème de la moyenne

L'intégrale définie (*) est égale au produit de la longueur de l'intervalle d'intégration (a, b) par la valeur de la fonction à intégrer en un certain point ξ de l'intervalle (a, b):

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(\xi) \qquad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{1}$$

EXPLICATION. Déplaçons la droite KL (fig. 339) de la position CD vers la position EF. Au début l'aire $AKLB$ est inférieure à $\int_a^b f(x)\,dx$ (cf. § 318, théorème 1), à la fin elle lui est supérieure. A un certain instant intermédiaire on doit donc avoir l'égalité aire $AKLB = \int_a^b f(x)\,dx$.

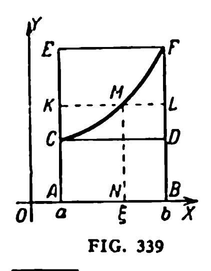


FIG. 339

La base du rectangle $AKLB$ est $AB = b - a$ et la hauteur l'ordonnée NM correspondant au point $N(\xi)$ de l'intervalle AB. C'est pourquoi

$$(b-a)\,f(\xi) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

REMARQUE 1. Le thèoreme de la moyenne établit que l'équation (1), où ξ est considérée comme l'inconnue, admet au moins une racine comprise entre a et b.

(*) Quand la notion d'intégrale est étendue au cas d'une fonction discontinue (§ 328), le théorème de la moyenne n'est plus valable.

Exemple. Pour $f(x) = 2x$ la formule (1) s'écrit

$$\int_a^b 2x\,dx = (b-a)\,2\xi. \qquad (2)$$

Le théorème affirme que ξ est compris entre a et b. En effet, l'intégrale est égale à $b^2 - a^2$ et la formule (2) donne:

$$\xi = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2},$$

autrement dit ξ est la moyenne arithmétique (*) de a et b.

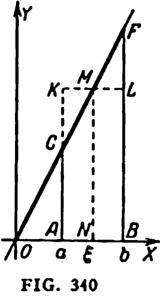


FIG. 340

Remarque 2. Le théorème des accroissements finis (§ 264) ne diffère en fait du théorème de la moyenne que par les notations. Désignons la fonction à intégrer dans la formule (1) par $f'(x)$. La formule (1) s'écrit alors

$$\int_a^b f'(x)\,dx = (b-a)\,f'(\xi).$$

Ici le premier membre est égal à $f(b) - f(a)$ (cf. plus bas § 322), et nous obtenons la formule des accroissements finis

$$f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(\xi)$$

[pour la fonction $f(x)$ possédant une dérivée continue].

§ 320. Intégrale définie fonction de sa limite supérieure

Quand les limites d'intégration a et b sont constantes, l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ de la fonction $f(x)$ possède une *valeur numérique déterminée.* Si la limite supérieure (ou inférieure) peut prendre diverses valeurs, alors l'intégrale devient une *fonction* de sa limite supérieure (ou inférieure). Sa forme dépend de celle de la fonction à intégrer $f(x)$ (ainsi que de la valeur de la limite inférieure constante). En ce qui concerne le caractère de cette dépendance cf. § 321, théorème 2.

(*) Géométriquement, la formule (2) exprime le théorème connu de l'aire du trapèze $ACFB$ sur la fig. 340; $AB = b - a$ est la hauteur, $NM = 2\xi$ la ligne médiane).

EXEMPLE 1. L'intégrale $\int_0^1 2t\,dt$ admet la valeur numérique 1, l'intégrale $\int_0^2 2t\,dt$ la valeur numérique 4, l'intégrale $\int_0^3 2t\,dt$ la valeur numérique 9, etc. Par conséquent, $\int_0^x 2t\,dt$ est une fonction de x; elle s'exprime par la formule

$$\int_0^x 2t\,dt = x^2. \tag{1}$$

REMARQUE. Dans la formule (1) la variable d'intégration et la limite supérieure variable sont désignées par des *lettres différentes* (t et x), car ces variables jouent des rôles différents *dans le processus d'intégration*. En effet, nous calculons *d'abord* (§ 314) la limite de la somme

$$S_n = 2\tau_1(t_1 - 0) + 2\tau_2(t_2 - t_1) + \ldots + 2\tau_{n+1}(x - t_n),$$

où $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont pris entre 0 et x et les nombres $\tau_1, \tau_2, \ldots$ appartiennent aux intervalles $(0, t_1)$, (t_1, t_2) ... Au cours de ce processus, x reste constant.

On fait *ensuite* varier x, et alors on n'a plus affaire à la variable t.

Si au lieu de (1) on écrit:

$$\int_0^x 2x\,dx = x^2, \tag{2}$$

la différence susmentionnée est voilée.

Toutefois, on utilise souvent l'écriture (2) et on écrit en général:

$$\int_a^x f(x)\,dx \tag{3}$$

[ainsi que $\int_a^t f(t)\,dt$, $\int_a^s f(s)\,ds$, etc.]. Le fait est que *lorsque l'on a réalisé l'intégration*, la limite variable a *la même signification* (géométrique, mécanique, etc.) que la variable d'intégration (cf. exemples 2 et 3).

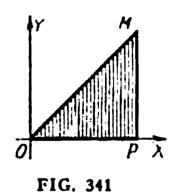


FIG. 341

EXEMPLE 2. L'aire S du triangle OPM (fig. 341) s'exprime par intégrale $\int_0^p x\,dx$:

$$S = \int_0^p x\,dx = \frac{p^2}{2}. \quad (4)$$

Supposons que l'ordonnée PM soit courante: alors l'intégrale (4) est une fonction de sa limite supérieure; conformément à cela nous écrirons t au lieu de p:

$$S = \int_0^t x\,dx = \frac{t^2}{2}. \quad (5)$$

L'écriture (5) est juste mais incommode, car dans la formule $S = \frac{t^2}{2}$ la lettre t représente l'abscisse que nous avons désignée par x. C'est pourquoi on préfère souvent l'écriture non rigoureuse

$$S = \int_0^x x\,dx = \frac{x^2}{2}. \quad (6)$$

EXEMPLE 3. La vitesse v d'un corps en chute libre s'exprime par la formule

$$v = gt. \quad (7)$$

Le chemin s parcouru par le corps en chute libre au cours de l'intervalle de temps $(0, T)$ est égal (§ 317, 1) à l'intégrale $\int_0^T gt\,dt$:

$$s = \int_0^T gt\,dt = \frac{1}{2}gT^2. \quad (8)$$

L'écriture (8) est juste, mais dans les formules (7) et (8) les arguments sont notés différemment, alors que leur signification physique est la même. C'est pourquoi on écrit au lieu de (8):

$$s = \int_0^t gt\,dt = \frac{1}{2}gt^2.$$

§ 321. Différentielle de l'intégrale

THÉORÈME 1. La différentielle de l'intégrale à limite supérieure variable (*) coïncide avec l'expression sous le signe somme

$$d\int_a^x f(x)\,dx = f(x)\,dx. \tag{1}$$

Il est plus juste d'écrire la formule (1) sous la forme $d\int_a^x f(t)\,dt = f(x)\,dx$ (cf. § 320).

EXEMPLE.

$$d\int_0^x 2x\,dx = 2x\,dx. \tag{1a}$$

Vérifions cette égalité. Nous avons (§ 320):

$$\int_0^x 2x\,dx = x^2.$$

En prenant la différentielle nous retrouvons (1a).

REMARQUE. Nous obtenons de (1):

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)\,dx = f(x), \tag{2}$$

autrement dit *la dérivée par rapport à la limite supérieure de l'intégrale définie coïncide avec la fonction à intégrer*. On peut également énoncer cette proposition sous la forme suivante:

THÉORÈME 2. L'intégrale à limite supérieure variable est l'une des primitives (§ 293) de la fonction à intégrer.

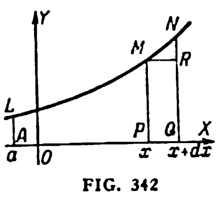


FIG. 342

EXPLICATION DE LA FORMULE (1). L'aire $ALMP$ (fig. 342) s'exprime par l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$. Quand x reçoit un accroissement $dx = PQ$, l'aire $ALMP$ reçoit un accroissement $PMNQ$. Cet accroissement se compose

---

(*) L'intégrale à limite supérieure variable x est toujours une fonction *différentiable* de x.

du rectangle $PMRQ$ et du triangle mixtiligne MNR. L'aire du rectangle est égale à $PM \cdot PQ = f(x)\,dx$; elle est proportionnelle à dx, et l'aire du triangle MNR est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à dx (sur la fig. 342 elle est plus petite que $MR \cdot RN = dx\Delta y$). Cela signifie (§ 230) que l'expression sous le signe somme $f(x)\,dx$ est la différentielle de l'intégrale $\int_a^x f(x)\,dx$.

EXPLICATION LE DA FORMULE (2). Si $f(t)$ est la vitesse du point à l'instant t, alors $\int_a^t f(t)\,dt$ est (§ 317, 1) le chemin s parcouru par le point depuis l'instant initial a:

$$s = \int_a^t f(t)\,dt. \tag{3}$$

La dérivée $\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\int_a^t f(t)\,dt$ est la vitesse du point (§ 223). Par conséquent, $\frac{d}{dt}\int_a^t f(t)\,dt = f(t)$.

§ 322. Intégrale d'une différentielle. Formule de Newton-Leibniz

Le théorème suivant ramène le calcul de l'intégrale définie à la recherche de l'intégrale indéfinie (cf. § 323).

THÉORÈME. L'intégrale de la différentielle de la fonction $F(x)$ est égale à l'accroissement de la fonction $F(x)$ dans l'intervallle d'intégration:

$$\int_a^b dF(x) = F(b) - F(a). \tag{1}$$

En d'autres termes, si $F(x)$ est une primitive quelconque de la fonction à intégrer $f(x)$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

La formule (2) est souvent appelée *formule de Newton-Leibniz* (*).

EXEMPLE 1. Nous avons (§ 314):

$$\int_a^b 2x\,dx = b^2 - a^2. \tag{3}$$

L'expression sous le signe somme est la différentielle de la fonction x^2 ($dx^2 = 2x\,dx$). Quand on passe de $x = a$ à $x = b$, la fonction x^2 reçoit l'accroissement $b^2 - a^2$. La formule (3) exprime le fait que l'intégrale est égale à cet accroissement.

EXEMPLE 2. Calculer l'intégrale $\int_a^b 3x^2\,dx$.

SOLUTION. L'expression sous le signe somme étant la différentielle de la fonction x^3, nous obtenons d'après la formule (2):

$$\int_a^b 3x^2\,dx = \int_a^b d(x^3) = b^3 - a^3. \tag{4}$$

EXPLICATION. L'intégrale $\int_a^b 3x^2\,dx$ est égale (§ 314) à la limite de la somme

$$3x_0^2(x_1 - x_0) + 3x_1^2(x_2 - x_1) + \ldots + 3x_{n-1}^2(x_n - x_{n-1}) + 3x_n^2(x_{n+1} - x_n) \tag{5}$$

pour n croissant indéfiniment.

Le premier terme est la différentielle de la fonction x^3 pour l'intervalle (x_0, x_1), le second pour l'intervalle (x_1, x_2), etc. Remplaçons chaque différentielle par l'accroissement correspondant. Nous obtenons la somme

$$(x_1^3 - x_0^3) + (x_2^3 - x_1^3) + \ldots + (x_n^3 - x_{n-1}^3) + (x_{n+1}^3 - x_n^3). \tag{6}$$

Ouvrons les parenthèses. Tous les termes s'annulent sauf $x_0^3 = a^3$ et $x_{n+1}^3 = b^3$, de sorte que la somme (6) est exactement égale à $b^3 - a^3$.

Le passage de (5) à (6) est lié à diverses erreurs, mais chacune d'elles est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à l'accroissement correspondant de l'argument. C'est pourquoi, en dépit de l'accumulation de ces erreurs, la somme de ces dernières est un infiniment petit. Cela signifie que lorsque le nombre de termes de l'expression (5) augmente indéfiniment, la différence de (5) et de $b^3 - a^3$ est infiniment petite. En d'autres termes, $b^3 - a^3$ est la limite de la somme (5), c'est-à-dire

$$\int_a^b 3x^2\,dx = b^3 - a^3.$$

(*) En effet, Newton et Leibniz ont été les premiers à utiliser le lien entre la dérivation et l'intégration pour le calcul des intégrales. On ne trouve d'ailleurs pas de trace de la formule (2) dans leurs œuvres. Sous forme géométrique le théorème du présent paragraphe (de même que le théorème 1 du § 321) a été établi par Barrow, le maître de Newton.

On établit de même la formule générale (1).

INTERPRÉTATION MÉCANIQUE. Supposons que le point se déplace dans une direction quelconque, et soit $F(t)$ la distance du point à la position initiale à l'instant t. La dérivée $\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$ est (§ 223) la vitesse. Par conséquent, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ exprime (§ 317) le chemin s parcouru depuis l'instant $t = a$ jusqu'à l'instant $t = b$:

$$s = \int_a^b f(t)\,dt. \tag{7}$$

Or, à l'instant $t = a$ la distance à la position initiale est $F(a)$ et à l'instant $t = b$ elle est $F(b)$. Cela signifie que

$$s = F(b) - F(a). \tag{8}$$

Comparant (7) et (8) nous obtenons:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

§ 323. Calcul de l'intégrale définie à l'aide de l'intégrale indéfinie

RÈGLE. Pour calculer l'integrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$, il suffit de trouver l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$, de remplacer dans l'expression trouvée x d'abord par la limite supérieure, puis par la limite inférieure, et de retrancher la seconde valeur de la première.

Cette règle découle du théorème du § 322.

REMARQUE. Il n'est pas nécessaire d'écrire la constante d'intégration de l'intégrale indéfinie. De toute facon elle s'annule lors de la soustraction.

EXEMPLE 1. Calculer $\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx$.

SOLUTION. Trouvons l'intégrale indéfinie

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Posant $x = 3$, nous trouvons $27 + C$; pour $x = -2$ nous obtenons $-8 + C$. Retranchant la seconde valeur de la première nous trouvons:

$$\int_{-2}^{3} 3x^2\,dx = (27 + C) - (-8 + C) = 27 - (-8) = 35. \tag{1}$$

Le terme constant C s'est annulé lors de la soustraction.

EXEMPLE 2. Calculer $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$.

SOLUTION. Nous avons: $\int \sin x\,dx = -\cos x$ (nous omettons la constante d'intégration). Par conséquent,

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = -[\cos\pi - \cos 0] = 2. \tag{2}$$

NOTATION ADOPTÉE. L'écriture

$$F(x)\Big|_a^b \text{ ou } \Big[F(x)\Big]_a^b \tag{3}$$

est équivalente à $F(b) - F(a)$. Par exemple, au lieu de $-[\cos\pi - \cos 0]$ on écrit $-\cos x\Big|_0^{\pi}$ ou $\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$.

EXEMPLE 3. Calculer $\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

SOLUTION.

$$\int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \left[\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}\right]_0^a = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 1 - \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4a}.$$

EXEMPLE 4.

$$\int_3^5 \frac{dx}{(x-2)^2} = -\frac{1}{x-2}\Big|_3^5 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

§ 324. Intégration par parties de l'intégrale définie

On peut appliquer directement l'intégration par parties (§ 301) à l'intégrale définie en utilisant la formule

$$\int_{x_1}^{x_2} u\,dv = uv\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} v\,du. \qquad (1)$$

Il est plus avantageux d'appliquer la formule (1) que de calculer au préalable l'intégrale indéfinie, particulièrement lorsqu'on doit répéter l'intégration par parties.

EXEMPLE 1. $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2}$.

Posant

$$u = x, \qquad dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right],$$

nous trouvons:

$$I = \int_0^{\sqrt{3}} x d\left[-\frac{1}{2(1+x^2)}\right] = -\frac{x}{2(1+x^2)}\Bigg|_0^{\sqrt{3}} + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{2(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}307.$$

EXEMPLE 2. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\,dx$.

Nous avons:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(-\cos x) = -x\cos x\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx.$$

Le premier terme s'annule; nous obtenons:

$$I = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

§ 325. Changement de variable dans l'intégrale définie

RÈGLE. Pour calculer l'intégrale $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ on peut introduire u variable auxiliaire z liée à x par une certaine relation. De même q pour l'intégrale indéfinie (§ 300), l'expression sous le signe somme devie $f_1(z)\,dz$. Il faut de plus remplacer les limites x_1, x_2 par les limites z_1, telles qu'à ces valeurs de la variable z correspondent respectiveme les valeurs x_1, x_2 de la variable x. Si cela est possible, nous avons (

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx = \int\limits_{z_1}^{z_2} f_1(z)\,dz. \qquad ($$

EXEMPLE 1. Calculer

$$\int\limits_{5}^{13} \sqrt{2x-1}\,dx.$$

SOLUTION. Introduisons la variable auxiliaire z liée à x par la relati

$$z = 2x - 1. \qquad ($$

Exprimant x en fonction de z nous trouvons:

$$x = \frac{z+1}{2}. \qquad ($$

L'expression sous le signe somme $\sqrt{2x-1}\,dx$ devient alors

$$\frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz.$$

Les limites $x_1 = 5$, $x_2 = 13$ doivent être remplacées par de nouvel limites z_1, z_2 conformément à la formule (2):

$$z_1 = 2x_1 - 1 = 9, \qquad z_2 = 2x_2 - 1 = 25.$$

Nous avons alors en vertu de (1):

$$\int\limits_{5}^{13} \sqrt{2x-1}\,dx = \int\limits_{9}^{25} \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} dz = \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} \Bigg|_{9}^{25} = 32\frac{2}{3}.$$

(*) On suppose: 1) que l'on peut exprimer la relation entre x et z par la form $x = \varphi(z)$, où la fonction $\varphi(z)$ possède une dérivée continue dans l'intervalle (z_1, z_2); 2) (la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs que prend x quand z varie dans l' tervalle (z_1, z_2).

EXEMPLE 2. Trouver $\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.

SOLUTION. La substitution

$$x = a \sin t \tag{4}$$

ramène (§ 303, exemple 1) l'expression sous le signe somme à la forme

$$a^2 \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t \, dt = \pm a^2 \cos^2 t \, dt. \tag{5}$$

On prend le signe supérieur si t appartient au premier ou au quatrième quadrant, et le signe inférieur si t appartient au second ou au troisième quadrant.

On doit choisir les nouvelles limites t_1, t_2 de sorte que

$$-a = a \sin t_1, \quad a = a \sin t_2.$$

On peut le faire de deux façons. On peut prendre:

$$t_1 = -\frac{\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas t varie dans les limites du quatrième et du premier quadrant, de sorte que nous prenons dans (5) le signe supérieur; nous obtenons:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

On peut prendre également:

$$t_1 = \frac{3\pi}{2}, \quad t_2 = \frac{\pi}{2};$$

mais alors dans (5) on prend le signe inférieur; nous obtenons:

$$\int_{-a}^{+a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = -a^2 \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Si nous avions pris dans (5) le signe supérieur, nous aurions obtenu le résultat erroné $-\frac{\pi a^2}{2}$.

REMARQUE. Le changement de variable peut conduire à une erreur si la condition formulée dans la règle n'est pas satisfaite, à savoir s'il

n'existe pas des valeurs z_1, z_2 qui correspondent aux valeurs x_1, x_2 des limites d'intégration. Nous rencontrerons de semblables erreurs dans l'exemple 3.

Exemple 3. Calculer les intégrales

$$I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx, \quad I_2 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, dx$$

(elles ne diffèrent que par la valeur de la limite supérieure).

Introduisons la fonction auxiliaire

$$x^2 = z. \tag{6}$$

Lors de la transformation de l'expression sous le signe somme $\sqrt{1-x^2}\,dx$ le facteur $\sqrt{1-x^2}$ est remplacé par $\sqrt{1-z}$. Pour transformer le facteur dx, exprimons x en fonction de z; nous obtenons:

$$x = \pm \sqrt{z}. \tag{7}$$

Il parait que le plus simple est de faire le changement de variable

$$x = + \sqrt{z}. \tag{8}$$

Toutefois. il est alors impossible de remplacer dans les intégrales I_1 et I_2 la limite inférieure $x_1 = -1$ par une nouvelle limite z_1 qui correspondrait, conformément à la formule (8), à la valeur $x = -1$. C'est pourquoi posons

$$x = -\sqrt{z} \tag{9}$$

et essayons d'appliquer cette substitution à l'intégrale I_1. Maintenant les valeurs des limites d'intégration $x_1 = -1$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$ correspondent aux valeurs $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{4}$. Nous trouvons de (9):

$$dx = -\frac{dz}{2\sqrt{z}} \tag{10}$$

et nous obtenons en vertu de la formule (1):

$$I_1 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}\int_{1}^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\, dz, \tag{11}$$

ou, en intervertissant les limites,

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{4}}^{1} \sqrt{\frac{1-z}{z}}\, dz. \tag{12}$$

Introduisons une nouvelle fonction auxiliaire

$$\sqrt{\frac{1-z}{z}} = t \tag{13}$$

donnant les nouvelles limites

$$t_1 = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}} = \sqrt{3}, \qquad t_2 = 0.$$

La substitution correspondante est:

$$x = \frac{1}{1+t^2}, \quad dx = -\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}, \tag{14}$$

et nous obtenons:

$$I_1 = \frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{3}}^{0} t\left[-\frac{2t\,dt}{(1+t^2)^2}\right] = \int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Nous trouvons comme dans l'exemple 1 § 324:

$$I_1 = -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6} \approx 0{,}307.$$

Si, au lieu de (9), nous avions fait le changement de variable (8) sans tenir compte du ait que la condition formulée dans la règle n'est plus valable, nous aurions obtenu au lieu de (12): $-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{4}}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$ et pour I_1 nous aurions trouvé une valeur erronée (— 0,307).

En ce qui concerne l'intégrale I_2, ni la substitution (8), ni la substitution (9) ne peuvent être appliquées, car la première ne donne pas de limite inférieure et la seconde de limite supérieure. Si l'on avait appliqué par erreur, disons, la substitution (8), on aurait obtenu pour I_2: $\frac{1}{2}\int\limits_{1}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx$, c'est-à-dire zéro. Ce résultat est évidemment faux puisque la fonction à intégrer $\sqrt{1-x^2}$ est positive dans tout l'intervalle d'intégration.

Pour calculer l'intégrale I_2 on peut la décomposer en deux termes

$$I_2 = \int\limits_{-1}^{0}\sqrt{1-x^2}\,dx + \int\limits_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Appliquons au premier terme la substitution (9) et à la seconde la substitution (8). Chacun de ces termes s'écrira alors

$$\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx,$$

de sorte que

$$I_2 = \int\limits_{0}^{1}\sqrt{\frac{1-x}{x}}\,dx. \tag{15}$$

C'est une intégrale impropre (§ 328), car la fonction à intégrer présente une discontinuité au point $x = 0$. Toutefois, dans ce cas également, on peut faire le changement de variable (14) (car la fonction $x = \frac{1}{1+t^2}$ est monotone; cf. § 328, remarque 3).

Nous trouvons que

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^2}.$$

Cette intégrale est aussi impropre (§ 327). Toutefois (§ 327, remarque 1), on peut l'intégrer par parties, de sorte qu'en procédant comme dans l'exemple 1 du § 324, nous trouvons:

$$I_2 = -\frac{t}{2(1+t^2)}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)}.$$

Le premier terme est nul, et nous obtenons en définitive:

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} t\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785.$$

§ 326. Intégrales impropres

La notion d'intégrale définie a été introduite (§ 314) pour un intervalle fini (a, b) et pour une fonction continue $f(x)$. Divers problèmes concrets (cf. exemples §§ 327 et 328) exigent d'étendre la notion d'intégrale définie à certains cas où ces deux conditions ne sont pas simultanément réalisées. A cette fin en plus du passage à la limite du § 314, on en effectue encore un. Les intégrales que l'on obtient sont dites *impropres* (à la différence des intégrales introduites au § 314 et dites *intégrales propres*). On considère au § 327 les intégrales impropres dont l'une ou les deux limites d'intégration sont infinies, au § 328 les intégrales impropres d'une fonction discontinue.

§ 327. Intégrales à limites infinies

Définition 1. Si l'intégrale

$$\int_a^{x'} f(x)\,dx \tag{1}$$

possède une limite finie quand $x' \to +\infty$, cette limite est appelée *intégrale de la fonction $f(x)$ de a à l'infini* et est notée

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx. \tag{2}$$

Ainsi, par définition

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x'\to+\infty}\int_a^{x'} f(x)\,dx. \qquad (3)$$

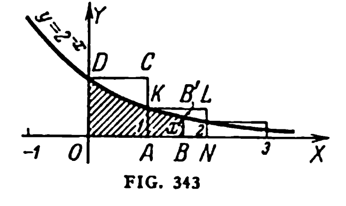


FIG. 343

l'intégrale (1) possède, quand $\to +\infty$, une limite infinie (*) ou possède pas du tout de limite, dit que *l'intégrale impropre* (2) *iverge*. Quand l'intégrale (2) possède une limite finie, on dit que l'intégrale (2) *converge*.

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx$.

SOLUTION. Nous avons:

$$\int_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2}(-2^{-x})\Big|_0^{x'} = \frac{1}{\ln 2}\left(1-\frac{1}{2^{x'}}\right).$$

Quand $x'\to+\infty$, cette expression possède la limite $\frac{1}{\ln 2}$.

Cela signifie que

$$\int_0^{+\infty} 2^{-x}\,dx = \lim_{x'\to+\infty}\int_0^{x'} 2^{-x}\,dx = \frac{1}{\ln 2} \approx 1{,}4.$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. L'intégrale $\int_0^{x'} 2^{-x}dx$ est représentée par l'aire $OBB'D$ (fig. 343) sous la courbe $y = 2^{-x}$. Si l'ordonnée BB' s'éloigne à l'infini, l'aire $OBB'D$ croît, mais non indéfiniment. Elle

---

(*) Si l'intégrale $\int_a^{x'} f(x)\,dx$ possède, quand $x'\to+\infty$, une limite infinie, on dit *(conventionnellement)* que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ est infinie et l'on écrit $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \infty$.

tend vers $\frac{1}{\ln 2}$. On dit que l'aire de la *portion de plan illimitée* sous la courbe $y = 2^{-x}$ est égale à $\frac{1}{\ln 2}$.

EXPLICATION. Considérons la figure 343. L'aire du rectangle $OACD$ est $OD \cdot OA = 1 \cdot 1 = 1$, celle du rectangle suivant $AK \cdot AN = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, celle du troisième $\frac{1}{4}$, etc. Avec la croissance du nombre de rectangles, la somme de leurs aires tend vers 2 (la somme de la progression infiniment décroissante). Il est naturel d'estimer que le nombre 2 est la mesure de l'aire de la portion de plan illimitée formée de rectangles exinscrits. L'aire de la portion de plan illimitée sous la courbe est encore plus petite.

EXEMPLE 2. Calculer $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}$.

SOLUTION. L'intégrale $\int\limits_{1}^{x'} \frac{dx}{x} = \ln x'$ a une limite infinie quand $x' \to +\infty$. L'intégrale impropre cherchée diverge (*).

GÉOMÉTRIQUEMENT, l'aire $AA'B'B$ (fig. 344) sous l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ croît indéfiniment (la portion de plan illimitée mixtiligne possède une aire infinie).

EXEMPLE 3. Deux boules électrisées de charges positives de e_1 et e_2 unités électrostatiques sont fixées sur une surface plane. La distance entre les centres est R cm. On lâche la boule de charge e_2 qui s'éloigne de e_1 sous l'action de la force de répulsion $F = \frac{e_1 e_2}{r^2}$ (r est la distance variable entre les centres en centimètres, F la valeur de la force en dynes).

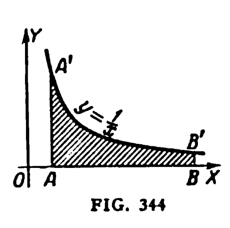


FIG. 344

Le travail de la force F sur le secteur (R, r') s'exprime (en ergs) par l'intégrale (§ 317):

$$\int\limits_{R}^{r'} \frac{e_1 e_2}{r^2} dr = e_1 e_2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r'} \right).$$

(*) Elle est alors infinie $\left(\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty \right)$. Cf. renvoi p. 471.

L'intégrale impropre

$$e_1e_2\int_{R}^{+\infty}\frac{dr}{r^2}=\lim_{r'\to\infty}\left[e_1e_2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r'}\right)\right]=\frac{e_1e_2}{R}$$

exprime la *réserve* totale *de travail* du système. En physique cette grandeur est appelée *potentiel.*

DÉFINITION 2. On appelle *intégrale de la fonction* $f(x)$ *de* $-\infty$ *à* a la limite de l'intégrale $\int_{x''}^{a} f(x)\,dx$ quand $x''\to-\infty$:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx=\lim_{x''\to-\infty}\int_{x''}^{a} f(x)\,dx. \qquad (4)$$

La convergence et la divergence de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ sont comprises dans le sens de la définition 1.

DÉFINITION 3. On appelle *intégrale de la fonction* $f(x)$ *de* $-\infty$ *à* $+\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx \qquad (5)$$

la somme

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx+\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Elle ne dépend pas du choix de a. On suppose que les deux intégrales impropres (6) convergent.

L'intégrale (5) exprime l'aire de la portion de plan sous la courbe $y=f(x)$ qui s'éloigne indéfiniment des deux côtés (la courbe VAU sur la fig. 345).

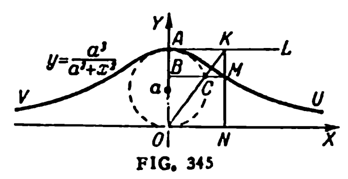


FIG. 345

EXEMPLE 4. Trouver l'aire de la portion de plan illimitée sous la courbe $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$ (agnésienne, fig. 345; cf. § 506).

SOLUTION. L'aire cherchée est représentée par l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2}. \tag{7}$$

Comme $\int_0^{x'} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} = a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x'}{a}$, alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} = a^2 \lim_{x' \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{x'}{a} = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Le premier terme est calculé de manière analogue et nous obtenons:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3\,dx}{a^2 + x^2} = \pi a^2. \tag{8}$$

REMARQUE 1. La formule fondamentale

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

appliquée à l'intégrale convergente $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ s'écrit

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(a).$$

Le symbole $F(\infty)$ signifie $\lim_{x' \to \infty} F(x')$.

On applique de manière analogue la formule d'intégration par parties. Pour calculer l'intégrale impropre $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ on peut utiliser la méthode de substitution à condition que la fonction $x = \varphi(z)$ soit monotone.

REMARQUE 2. Il est parfois utile de transformer une intégrale propre en intégrale impropre. Ainsi, pour calculer l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\,dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2} \tag{9}$$

il est préférable d'introduire la fonction auxiliaire

$$\operatorname{tg} x = z. \tag{10}$$

Nous obtenons:

$$\int_0^\infty \frac{z^2\, dz}{(1+z^3)^2} = -\frac{1}{3(1+z^3)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{3}. \tag{11}$$

En ramenant l'intégrale (9) à la forme (11), nous considérons l'intégrale donnée comme la limite de l'intégrale

$$\int_0^{x'} \frac{\sin^2 x \cos^2 x\, dx}{(\sin^3 x + \cos^3 x)^2} \quad \text{quand } x' \to \frac{\pi}{2}.$$

§ 328. Intégrale d'une fonction discontinue

DÉFINITION 1. Supposons que la fonction $f(x)$ ait une discontinuité au point $x = b$ et soit continue aux autres points de l'intervalle (a, b).

Si l'intégrale

$$\int_a^{x'} f(x)\, dx \tag{1}$$

possède une limite finie quand x' tend vers b (en restant inférieur à b), on appelle cette limite *intégrale impropre de a à b de la fonction f(x)* et on la note de même que l'intégrale propre correspondante:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x' \to b-0} \int_a^{x'} f(x)\, dx. \tag{2}$$

Pour les intégrales propres *on démontre* la formule (2); pour les intégrales impropres *on l'adopte en qualité de définition.*

On définit de même l'intégrale impropre quand la fonction $f(x)$ ne présente une discontinuité qu'à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle (a, b).

La convergence et la divergence de l'intégrale impropre sont comprises comme au § 327.

DÉFINITION 2. Si $f(x)$ admet une seule discontinuité en un point intérieur c de l'intervalle (a, b), alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx. \tag{3}$$

On suppose que les deux intégrales impropres du second membre convergent.

On démontre la formule (3) pour les intégrales propres; elle sert ici de *définition* pour l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$.

REMARQUE 1. La définition 2 peut être étendue au cas où $f(x)$ admet à l'intérieur de l'intervalle (a, b) deux, trois, etc., discontinuités. Ainsi, pour deux points c', c'' nous avons:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c'} f(x)\,dx + \int_{c'}^{c''} f(x)\,dx + \int_{c''}^b f(x)\,dx. \tag{3a}$$

EXEMPLE 1. Calculer

$$\int_0^a \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Cette intégrale est impropre, car la fonction à intégrer est discontinue (elle devient infinie) pour $x = a$. L'intégrale converge, car la fonction

$$\int_0^{x'} \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x'}{a} \tag{4}$$

tend vers la limite $\frac{\pi a^2}{2}$ quand $x' \to a$. Par conséquent, nous avons:

$$\int_0^a \frac{a^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi a^2}{2}. \tag{5}$$

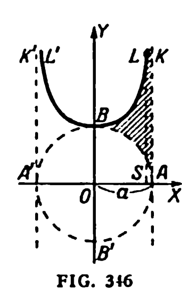


FIG. 346

GÉOMÉTRIQUEMENT, l'aire de la portion de plan illimitée $KAOBL$ (*) (c'est-à-dire la limite de l'aire $LSOB$ quand le point S tend vers A; fig. 346) est égale à l'aire du demi-cercle $BOB'A$; par conséquent, la figure hachurée s'étendant à l'infini est équivalente en grandeur au secteur AOB'.

EXEMPLE 2. Calculer $\int_{-a}^{+a} a \sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx$.

(*) Le rayon a du cercle est la moyenne proportionnelle entre l'ordonnée de la courbe $L'BL$ et l'ordonnée correspondante de la demi-circonférence $A'BA$; cela permet de construire aisément la courbe $L'BL$.

L'intégrale est impropre, car la fonction à intégrer devient infinie à l'intérieur de l'intervalle $(-a, +a)$ quand $x = 0$. En vertu de la définition 2 nous avons:

$$\int_{-a}^{a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx = a^{\frac{5}{3}}\int_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}}dx + a^{\frac{5}{3}}\int_{0}^{a} x^{-\frac{2}{3}}dx, \tag{6}$$

et en vertu de la définition (1)

$$\int_{-a}^{0} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{x'\to 0}\int_{-a}^{x'} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{x'\to 0} 3\left(a^{\frac{1}{3}} + x'^{\frac{1}{3}}\right) = 3a^{\frac{1}{3}}.$$

Il en est de même pour le second terme de la formule (6). Nous obtenons en définitive:

$$\int_{-a}^{+a} a\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}\,dx = 6a^2.$$

GÉOMÉTRIQUEMENT, l'aire de la portion de plan illimitée $ADLL'D'A'$ (fig. 347) est trois fois plus grande que l'aire du rectangle $A'ADD'$ (de sorte que la figure infinie $DLL'D'$ est égale en grandeur au carré construit sur DD').

EXEMPLE 3. Dans l'expression $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x^2}$ la fonction à intégrer est discontinue au point $x = 0$. D'autre part, les intégrales impropres $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ et $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ divergent (car les intégrales $\int_{-1}^{x'}\frac{dx}{x^2} = 1 - \frac{1}{x'}$ et $\int_{x''}^{1}\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x''} - 1$ ont des limites infinies quand $x' \to -0$ et $x'' \to +0$). Par conséquent, l'expression donnée ne représente aucune intégrale impropre (dans le sens de la définition 2). La portion de plan illimitée $ADLL'D'A'$ (fig. 348) sous la courbe $y = \frac{1}{x^2}$ possède une aire infinie.

REMARQUE 2. Appliquant la formule fondamentale du calcul intégral

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) \tag{7}$$

à l'expression $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$, nous aurions obtenu le nombre négatif -2; ce résultat erroné (la

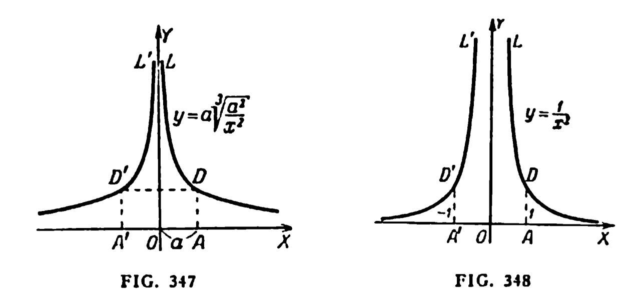


FIG. 347 FIG. 348

fonction à intégrer $\frac{1}{x^2}$ est partout positive!) est dû au fait que l'expression $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$ n'a pas de sens. Si, par contre, les intégrales impropres

$$\int_a^c f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx,$$

figurant dans (3), convergent, alors la formule (7) est toujours *vraie* pour l'intégrale impropre $\int_a^b f(x)\,dx$.

REMARQUE 3. En ce qui concerne l'intégration par parties et le procédé de substitution, on peut répéter ce qui a été dit dans la remarque 1 du § 327.

§ 329. Calcul approché des intégrales

Toutes les intégrales ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires (§ 309) ou bien les expressions correspondantes sont très compliquées. La fonction à intégrer est souvent donnée par la table ou le graphe. Dans ces cas on recourt aux méthodes de calcul approché des intégrales.

La *méthode des séries entières* de Newton (cf. § 270) est la première en date. Elle est appliquée aujourd'hui encore (mais sur une base plus rigoureuse; cf. plus bas § 402).

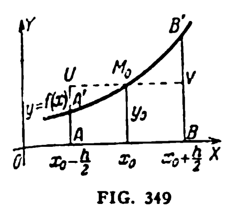


FIG. 349

Une autre méthode, souvent appelée *méthode des quadratures mécaniques* (*), consiste à remplacer la fonction à intégrer $y = f(x)$ par un polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \tag{1}$$

qui pour les valeurs $x = x_0$, $x = x_1, \dots, x = x_n$ (leur nombre est égal à $n + 1$) admet les mêmes valeurs que la fonction $f(x)$.

GÉOMÉTRIQUEMENT, la courbe $y = f(x)$ est remplacée par une « parabole du $n^{\text{ième}}$ degré » $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, passant par les $n + 1$ points de la courbe donnée.

Le calcul approché des valeurs de la fonction $f(x)$ d'après quelques-unes de ses valeurs $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ est appelé *interpolation* et le polynôme (1) *polynôme d'interpolation*.

En intégrant le polynôme d'interpolation nous obtenons la valeur approchée de l'intégrale de la fonction $f(x)$.

EXEMPLE 1. Pour une seule valeur donnée $y_0 = f(x_0)$ nous obtenons le polynôme d'interpolation de degré zéro

$$P(x) = y_0. \tag{2}$$

La courbe $y = f(x)$ est remplacée par la droite horizontale UV (fig. 349) passant par le point donné M_0 (x_0, y_0).

La valeur approchée de l'intégrale

$$\int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} f(x)\,dx \approx \int_{x_0-\frac{h}{2}}^{x_0+\frac{h}{2}} y_0\,dx = y_0h \tag{3}$$

donne l'aire du rectangle $AUVB$ (au lieu de l'aire du trapèze mixtiligne $AA'B'B$).

EXEMPLE 2. Pour deux valeurs données $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_0 + h)$ nous obtenons le polynôme d'interpolation du premier degré

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0). \tag{4}$$

Il représente la droite M_0M_1 (fig. 350) passant par les points $M_0(x_0, y_0)$ et $M_1(x_0 + h, y_1)$. La valeur approchée correspondante de

(*) Elle est aussi basée sur les idées de Newton et fut développée par Taylor, Simpson et d'autres. Les derniers travaux dans ce domaine appartiennent aux savants soviétiques (Vétchinkine, Kogan).

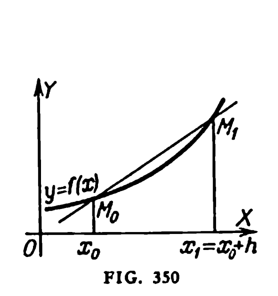


FIG. 350

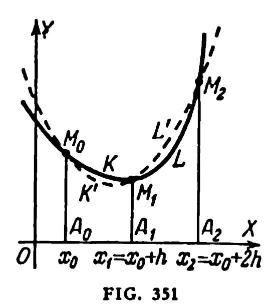


FIG. 351

l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h} P(x)\,dx = \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\,h \tag{5}$$

donne l'aire du trapèze rectiligne $x_0M_0M_1x_1$.

EXEMPLE 3. Pour trois valeurs données

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_0 + h), \quad y_2 = f(x_0 + 2h)$$

nous obtenons le polynôme d'interpolation du second degré

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)[x - (x_0 + h)]. \tag{6}$$

Nous vérifions la formule (6) en portant successivement

$$x = x_0, \quad x = x_0 + h, \quad x = x_0 + 2h.$$

Nous obtenons:

$$P(x_0) = y_0, \quad P(x_0 + h) = y_1, \quad P(x_0 + 2h) = y_2.$$

Si l'on ordonne $P(x)$ suivant les puissances de x, la formule se complique. Les expressions $y_1 - y_0$ ($= \Delta y_0$) et $y_2 - 2y_1 + y_0$ ($= \Delta^2 y_0$) sont les deux premières différences (§ 258) de la fonction $f(x)$.

Le polynôme (6) représente une parabole d'axe vertical (fig. 351), passant par les trois points $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_0 + h, y_1)$, $M_2(x_0 + 2h, y_2)$.

La valeur approchée (*)

$$\int_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx = \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)\,h \tag{7}$$

(*) Le calcul de l'intégrale $\int_{x_0}^{x_0+2h} P(x)\,dx$ est plus facile si l'on introduit la variable auxiliaire $x - (x_0 + h) = z$.

donne l'aire du *trapèze parabolique* $A_0M_0K'M_1L'M_2A_2$ (au lieu de l'aire du trapèze mixtiligne $A_0M_0KM_1LM_2A_2$).

Les formules (4), (6) peuvent être étendues à un nombre arbitraire de valeurs équidistantes de x. Pour quatre valeurs nous avons:

$$P(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)[x - (x_0 + h)] +$$
$$+ \frac{y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0}{3!\,h^3}(x - x_0)[x - (x_0 + h)][x - (x_0 + 2h)],$$

ou, plus brièvement,

$$P(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,\Delta x_0^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!\,\Delta x_0^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

La formule générale correspondante est appelée *formule d'interpolation de Newton*. Taylor en obtint d'une façon non rigoureuse le développement de la fonction $f(x)$ en série entière (il posa $x_1 = x_0$, $x_2 = x_0$, etc., et remplaça les différences Δx_0, Δy_0, $\Delta^2 y_0$, etc., par les différentielles dx_0, dy_0, d^2y_0, etc.) (cf. § 270).

§ 330. Formules des rectangles

Divisons l'intervalle d'intégration (a, b) par les points $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (fig. 352, 353) en n parties égales; la longueur de chacune d'elles est

$$h = \frac{b - a}{n}.$$

Pour unifier les notations posons encore $a = x_0$, $b = x_n$. Désignons par $x_{1/2}, x_{3/2}, x_{5/2}, \ldots$ (fig. 354) les milieux des intervalles partiels (x_0, x_1), (x_1, x_2), (x_2, x_3), ... Posons

$$f(x_0) = y_0,\quad f(x_1) = y_1,\quad f(x_2) = y_2, \ldots;$$
$$f(x_{1/2}) = y_{1/2},\quad f(x_{3/2}) = y_{3/2},\quad f(x_{5/2}) = y_{5/2}, \ldots$$

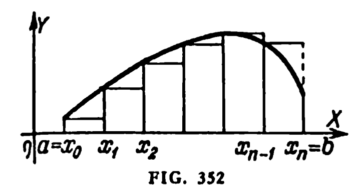


FIG. 352

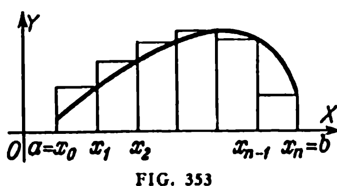


FIG. 353

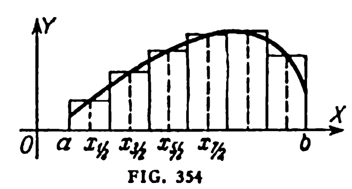


FIG. 354

On appelle *formules des rectangles* les égalités approchées suivantes:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}], \qquad (1)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \ldots + y_n], \qquad (2)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}[y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots + y_{\frac{2n-1}{2}}]. \qquad (3)$$

Les expressions (1), (2), (3) donnent les aires limitées par les contours polygonaux des fig. 352, 353, 354 (cf. § 329, exemple 1).

Dans la plupart des cas, pour un n donné, la formule (3) est plus précise que (1) et (2). Avec la croissance de n la précision des formules (1), (2), (3) croît indéfiniment.

Remarque. La borne supérieure de l'erreur absolue donnée par la formule (3) est

$$\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2, \qquad (4)$$

où M_2 est la plus grande valeur de $|f''(x)|$ dans l'intervalle (a, b). Pour des fonctions empiriques on prend au lieu de M_2 la plus grande valeur de la grandeur $\left|\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right|$.

EXEMPLE. Calculons selon la formule (3) pour dix ordonnées ($n = 10$) la valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \left(= \frac{\pi}{4} = 0{,}785398\ldots\right).$$

$x_{1/2} = 0{,}05$	$y_{1/2} = 0{,}9975$
$x_{3/2} = 0{,}15$	$y_{3/2} = 0{,}9780$
$x_{5/2} = 0{,}25$	$y_{5/2} = 0{,}9412$
$x_{7/2} = 0{,}35$	$y_{7/2} = 0{,}8909$
$x_{9/2} = 0{,}45$	$y_{9/2} = 0{,}8316$
$x_{11/2} = 0{,}55$	$y_{11/2} = 0{,}7678$
$x_{13/2} = 0{,}65$	$y_{13/2} = 0{,}7029$
$x_{15/2} = 0{,}75$	$y_{15/2} = 0{,}6400$
$x_{17/2} = 0{,}85$	$y_{17/2} = 0{,}5806$
$x_{19/2} = 0{,}95$	$y_{19/2} = 0{,}5256$
	$\Sigma y = 7{,}8561$

$$\frac{b-a}{n} = \frac{1}{10}$$

$$I \approx \frac{b-a}{n} \Sigma y = 0{,}78561.$$

L'erreur est environ égale à 0,0002.

Nous avons $f''(x) = 2\,\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. La plus grande valeur de $|f''(x)|$ dans l'intervalle $(0, 1)$ est égale à 2 (elle est atteinte pour $x = 0$). Portant dans (4) $n = 10$, $M_2 = 2$, nous trouvons la borne supérieure de l'erreur absolue 0,00085. Cela signifie qu'il n'y a aucun sens à calculer les valeurs de $y_{1/2}$, $y_{3/2}$, etc., avec une précision supérieure à 4 décimales.

Nous obtenons en vertu des formules (1) et (2) (les valeurs y_0, y_1, y_2, ..., sont rapportées au § 331): $I \approx 0{,}8099$ et $I \approx 0{,}7599$, autrement dit l'erreur est environ 50 fois plus grande.

§ 331. Formule des trapèzes

Nous avons avec les notations du § 330:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{y_0+y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right]. \qquad (1)$$

C'est la *formule des trapèzes*. Elle donne la somme des aires des trapèzes représentés sur la fig. 355 (cf. § 329, exemple 2).

Remarque. La borne supérieure de l'erreur absolue est $\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M_2$, où M_2 est la plus grande valeur de $|f''(x)|$ dans l'intervalle (a, b) (cf. § 330, remarque).

Exemple. Calculons l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ (= 0,785398 ...) d'après la formule des trapèzes pour 11 ordonnées ($n = 10$). Nous avons:

$x_1 = 0{,}1$	$y_1 = 0{,}9901$
$x_2 = 0{,}2$	$y_2 = 0{,}9615$
$x_3 = 0{,}3$	$y_3 = 0{,}9174$
$x_4 = 0{,}4$	$y_4 = 0{,}8621$
$x_5 = 0{,}5$	$y_5 = 0{,}8000$
$x_6 = 0{,}6$	$y_6 = 0{,}7353$
$x_7 = 0{,}7$	$y_7 = 0{,}6711$
$x_8 = 0{,}8$	$y_8 = 0{,}6098$
$x_9 = 0{,}9$	$y_9 = 0{,}5525$

$$\sum_{i=1}^{i=9} y_i = 7{,}0998.$$

$x_0 = 0{,}0$	$y_0 = 1{,}0000$
$x_{10} = 1{,}0$	$y_{10} = 0{,}5000$
	$y_0 + y_{10} = 1{,}5000$

$$I \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1{,}5000}{2} + 7{,}0998\right) = \underline{\underline{0{,}78498.}}$$

FIG. 355

L'erreur est environ 0,0004, comme pour la formule (3) du § 330. Toutefois, cette formule nous a donné la valeur approchée par excès, alors qu'ici nous avons trouvé la valeur approchée par défaut.

§ 332. Formule de Simpson

Nous avons avec les notations du § 330:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\frac{y_0+y_n}{2}+\right.$$

$$\left.+\,(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+2(y_{1/2}+y_{3/2}+\ldots+y_{n-1/2})\right]. \qquad (1)$$

C'est la *formule de Simpson*. Elle donne la somme des aires des trapèzes mixtilignes $x_0M_0M_{1/2}M_1x_1$, $x_1M_1M_{3/2}M_2x_2$, ... (fig. 356) pour lesquels les arcs $M_0M_{1/2}M_1$, $M_1M_{3/2}M_2$, ... de la courbe donnée $y = f(x)$ sont remplacés par les arcs correspondants des paraboles d'axes verticaux. Sur la fig. 356 on n'a représenté que la parabole $M_0M_{1/2}M_1$ (cf. § 329, exemple 3).

Pour un même nombre d'ordonnées la formule de Simpson est dans la majorité des cas beaucoup plus précise que les formules des rectangles (§ 330) et la formule des trapèzes (§ 331).

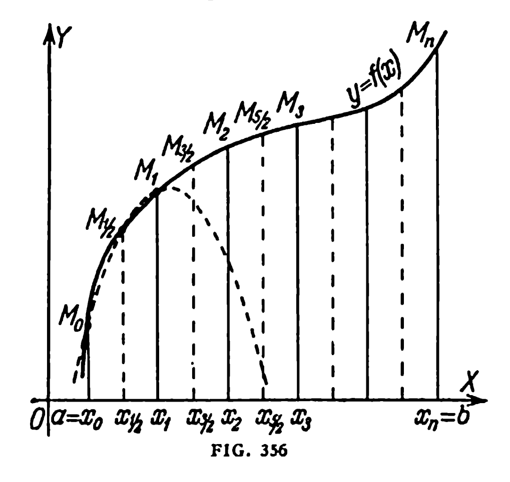


FIG. 356

REMARQUE. La borne supérieure de l'erreur absolue commise est

$$\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} M_4. \qquad (2)$$

Ici M_4 est la plus grande valeur de $|f^{IV}(x)|$ dans l'intervalle (a, b).

EXEMPLE. Calculons l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \ (= 0{,}785398...)$$

d'après la formule de Simpson pour cinq ordonnées

$$\left(n = 2, \ \frac{b-a}{3n} = \frac{1}{6}\right).$$

$x_0 = 0$	$\frac{1}{2} y_0 = 0{,}50000$
$x_{1/2} = 0{,}25$	$2y_{1/2} = 1{,}88235$
$x_1 = 0{,}50$	$y_1 = 0{,}80000$
$x_{3/2} = 0{,}75$	$2y_{3/2} = 1{,}28000$
$x_2 = 1{,}00$	$\frac{1}{2} y_2 = 0{,}25000$
	somme 4,71235

$$I \approx \frac{1}{6} \cdot 4{,}71235 = \underline{\underline{0{,}78539.}}$$

L'erreur est environ 0,00001, autrement dit, elle est 40 fois plus petite que dans les exemples des §§ 330, 331, bien que le nombre des ordonnées soit ici deux fois moindre.

Il est utile de comparer la formule de Simpson avec la formule des trapèzes. La première comporte le terme complémentaire $2\ (y_{1/2} + y_{3/2} + \ldots)$ qui est environ deux fois plus grand que la somme des autres termes. Cela signifie que l'expression entre crochets de la formule de Simpson est environ trois fois plus grande que l'expression correspondante dans la formule des trapèzes. Conformément à cela le facteur $\frac{b-a}{3n}$ est trois fois plus petit que le facteur $\frac{b-a}{n}$.

§ 333. Aires planes en coordonnées rectangulaires

L'aire du trapèze mixtiligne (*aABb* sur la fig. 357) situé au-dessus de l'axe *OX* s'exprime (§ 316) par l'intégrale

$$S = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (1)$$

Pour le trapèze situé au-dessous de l'axe OX, on a

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx. \tag{1'}$$

Si la figure est d'une autre forme, on la partage en trapèzes (ou on la complète jusqu'à obtenir un trapèze) et on détermine l'aire comme la somme (ou la différence) des aires des trapèzes. Le calcul est facilité par le choix adéquat du système de coordonnées rectangulaires.

EXEMPLE 1. Calculer l'aire du segment parabolique AOB (fig. 358) si l'on connaît sa base ($AB = 2a$) et sa hauteur ($KO = h$).

Choisissons les axes comme l'indique la fig. 358. Partageons le segment AOB en trapèzes mixtilignes égaux OKB et OKA:

$$\text{aire } OKB = \int_0^h y\,dx. \tag{2}$$

Les coordonnées x, y sont liées par l'équation

$$y^2 = 2px. \tag{3}$$

Le paramètre p est déterminé par la condition que la parabole passe par le point $B(h, a)$:

$$a^2 = 2ph. \tag{4}$$

Nous trouvons de (3) et (4):

$$y = \frac{a}{\sqrt{h}}\sqrt{x}. \tag{5}$$

Portant dans (2) nous obtenons:

$$\text{aire } OKB = \frac{a}{\sqrt{h}}\int_0^h \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}ah,$$

$$\text{aire } AOB = 2 \text{ aires } OKB = \frac{2}{3}(2a)\,h,$$

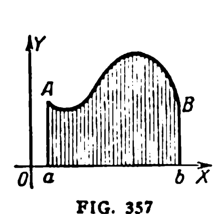


FIG. 357

FIG. 358

autrement dit *l'aire du segment parabolique constitue les* $\frac{2}{3}$ *de l'aire du rectangle ABB'A' de même base et de même hauteur.*

AUTRE PROCÉDÉ. Complétons le segment parabolique AOB jusqu'au rectangle $AA'B'B$. L'aire du trapèze complémentaire est $\int_{-a}^{+a} x\,dy$ ou, en vertu de (5),

$$\frac{h}{a^2}\int_{-a}^{+a} y^2\,dy = \frac{1}{3}\cdot 2ah.$$

Cela signifie que

$$\text{aire } AOB = 2ah - \frac{1}{3}\cdot 2ah = \frac{2}{3}\cdot 2ah.$$

EXEMPLE 2. Calculer l'aire S comprise entre les paraboles $y^2 = 2px$ et $x^2 = 2py$ (fig. 359).

L'aire S est la différence des aires $ONAL$ et $OKAL$. Les paraboles se coupent aux points $O(0, 0)$ et $A(2p, 2p)$. Nous avons:

$$S = \int_0^{2p} \sqrt{2px}\,dx - \int_0^{2p} \frac{x^2}{2p}\,dx = \frac{4}{3}p^2 = \frac{(2p)^2}{3},$$

autrement dit S est égale au tiers de l'aire du carré [*] $OLAR$.

EXEMPLE 3. AIRE DE L'ELLIPSE $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$S = 2\int_{-a}^{+a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi ab$$

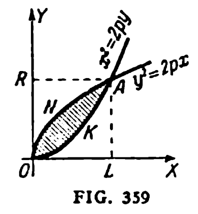


FIG. 359

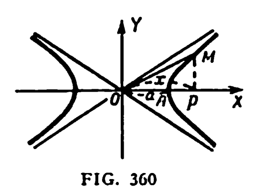


FIG. 360

---

[*] En se basant sur le résultat de l'exemple 1, on peut calculer S par une voie élémentaire.

EXEMPLE 4. HYPERBOLE $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (fig. 360):

$$\text{aire } AMP=\int_a^x \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\,dx=$$

$$=\frac{b}{2a}x\sqrt{x^2-a^2}-\frac{ab}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}=\frac{xy}{2}-\frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),$$

$$\text{aire } OAM=\text{aire } OPM-\text{aire } AMP=\frac{ab}{2}\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right).$$

EXEMPLE 5. CYCLOÏDE (fig. 361):

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),$$

$$\text{aire } ONALO=\int_0^{2\pi} y\,dx=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,dt=3\pi a^2,$$

autrement dit *l'aire d'une cycloïde est égale au triple de l'aire du cercle générateur.*

§ 334. Schéma d'application de l'intégrale définie

On peut exprimer par une intégrale définie de nombreuses grandeurs physiques et géométriques (cf. §§ 335-338). On applique alors le schéma suivant.

1) On fait correspondre à la grandeur cherchée U l'intervalle (a, b) de variation d'un certain argument.

Ainsi, pour pouvoir exprimer par une intégrale l'aire $aABb$ sous la courbe AB (fig. 362), nous la considérons dans l'intervalle (a, b) de variation de l'abscisse x.

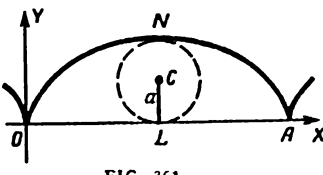


FIG. 361

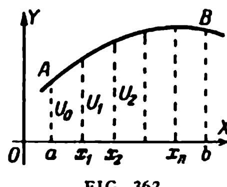


FIG. 362

2) On partage l'intervalle (a, b) en intervalles partiels (a, x_1), (x_1, x_2), ..., (x_n, b) (par la suite le nombre de ces intervalles tendra vers l'infini et leur longueur vers zéro).

Supposons que la grandeur U se décompose en $U_0, U_1, U_2, \ldots$ (fig. 362) dont la somme donne U.

Les grandeurs possédant cette propriété sont dites *additives*. Il existe aussi des grandeurs non additives. Ainsi, l'angle compris entre les génératrices d'une surface conique est une grandeur non additive. L'angle AOB (fig. 363) peut être mis en correspondance avec l'intervalle (a, b), où $a = \widehat{RA}$ et $b = \widehat{Rb}$ sont les arcs de directrice comptés à partir d'un certain point initial R. Toutefois si l'on partage (a, b) en (a, c) et (c, b), la somme des angles correspondants AOC et COB ne donne pas l'angle AOB.

Une grandeur additive peut être exprimée par une intégrale, alors qu'une grandeur non additive ne peut l'être.

3) On prend en tant que partie représentative des $U_0, U_1, \ldots$ la partie U_i qui s'exprime (en partant des conditions du problème) par une formule approchée de la forme

$$U_i \approx f(x_i)(x_{i+1} - x_i), \tag{1}$$

dont l'erreur doit être un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $x_{i+1} - x_i$.

L'expression $f(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ ou, plus brièvement,

$$f(x)\,\Delta x \tag{2}$$

est appelée *élément* de la grandeur U.

L'élément de l'aire $aABb$ (fig. 364) est l'aire du rectangle $x_iKQ\,x_{i+1}$; l'erreur commise en prenant U_i pour valeur approchée est l'aire du triangle hachuré KQL; c'est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$ (l'aire KQL est plus petite que l'aire $KNLQ = KQ \cdot KN = \Delta x_i\ \Delta y_i$, et cette dernière est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx_i).

4) De l'égalité approchée (1) découle l'égalité *exacte*

$$U = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

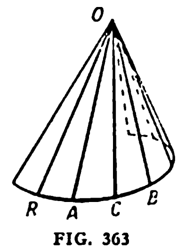


FIG. 363

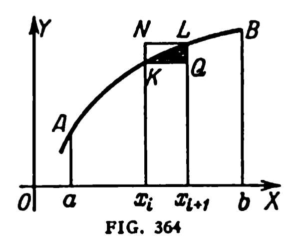


FIG. 364

EXPLICATION. Lorsque n croît, l'erreur commise sur la somme

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+\ldots+f(x_n)(x_{n+1}-x_n) \qquad (4)$$

(malgré l'accumulation des erreurs) tend vers zéro, car les erreurs commises sur les termes décroissent plus rapidement que ne croit le nombre de termes. C'est pourquoi U est la limite de la somme (4), autrement dit,

$$U=\int_a^b f(x)\,dx.$$

§ 335. Aires planes en coordonnées polaires

L'aire S du secteur AOB limité par la courbe AB et les rayons OA et OB (fig. 365) s'exprime par la formule

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi, \qquad (1)$$

où r est le rayon vecteur du point variable M de la courbe AB et φ son angle polaire.

EXPLICATION. On applique ici le schéma du § 334 de la manière suivante.

1) On fait correspondre à l'aire AOB l'intervalle (φ_1, φ_2) de variation de l'angle polaire.

2) On partage l'intervalle (φ_1, φ_2) en intervalles partiels de sorte que le secteur AOB se décompose en secteurs AOM_1, M_1OM_2, etc.; la somme de leurs aires donne l'aire AOB.

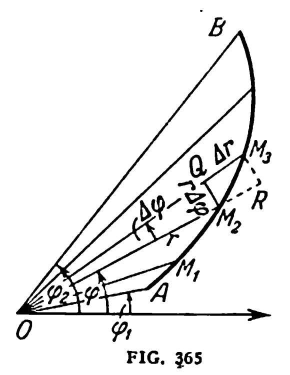


FIG. 365

3) On choisit M_2OM_3 pour secteur représentatif. Remplaçons-le par le secteur circulaire M_2OQ; l'aire de ce dernier

$$\frac{1}{2}OM_2\cdot M_2Q=\frac{1}{2}r\cdot r\,\Delta\varphi=\frac{1}{2}r^2\,\Delta\varphi$$

est un élément de l'aire AOB. L'erreur commise en prenant pour valeur approchée

$$\text{aire } M_2OM_3\approx\frac{1}{2}r^2\,\Delta\varphi \qquad (2)$$

est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\varphi$.

L'erreur est égale à l'aire du triangle mixtiligne M_3QM_2, et cette dernière est plus petite que aire $QM_3RM_2=\frac{1}{2}(OM_3^2-OM_2^2)\,\Delta\varphi\approx r\,\Delta r\Delta\varphi$.

4) De l'égalité approchée (2) découle la formule (1).

Exemple. Calculer l'aire $OCDA$ (fig. 366) limitée par la première spire de la spirale d'Archimède (§ 75) et par le segment $OA = a$ (*pas de la spirale*).

Choisissant le système polaire comme indiqué sur la fig. 366, nous avons:

$$r = \frac{a}{2\pi}\varphi.$$

A l'origine O et à l'extrémité A de la spire correspondent les valeurs

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 2\pi.$$

FIG. 366

En vertu de la formule (1)

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\, d\varphi = \frac{a^2}{8\pi^2}\int_0^{2\pi} \varphi^2 d\varphi = \frac{1}{3}\pi a^2, \tag{3}$$

autrement dit, *l'aire limitée par la première spire est trois fois plus petite que l'aire du cercle de rayon égal au pas de la spirale.* Ce résultat est dû à Archimède(*).

§ 336. Calcul du volume d'un corps à bases parallèles

Considérons un corps de forme arbitraire (fig. 367). Supposons que l'on connaisse l'aire $F(x)$ de toutes ses sections parallèles au plan R (x est la distance de la section au plan R). Le volume du corps est alors

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, dx \tag{1}$$

Explication. Partageons le corps en tranches parallèles; la zone $NMKQmP$ est représentative de ces tranches. Construisons le cylindre $NMKnmk$. Son volume égal à $F(x)\Delta x$ est un élément du volume V. Il en découle la formule (1) (cf. § 334 et § 335, explication).

Exemple 1. Calculer le volume V de la pyramide $UABCDE$ (fig. 368) de hauteur $UO = H$ dont la base est le polygone $ABCDE$ de base S.

(*) Bien qu'Archimède n'ait pas introduit explicitement ni la notion d'intégrale n celle de limite, sa méthode s'identifie en fait avec la méthode du calcul intégral.

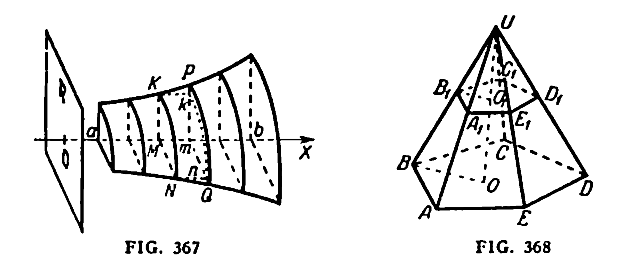


FIG. 367 FIG. 368

Sᴏʟᴜᴛɪᴏɴ. Trouvons l'aire $F(x)$ de la section $A_1B_1C_1D_1E_1$ de la proportion

$$F(x) : S = UO_1^2 : UO^2 = x^2 : H^2.$$

En vertu de la formule (1)

$$V = \int_0^H F(x)\,dx = \frac{S}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{1}{3}SH. \tag{2}$$

Cette formule est connue de la géométrie élémentaire mais sa démonstration y est beaucoup plus compliquée.

Exᴇᴍᴘʟᴇ 2. Calculer le volume de l'ellipsoïde (§ 173) d'axes $2a$, $2b$, $2c$.

Sᴏʟᴜᴛɪᴏɴ. La section $KLK'L'$ (fig. 369) parallèle à l'ellipse principale $BCB'C'$ et distante de $h = OM$ est (§ 173) une ellipse de demi-axes

$$b' = MK = b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}, \quad c' = ML = c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\,.$$

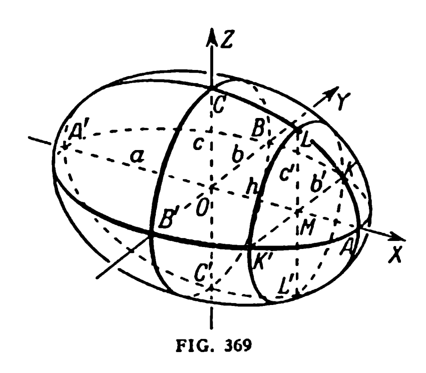


FIG. 369

L'aire $F(h)$ de la section est égale à (§ 333, exemple 3)

$$F(h) = \pi b'c' = \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right).$$

Il vient de la formule (1)

$$V = \int_{-a}^{+a} F(h)\,dh = 2\int_0^a \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh = \frac{4}{3}\pi abc. \quad (3)$$

Le volume du cône de base elliptique $BCB'C'$ et de hauteur $OA = a$ est

$$V_1 = \frac{1}{3} Sa$$

(la formule se démontre comme celle de l'exemple 1), autrement dit, $V_1 = \dfrac{1}{3}\pi abc$. Cela signifie que *le volume d'un ellipsoïde est le quadruple de celui du cône dont la base est l'une des sections principales et le sommet le sommet opposé de l'ellipsoïde.* Ce résultat a été trouvé par Archimède (pour l'ellipsoïde de révolution).

Quand l'ellipsoïde devient une sphère ($a = b = c$), nous obtenons la formule connue $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

§ 337. Volume de révolution

Le volume V (fig. 370) limité par une surface de révolution et par deux plans P_1, P_2 perpendiculaires à l'axe de révolution OX s'exprime par la formule

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx, \quad (1)$$

où $y = f(x)$ est l'ordonnée de la méridienne AB.

Remarque. La grandeur πy^2 est l'aire de la section circulaire parallèle à P_1 et P_2 (cf. § 336).

Exemple. Calculer le volume du segment de paraboloïde de révolution (fig. 371) de rayon de la base $AB = r$ et de hauteur $OA = h$.

Solution. Comme au § 333 (exemple 1) nous trouvons que la méridienne (la parabole) est représentée par l'équation

$$y^2 = \frac{r^2 x}{h}.$$

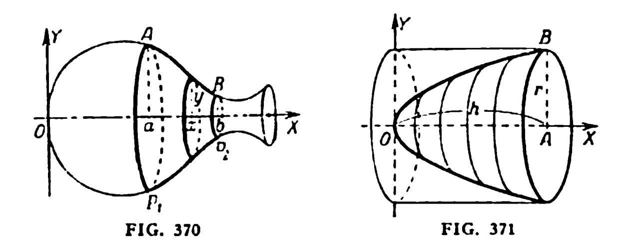


FIG. 370 FIG. 371

Il vient de la formule (1) que

$$V = \pi \int_0^h \frac{r^2 x}{h}\, dx = \frac{1}{2}\pi r^2 h,$$

autrement dit, *le volume d'un segment de paraboloïde est égal à la moitié du volume d'un cylindre de même base et de même hauteur.*

Ce résultat appartient à Archimède.

§ 338. Longueur d'un arc de courbe plane

La longueur s de l'arc de courbe AB défini en coordonnées rectangulaires dans le plan s'exprime par la formule

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt, \tag{1}$$

où t est un paramètre quelconque en fonction duquel sont exprimées les coordonnées courantes x, y $(t_2 > t_1)$.

Si le paramètre n'est pas encore choisi, il est plus commode d'écrire la formule (1) sous la forme:

$$s = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2}. \tag{2}$$

Les notations (A), (B) indiquent qu'on doit prendre pour limites d'intégration les valeurs du paramètre qui correspondent aux extrémités de l'arc AB.

En particulier, il est souvent commode de choisir l'abscisse x pour paramètre. Nous avons alors:

$$s = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2}\,dx. \qquad (3)$$

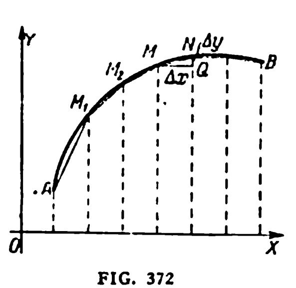


FIG. 372

EXPLICATION. L'arc $\overset{\frown}{MN}$ et la corde MN sont des infiniment petits équivalents (fig. 372). Par ailleurs,

$$MN = \sqrt{MQ^2 + QN^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Par conséquent, nous avons

$$\overset{\frown}{MN} \approx \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Cela signifie que l'expression $\sqrt{dx^2 + dy^2}$ (elle est proportionnelle à l'accroissement Δt de l'argument t) est l'élément (la différentielle) de l'arc AB. Conformément au schéma du § 334 nous obtenons la formule (2).

Le calcul de la longueur d'un arc est appelé la *rectification* de l'arc de courbe.

EXEMPLE. Calculer la longueur d'un arc de cycloïde (§ 253) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

SOLUTION.

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|, \qquad (4)$$

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a. \qquad (5)$$

La longueur d'une arche de cycloïde a pour valeur quatre fois le diamètre du cercle générateur.

Si nous calculons la longueur totale de deux arches de cycloïde d'après la formule $s = \int_0^{4\pi} 2a \sin\frac{t}{2}\,dx$, nous obtenons zéro. L'erreur tient à ce que dans l'intervalle $(2\pi, 4\pi)$ nous avons:

$$\left|\sin\frac{t}{2}\right| = -\sin\frac{t}{2} \quad \left(\text{et non } + \sin\frac{t}{2}\right).$$

REMARQUE. Quand nous mesurons la longueur d'un sentier tortueux en comptant les pas ou la longueur d'un fleuve sinueux sur la carte à l'aide de l'échelle, nous sous-entendons par là que l'arc et la

corde sont équivalents. Cette propriété résulte donc de l'expérience quotidienne. Toutefois, si nous ne voulons pas adopter cette propriété en tant qu'axiome, mais la démontrer mathématiquement, nous devons partir d'une certaine définition de la longueur d'un arc de courbe.

DÉFINITION. *La longueur d'un arc de courbe dans le plan ou l'espace est la limite du périmètre de la ligne polygonale inscrite lorsque le nombre de points de division de la ligne croît indéfiniment, chaque intervalle partiel tendant vers zéro.*

On peut démontrer à partir de cette définition que $\overset{\frown}{MN} \approx MN$. On en déduit aussi directement la formule (1), de sorte que le schéma du § 334 semble superflu. Or, en fait ce schéma figure dans la définition même.

On peut définir autrement la longueur d'un arc de courbe, par exemple comme la limite de la ligne brisée *circonscrite*. Cette définition est équivalente à la précédente.

§ 339. Différentielle de l'arc

La différentielle de la longueur d'un arc de courbe ou la *différentielle d'un arc de courbe* tout court s'exprime (§ 338, explication) par la formule

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \qquad (1)$$

Si on prend x pour argument, alors (fig. 373)

$$dx = MQ, \quad dy = QP, \quad ds = \sqrt{MQ^2 + QP^2} = MP,$$

autrement dit, *la différentielle de l'arc exprime la longueur du segment de la tangente compris entre le point de tangence et le point d'intersection avec l'ordonnée ayant subi un accroissement.*

EXEMPLE. La différentielle d'un arc de cycloïde est (cf. exemple § 338)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = 2a \sin\frac{t}{2}\,dt$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

§ 340. Longueur d'un arc de courbe et sa différentielle en coordonnées polaires

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ (fig. 374) s'exprime en fonction des coordonnées polaires r, φ par l'intégrale

$$s = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}. \qquad (1)$$

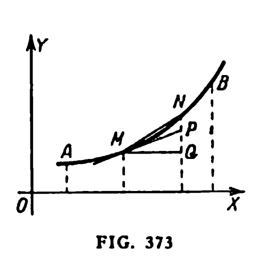


FIG. 373

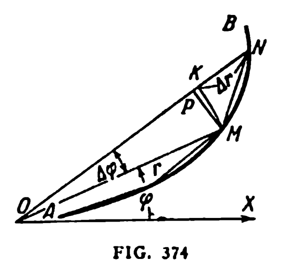


FIG. 374

La différentielle de l'arc s'exprime par la formule

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}. \qquad (2)$$

EXPLICATION. Décrivons du point O comme centre (fig. 374) une circonférence de rayon $OM = r$. Son arc $\overset{\frown}{MK}$ $(= r\Delta\varphi)$, le segment KN $(= \Delta r)$ et l'arc $\overset{\frown}{MN}$ $(= \Delta s)$ de la courbe AB forment le triangle mixtiligne d'angle droit au sommet K. Bien que pour un tel triangle le théorème de Pythagore ne soit pas rigoureusement exact, toutefois quand l'arc $\overset{\frown}{MN}$ est infiniment petit, le carré de l'« hypoténuse » est équivalent à la somme des carrés des « côtés »:

$$\overset{\frown}{MN} \approx \sqrt{KN^2 + \overset{\frown}{KM}^2},$$

autrement dit,

$$\Delta s \approx \sqrt{\Delta r^2 + r^2 \Delta\varphi^2} \approx \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}.$$

Par conséquent, l'expression $\sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2}$ est l'élément (la différentielle) de l'arc s.

REMARQUE. La formule (2) du présent paragraphe peut être obtenue de (2) § 338 par la substitution

$$dx = d(r \cos \varphi) = \cos \varphi \, dr - r \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$dy = d(r \sin \varphi) = \sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi.$$

EXEMPLE. Menons par le point O de la circonférence de rayon a le rayon OK (fig. 375). A partir du point L où la droite OK coupe à nouveau la circonférence, on porte le segment $LM = 2a$ dans la direction

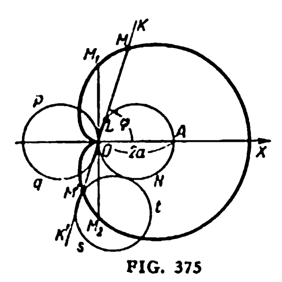


FIG. 375

du rayon OK (*). La courbe décrite par le point M lors de la rotation du rayon est appelée *cardioïde* (**). Calculer sa longueur.

SOLUTION. Choisissons le système polaire comme sur la fig. 375. Nous avons:

$$\left.\begin{aligned} OL &= OA \cos\varphi = 2a\cos\varphi, \\ r &= OL + LM = 2a(\cos\varphi + 1). \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Quand φ parcourt l'intervalle $(-\pi, +\pi)$, la cardioïde est entièrement décrite. Sa longueur est en vertu de (1)

$$s = \int_{-\pi}^{+\pi} \sqrt{4a^2(1+\cos\varphi)^2 + 4a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 2a\int_{-\pi}^{+\pi}\sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi = 4a\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 16a. \qquad (4)$$

REMARQUE. On peut obtenir la cardioïde comme la trajectoire du point du cercle Opq (fig. 375), roulant sans glisser sur la circonférence $ONAL$ de même rayon. On voit de (4) que *la longueur d'une cardioïde a pour valeur huit fois le diamètre du cercle générateur.*

On peut décrire la cardioïde en faisant varier φ de zéro à 2π. Mais si nous calculons sa longueur d'après la formule $s = 4a\int_0^{2\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi$, nous obtenons zéro. La cause de l'erreur est indiquée au § 338 (en petits caractères).

§ 341. Aire de révolution

L'aire S engendrée par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tournant autour de l'axe OX s'exprime par l'intégrale

$$S = \int_{(A)}^{(B)} 2\pi y\, ds, \qquad (1)$$

(*) Quand la droite est tangente à la circonférence au point O, les segments égaux à $2a$ sont portés à partir de O des deux côtés ($OM_1 = OM_2 = 2a$).

(**) Pour plus de détails cf. § 508.

où y est l'ordonnée de la méridienne AB, $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ la différentielle d'un arc de AB (§ 339), (A) et (B) les valeurs extrêmes du paramètre en fonction duquel sont exprimées les coordonnées.

Explication. Partageons la surface $ABB'A'$ (fig. 376) en zones parallèles et remplaçons chaque zone $MNN'M'$ par la surface latérale d'un cône tronqué de même base. Les aires de ces surfaces sont équivalentes. C'est pourquoi

$$\text{aire } MNN'M' \approx \pi(PM + QN)\, MN. \tag{2}$$

Comme $PM + QN = 2y + \Delta y$, $MN \approx \widehat{MN} = \Delta s$, on a

$$\text{aire } MNN'M' \approx \pi(2y + \Delta y)\, \Delta s \approx 2\pi y \Delta s. \tag{3}$$

Il en découle la formule (1).

Exemple. Trouver l'aire engendrée par la cycloïde tournant autour de sa base.

Solution. Nous avons (§§ 338, 339):

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2}\, dt \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2}\, dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2}\, dt = \frac{64}{3}\pi a^2.$$

A titre de comparaison prenons l'aire de la section axiale (autrement dit, le double de l'aire de la cycloïde) $6\pi a^2$ (§ 333). L'aire de révolution lui est supérieure de $3\frac{5}{9}$ fois.

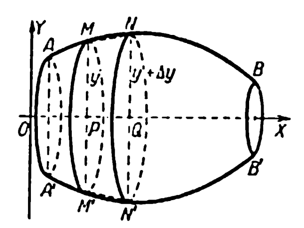


FIG. 376

REMARQUE. Pour démontrer l'équivalence de l'aire de la zone $MNN'M'$ et de celle de la surface latérale du cône tronqué, il faut définir la notion d'«aire d'une surface courbe ». Une telle définition est donnée au § 459. Etant donné qu'elle est compliquée, on introduit souvent la définition particulière suivante (conforme à la définition générale).

L'aire de révolution est la limite de l'aire engendrée par une ligne polygonale inscrite en rotation dont le nombre des côtés augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

On peut déduire directement de cette définition la formule (1) (cf. § 338, remarque 1).

Notions fondamentales sur les courbes planes et gauches

§ 342. Courbure

Soient M et M' deux points de la courbe L (fig. 377); les tangentes en M et M' orientées dans le même sens de parcours sur la courbe font entre elles un angle ω. Le rapport $\frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}}$ de l'angle ω à la longueur de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ est appelé *courbure moyenne* de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$. Il est admis de mesurer l'angle ω en radians.

La courbure moyenne d'un segment de droite (sa tangente coïncide avec la droite elle-même) est nulle, celle de tout arc de circonférence de rayon R est égale à $\frac{1}{R}$.

La dimension de la courbure moyenne est inverse de celle de la longueur, autrement dit, quand on modifie l'échelle, la mesure numérique de la courbure varie en raison inverse de la mesure numérique de la longueur des segments.

DÉFINITION. On appelle *courbure* de la courbe L au point M la limite de la courbure moyenne de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ quand M' tend vers M. La courbure est désignée par la lettre C:

$$C = \lim_{\overset{\frown}{MM'} \to 0} \frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}}. \tag{1}$$

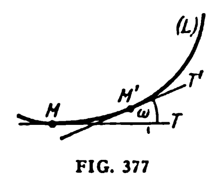


FIG. 377

La courbure en tout point d'une droite est nulle, la courbure en tout point d'un cercle de rayon R est égale à $\frac{1}{R}$. Pour toute autre courbe, la courbure varie d'un point à l'autre. En certains points elle peut être nulle. Au voisinage de tels points la courbe ressemble à une droite.

REMARQUE. Nous estimons que la courbure (si elle n'est pas nulle) est une grandeur positive. On peut affecter la courbure d'une courbe plane d'un signe, alors qu'on ne peut le faire pour une courbe gauche (cf. § 364).

§ 343. Centre, rayon et cercle de courbure d'une courbe plane

Soit M' (fig. 378) un point décrivant la courbe plane L en tendant vers un point immobile M où la courbure n'est pas nulle. Alors le point C' où la normale immobile MN coupe la normale $M'N'$ tend vers un point C situé à une distance $MC = \frac{1}{C}$ (*) de M. Le rayon MC est alors orienté dans le sens de la concavité de la courbe L.

Le segment MC est appelé *rayon de courbure*, le point C *centre de courbure* de la courbe L (au point M).

Le rayon de courbure est désigné par R ou ρ. Les grandeurs R et C sont inverses, c'est-à-dire

$$R = \frac{1}{C} \tag{1}$$

et

$$C = \frac{1}{R}. \tag{2}$$

Le rayon de courbure d'une circonférence est égal à son rayon, le centre de courbure coïncide avec son centre.

On donne le nom de *cercle de courbure* de L en M ou de *cercle osculateur* au cercle de centre C (fig. 379) et de rayon $R = MC$.

Dans le sens du rayon de courbure croissant (sur la fig. 379 à droite de M) la courbe L est située à l'extérieur du cercle de courbure, dans

(*) Dans le triangle $MC'M'$ (fig. 378) l'angle C' est égal à l'angle ω (angles à côtés orthogonaux), $\widehat{C'M'M} = 90° - \lambda$, où l'angle $\lambda = \widehat{MM'D}$ est infiniment petit (il est plus petit que ω). D'après le théorème des sinus nous avons $MC' = \frac{\sin(90° - \lambda)}{\sin \omega} MM' = \cos \lambda \frac{MM'}{\sin \omega}$. Passons à la limite et tenons compte de ce que $MM' \approx \overset{\frown}{MM'}$, $\sin \omega \approx \omega$ et $\cos \lambda \to 1$. Nous obtenons:

$$MC = \lim \frac{\overset{\frown}{MM'}}{\omega} = 1 : \lim \frac{\omega}{\overset{\frown}{MM'}} = 1 : C.$$

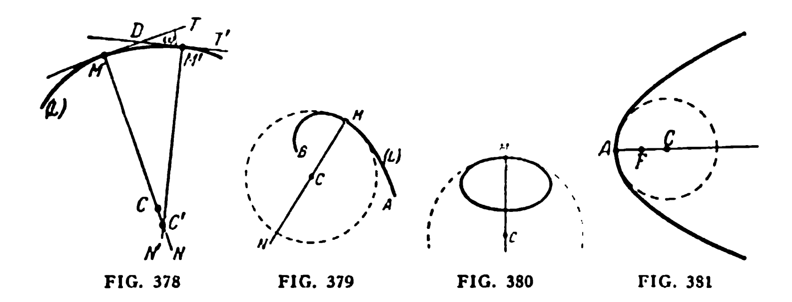


FIG. 378 FIG. 379 FIG. 380 FIG. 381

le sens du rayon décroissant (sur la fig. 379 à gauche de M) à l'intérieur. C'est pourquoi le cercle de courbure traverse en général la courbe au point de contact.

Dans les cas exceptionnels où le rayon de courbure admet au point M un extrémum, la courbe L est entièrement intérieure au cercle de courbure (en présence d'un maximum, fig. 380) ou complètement extérieur (en présence d'un minimum, fig. 381). Dans le premier cas le point de contact est l'extrémité du petit axe de l'ellipse, dans le second l'extrémité de son grand axe.

REMARQUE. Si la courbure au point M de la courbe L est nulle, le point d'intersection des normales MN et $M'N'$ s'éloigne indéfiniment de M quand M' tend vers M. On écrit alors pour ce point $R = \infty$.

§ 344. Formules de la courbure, du rayon et du centre de courbure d'une courbe plane (*)

La courbure de la courbe $y = f(x)$ se calcule d'après la formule

$$C = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \tag{1}$$

le rayon de courbure d'après la formule

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}, \tag{2}$$

les coordonnées du centre de courbure C d'après les formules

$$x_C = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad y_C = y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \tag{3}$$

(*) Les formules correspondantes pour une courbe gauche sont données au § 363.

Si $y'' = 0$, la courbure est nulle, le rayon de courbure infini, et le centre de courbure n'existe pas. Il en est toujours ainsi, par exemple, aux points d'inflexion (cf. § 283).

Les formules (1)-(3) sont remplacées par des formules symétriques si la courbe est donnée par les équations paramétriques $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$. Dans ce cas on a

$$C = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \tag{I}$$

$$R = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|}, \tag{II}$$

$$x_C = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}y', \quad y_C = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - y'x''}x'. \tag{III}$$

Les accents signifient la dérivation par rapport au paramètre t. Les formules (1) - (3) s'obtiennent de (I) - (III) si l'on pose $x = t$ (dans ce cas $x' = 1$ et $x'' = 0$). Si l'on pose $y = t$ (alors $y' = 1$ et $y'' = 0$), autrement dit, si l'équation de la courbe est donnée sous la forme $x = f(y)$, alors, au lieu de (1) - (3), nous obtenons les formules suivantes:

$$C = \frac{|x''|}{(1 + x'^2)^{3/2}}, \tag{1a}$$

$$R = \frac{(1 + x'^2)^{3/2}}{|x''|}, \tag{2a}$$

$$x_C = x + \frac{1 + x'^2}{x''}, \quad y_C = y - \frac{x'(1 + x'^2)}{x''}. \tag{3a}$$

L'existence des dérivées x', y', x'', y'' au point A de la courbe considérée assure la courbure en ce point. La proposition inverse n'est pas vraie: il peut arriver que la courbe possède une courbure au point A et que les dérivées x', y', x'', y'' (l'une ou plusieurs) n'existent pas. Les formules (I) - (III) ne sont alors plus valables et cela montre que le paramètre a été mal choisi. Cf. exemple 1 (texte en petits caractères).

EXEMPLE 1. Trouver la courbure, le rayon et le centre de courbure C au sommet A (0, 0) de la parabole $y^2 = 2px$ (fig. 381).

SOLUTION. Le plus simple est de prendre pour argument l'ordonnée y; nous trouvons alors de l'équation donnée

$$x = \frac{y^2}{2p}, \quad x' = \frac{y}{p}, \quad x'' = \frac{1}{p}. \tag{4}$$

Nous avons au sommet de la parabole

$$x' = 0, \quad x'' = \frac{1}{p}. \tag{5}$$

Trouvons d'après les formules (1a) - (3a):

$$C = \frac{1}{p}, \quad R = p, \quad x_C = p, \quad y_C = 0. \tag{6}$$

Le rayon de courbure au sommet de la parabole est égal à son paramètre, autrement dit, le foyer F partage le segment AC en son milieu.

Si nous prenons pour argument l'abscisse x de la parabole $y^2 = 2px$, alors au lieu de (4) nous obtenons (cf. § 250)

$$y' = \frac{p}{y}, \qquad y'' = -\frac{p^2}{y^3}. \tag{7}$$

Au sommet de la parabole ($x = 0$, $y = 0$) les dérivées y', y'' n'existent pas, de sorte qu'on ne peut pas utiliser directement les formules (1) - (3). Toutefois pour tous les autres points de la parabole, les formules (1) - (3) sont valables, et après avoir effectué la substitution (7) elles s'écrivent:

$$\left.\begin{aligned} C &= \frac{p^2}{(y^2 + p^2)^{3/2}} \\ R &= \frac{(y^2 + p^2)^{3/2}}{p^2}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$x_C = x + \frac{y^2}{p} + p(= 3x + p), \qquad y_C = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{9}$$

Si nous posons ici $x = 0$, $y = 0$, nous retrouvons les valeurs (6). Ainsi, nous avons trouvé les limites des grandeurs C, R, x_C, y_C quand le point de la parabole tend vers son sommet.

Exemple 2. Trouver le rayon et le centre de courbure aux sommets d'une ellipse de demi-axes a, b (fig. 382).

Solution. Le plus simple est d'utiliser les équations paramétriques de l'ellipse (§ 252)

$$x = a \cos t, \qquad y = b \sin t.$$

Nous en tirons

$$x' = -a \sin t, \qquad y' = b \cos t;$$

$$x'' = -a \cos t, \qquad y'' = -b \sin t.$$

Nous obtenons alors d'après les formules (II) et (III):

$$R = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}, \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{(a^2 - b^2)\cos^3 t}{a}, \\ y_C &= -\frac{(a^2 - b^2)\sin^3 t}{b}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Au sommet $A(a, 0)$, où $t = 0$, nous avons:

$$R_a = \frac{b^2}{a}, \quad x_C = \frac{a^2 - b^2}{a} \quad y_C = 0. \tag{12}$$

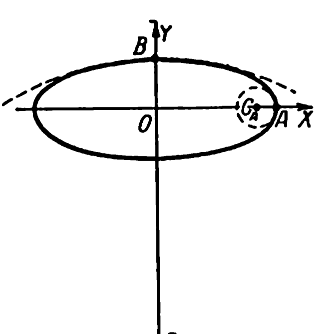


FIG. 382

Au sommet $B(0, b)$, où $t = \frac{\pi}{2}$, nous avons:

$$R_b = \frac{a^2}{b}, \qquad x_C = 0, \qquad y_C = -\frac{a^2 - b^2}{b}. \tag{13}$$

REMARQUE. Formant l'équation de la tangente à l'ellipse (§ 252)

$$b \cos t \cdot X + a \sin t \cdot Y - ab = 0,$$

nous trouvons que sa distance au centre (§ 28) est

$$d = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}.$$

Comparant avec (10), nous trouvons que

$$R = \frac{a^2 b^2}{d^3},$$

autrement dit, *le rayon de courbure d'une ellipse est inversement proportionnel au cube de la distance du centre à la tangente* au point correspondant. En particulier, nous trouvons de (12) et (13):

$$R_a : R_b = b^3 : a^3.$$

§ 345. Développée d'une courbe plane

On appelle *développée* d'une courbe plane L le lieu géométrique L' de ses centres de courbure. Les formules (III), (3) et (3a) du § 344 donnant les coordonnées x_C, y_C du centre de courbure sont simultanément les équations paramétriques de la développée [dans les formules (3), (3a) le paramètre est respectivement x et y]. Eliminant le paramètre nous obtenons l'équation reliant les coordonnées de la développée.

EXEMPLE 1. Trouver la développée de la parabole

$$y^2 = 2px. \tag{1}$$

SOLUTION. Prenons comme paramètre l'ordonnée y. Portant dans les formules (3a) du § 344 les expressions $x' = \frac{y}{p}$ et $x'' = \frac{1}{p}$, nous obtenons

$$x_C = \frac{y^2}{2p} + \frac{p^2 + y^2}{p} = \frac{3}{2}\frac{y^2}{p} + p, \tag{2}$$

$$y_C = y - \frac{y(p^2 + y^2)}{p^2} = -\frac{y^3}{p^2}. \tag{3}$$

Ce sont les équations paramétriques de la développée (le paramètre est y). Pour éliminer y, représentons le système (2)-(3) sous la forme

$$\frac{2}{3}p(x_C - p) = y^2, \qquad p^2 y_C = -y^3.$$

Elevons les deux membres de la première équation au cube et les deux membres de la seconde au carré. Egalant les premiers membres nous obtenons l'équation de la développée

$$27py_C^2 = 8(x_C - p)^3.$$

La développée est une parabole semi-cubique (fig. 383).

EXEMPLE 2. Trouver la développée d'une cycloïde.

SOLUTION. Nous trouvons des équations paramétriques de la cycloïde (§ 253)

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(1 - \cos t) \tag{4}$$

en vertu des formules (III) du § 344:

$$x_C = a(t + \sin t), \qquad y_C = -a(1 - \cos t). \tag{5}$$

La parenté des équations (4) et (5) n'est pas due au hasard; si l'on introduit un nouveau paramètre t' à l'aide de la relation

$$t = t' + \pi, \tag{6}$$

es équations (5) s'écriront

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \pi a + a(t' - \sin t'), \\ y_C &= -2a + a(1 - \cos t'). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Cela signifie que *la développée L' de la cycloïde L est une cycloïde égale à la première et construite comme l'indique la fig.* 384.

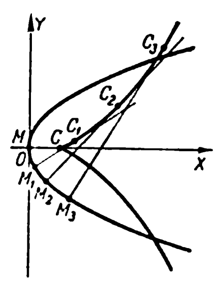


FIG. 383

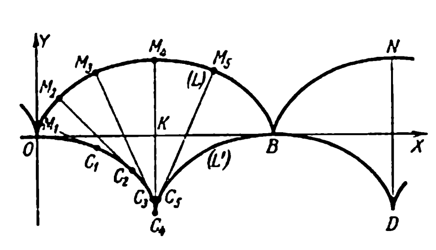


FIG. 384

On voit de (6) que les rotations des cercles générateurs aux points correspondants des deux cycloïdes diffèrent de 180°; en particulier au sommet de l'une des cycloïdes correspond le point de départ de l'autre.

§ 346. Propriétés de la développée d'une courbe plane

PROPRIÉTÉ 1. La normale à la courbe L est tangente à sa développée L' au centre de courbure correspondant.

EXEMPLE 1. La normale M_3C_3 à la cycloïde L (fig. 384) est tangente à la cycloïde L' au centre de courbure C_3 de la première cycloïde.

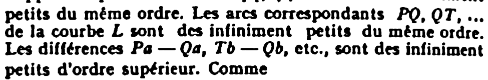
EXPLICATION. Soient p et q les centres de courbure sur les normales PP', QQ' à la courbe L (fig. 385). Supposons que le point P soit immobile et que le point Q tende vers P. Alors le point q décrit un arc qp de la développée L' et tend vers p. Le point a où la normale immobile coupe la normale mobile tend aussi vers p (en vertu de la définition du centre de courbure). Dans le triangle pqa l'angle p est plus petit que l'angle extérieur $PaQ = \omega$ de sorte qu'il est infiniment petit. Cela signifie que la sécante qp tend à coïncider avec PP', autrement dit PP' est la tangente à la développée: le point de tangence est le centre de courbure p correspondant au point P.

PROPRIÉTÉ 2. Supposons que le rayon de courbure R de la courbe L croisse lors du mouvement du point P vers le point U (fig. 385). Alors la longueur de l'arc pu de la développée L' est égale à l'accroissement du rayon de courbure de la courbe L:

$$\widehat{pu} = R_U - R_P.$$

EXEMPLE 2. Le rayon de courbure de la cycloïde L (fig. 384) au point O est nul; il croît sur l'arc OM_4 et au point M_4 il est égal à $M_4C_4 = 4a$ (cf. exemple 1). En vertu de la propriété 2, la longueur de l'arc OC_4 de la cycloïde L' est égale à $4a - 0 = 4a$ (cf. § 345, exemple 2).

EXPLICATION. Divisons l'arc pu de la développée L' en arcs partiels pq, qt, etc., dont le nombre tendra vers l'infini. Supposons que tous les arcs pq, qt, ... soient des infiniment petits du même ordre. Les arcs correspondants PQ, QT, ... de la courbe L sont des infiniment petits du même ordre. Les différences $Pa - Qa$, $Tb - Qb$, etc., sont des infiniment petits d'ordre supérieur. Comme



$$pa + aq = (Pa - Pp) + (Qq - Qa) = Qq - Pp + (Pa - Qa)$$

et de même pour les lignes brisées qbt, tcu, ..., le périmètre de la ligne brisée $pqtu$ diffère de la grandeur

$$(Qq - Pp) + (Tt - Qq) + (Uu - Tt) + \ldots = Uu - Pp$$

d'un infiniment petit (qui s'obtient par l'accumulation des infiniment petits d'ordre supérieur).

Cela signifie que la longueur de l'arc pu de la développée, qui est la limite de la longueur de la ligne brisée circonscrite, est égale à $Uu - Pp$.

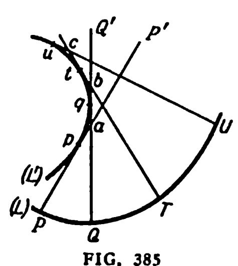


FIG. 385

Remarque. S'il y a sur l'arc de la courbe L des points de rayon de courbure extrémal, la propriété 2 n'est plus valable. Ainsi, aux points M_3 et M_5 (fig. 384) de la cycloïde L les rayons de courbure sont identiques, alors que la longueur de l'arc $C_3C_4C_5$ n'est, bien entendu, pas nulle. La propriété 2 n'est plus valable parce qu'au point M_4 le rayon de courbure admet un maximum. L'arc $\widehat{C_3C_4}$ est égal à $M_4C_4 - M_3C_3$, l'arc $\widehat{C_4C_5}$ est aussi égal à $M_4C_4 - M_3C_3$ (et non à $M_3C_3 - M_4C_4$).

§ 347. Développante d'une courbe plane

La courbe plane L peut être obtenue à partir de sa développée L' par la construction mécanique suivante.

Enroulons sur la développée L' un fil flexible et inextensible, puis tendons-le suivant pP (fig. 385). Si l'on déroule le fil, son extrémité libre située en P à l'instant initial décrit la courbe L.

Explication. Le fil tendu reste tangent à L'. S'il quitte la développée au point q, son extrémité libre augmente de la longueur de l'arc $\widehat{pq}$, autrement dit (§ 346, propriété 2) de $Qq - Pp$. L'extrémité libre devient égale à $Pp + (Qq - Pp) = Qq$ et l'extrémité du fil coïncide avec le point Q.

Cette construction nous conduit à la définition géométrique suivante.

Définition. Choisissons sur la courbe L' (fig. 385) le sens des arcs croissants (l'un quelconque des deux possibles, par exemple de u vers p); portons dans ce sens sur les tangentes les segments (Uu, tT, Qq, ...) dont les longueurs décroissent avec la croissance de la longueur de l'arc. Le lieu géométrique L des extrémités de ces segments est appelé *développante* de cette courbe.

Toute courbe plane L' possède une infinité de développantes (PS, P_1S_1, P_2S_2 sur la fig. 386). Pour chacune d'elles la courbe L' est la développée.

Les développantes de la courbe L' sont les *trajectoires orthogonales* de ses tangentes (autrement dit, elles coupent toutes les tangentes sous un angle droit; cf. § 346, propriété 1).

Sur la développante d'une courbe gauche cf. § 362, remarque 2.

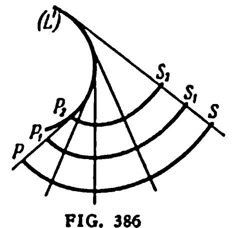


FIG. 386

§ 348. Courbe gauche définie paramétriquement

Une courbe gauche, intersection de deux surfaces, est représentée par un système de deux équations reliant x, y, z (cf. § 170).

Une courbe gauche, trace d'un point mobile, est représentée par le système de trois équations:

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t) \tag{1}$$

exprimant les coordonnées du point en fonction du *paramètre t* (en mécanique ce paramètre est habituellement le temps). Les équations (1) sont appelées les *équations paramétriques* d'une courbe gauche (cf. § 251).

On prend fréquemment pour paramètre l'une des coordonnées, par exemple x. Les équations de la courbe s'écrivent alors

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x) \tag{2}$$

(la première équation (1) devient l'identité $x = x$).

Les équations (2) ne permettent pas de représenter une courbe située dans un plan perpendiculaire à l'axe OX (pour cette courbe tous les points ont la même abscisse).

Si l'équation d'une surface se transforme en identité après substitution des expressions (1), la courbe (1) est située sur cette surface.

Toute courbe peut être représentée paramétriquement d'une infinité de manières. Si l'on connaît un système d'équations paramétriques, on en obtient tout autre en remplaçant t par une certaine fonction d'un nouveau paramètre t'.

La projection de la courbe (1) sur le plan $z = c$ (en particulier sur le plan de coordonnées XOY) est représentée par les équations

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = c. \tag{3}$$

L'équation $z = c$ est souvent sous-entendue. Il en est de même pour les projections sur les plans $x = a$ et $y = b$.

Exemple. Les équations paramétriques

$$x = -2 + t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 1 - 2t \tag{1a}$$

représentent une droite.

Si on prend x comme paramètre, cette même droite sera représentée par les équations

$$y = 2x + 7, \quad z = -2x - 3. \tag{2a}$$

La droite (1a) est située sur la surface

$$z - \frac{1}{2} = \frac{2x^2}{7} - \frac{y^2}{14} \tag{4}$$

(paraboloïde hyperbolique), car l'égalité (4) devient une identité quand on y porte les expressions (1a).

La droite (1a) est aussi sur le plan

$$y + z - 4 = 0. \qquad (5)$$

Par conséquent, la droite (1a) appartient à l'intersection des surfaces (4) et (5).

Il n'en découle pas que les surfaces (4) et (5) *ne* se coupent *qu*'aux points de la droite (1a). Le plan (5) coupe le paraboloïde (4) suivant deux génératrices rectilignes (§ 180); l'une d'elles est précisément la droite (1a).

Prenant l'expression $t = 2 + \frac{1}{2}t'$ du paramètre t en fonction d'un nouveau paramètre t', nous obtenons d'autres équations paramétriques de cette même droite:

$$x = \frac{1}{2}t', \quad y = 7 + t', \quad z = -3 - t'. \qquad (1b)$$

La projection de la droite (1a) sur le plan XOY est représentée par les équations paramétriques

$$x = -2 + t, \quad y = 3 + 2t \qquad (3a)$$

(on sous-entend l'équation $z = 0$). Nous obtenons de (1b) l'équation de cette même projection sous la forme

$$x = \frac{1}{2}t', \quad y = 7 + t', \qquad (3b)$$

etc. Eliminant le paramètre, nous obtenons dans les deux cas $y = 2x + 7$.

§ 349. Hélice circulaire

Supposons qu'une génératrice QR d'un cylindre circulaire tourne uniformément sur la surface du cylindre. Alors le point M (fig. 387) se déplaçant de façon uniforme sur la génératrice décrit une courbe AMC appelée *hélice circulaire*. On appelle *rayon* de l'hélice le rayon a du cylindre sur lequel est tracée l'hélice.

Si l'on observe le mouvement du point M du côté de la base vers laquelle il se déplace, la génératrice tourne soit dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens positif), soit dans le sens des aiguilles d'une montre (sens négatif) (*). Dans le premier cas l'hélice est dite *de sens direct* (fig. 388,*a*), dans le second cas *de sens indirect* (fig. 388,*b*).

(*) Si le point M se déplace sur l'hélice dans le sens contraire, nous l'observons alors du côté de l'autre base, mais le sens de la rotation de la génératrice change lui aussi. Par conséquent, le sens positif de la rotation reste positif et le sens négatif, négatif.

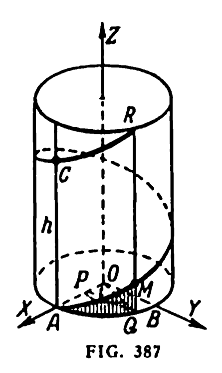


FIG. 387

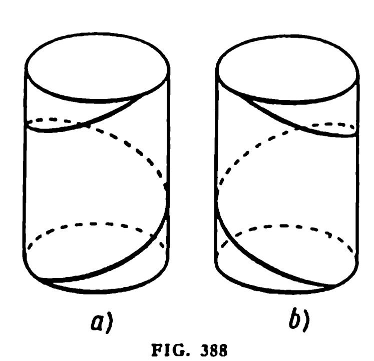


FIG. 388

Le chemin rectiligne $AC = h$ (fig. 387), parcouru par le point M sur la génératrice au cours d'une rotation complète de cette dernière, est appelé le *pas* de l'hélice. Le pas de l'hélice de sens direct est estimé positif, celui de l'hélice de sens indirect négatif.

On ne peut faire coïncider les hélices de sens direct et indirect (de même rayon et d'un pas identique en valeur absolue). Elles sont liées par une symétrie-miroir.

REMARQUE. Si l'on déroule sur un plan une surface cylindrique, la circonférence AQB (fig. 387) donne une droite perpendiculaire à la génératrice. Comme le segment QM est proportionnel à l'arc AQ:

$$QM : \widehat{AQ} = h : 2\pi a, \tag{1}$$

l'hélice donne dans le développement une droite (AM sur la fig. 389). Sa pente γ par rapport à la génératrice est déterminée par la formule

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{AQ}{QM} = \frac{a}{b}, \tag{2}$$

où $b = \dfrac{h}{2\pi}$.

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES DE L'HÉLICE CIRCULAIRE. Prenons pour axe OZ l'axe du cylindre (fig. 387), l'axe OX passant par un point quelconque A de l'hélice. Considérons comme paramètre t l'angle de rotation

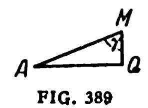


FIG. 389

du plan de la section axiale $OQMR$ à partir de la position initiale OAC. Nous avons alors

$$x = OP = a \cos t, \quad y = PQ = a \sin t, \quad z = QM = bt. \qquad (3)$$

Les deux équations $y = a \sin t$, $z = bt$ représentent la projection de l'hélice sur le plan YOZ. Cette projection est une sinusoïde. La projection sur le plan XOZ est aussi une sinusoïde et la projection sur le plan XOY une circonférence.

§ 350. Longueur d'un arc de courbe gauche

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'une courbe gauche s'exprime par l'intégrale

$$s = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (1)$$

ou

$$s = \int_{(A)}^{(B)} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \qquad (2)$$

La différentielle de l'arc est égale à (cf. § 339)

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \qquad (3$$

Exemple 1. Trouver la longueur s_1 d'une spire de l'hélice circulaire.

Solution. On obtient de la formule (2) en tenant compte des formules (3) du § 349:

$$s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{[d(a \cos t)]^2 + [d(a \sin t)]^2 + [d(bt)]^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\, dt = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad (4)$$

autrement dit, la *longueur d'une spire de l'hélice circulaire est égale à l'hypoténuse du triangle dont l'un des côtés* ($2\pi a$) *est égal à la circonférence de la base et l'autre* ($2\pi b$) *au pas de l'hélice* (cf. § 349, remarque).

Si l'origine de l'arc est immobile et l'extrémité varie, la longueur de l'arc est une fonction du paramètre t et, par conséquent (§ 348), peut être elle-même adoptée comme paramètre.

Exemple 2. Ecrire l'équation de l'hélice circulaire en prenant pour paramètre la longueur de l'arc comptée à partir de l'origine $t = 0$.

Solution. Nous trouvons comme dans l'exemple 1:

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\, t. \tag{5}$$

Exprimant t en fonction de s et portant sa valeur dans (3) § 349, nous obtenons:

$$x = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad y = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad z = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} s. \tag{6}$$

§ 351. Tangente à une courbe gauche

Une droite MT est la tangente à la courbe (L) au point $M(x, y, z)$ si la sécante MM' tend vers la position MT lorsque M' tend vers M (cf. § 225).

Si la courbe (L) est donnée par les équations paramétriques

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t), \quad z = \psi(t), \tag{1}$$

on peut prendre pour vecteur directeur (§ 143) de la tangente le vecteur(*)

$$\mathbf{r}' = \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right\} \tag{2}$$

ou le vecteur colinéaire

$$\mathbf{t} = \left\{ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\}. \tag{3}$$

Son module étant égal à l'unité (**), on appelle le vecteur $\mathbf{t}$ *vecteur unitaire de la tangente.*

Les coordonnées du vecteur $\mathbf{t}$ sont les cosinus directeurs (§ 144) de la tangente

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds} \tag{4}$$

(sur la fig. 390 $\alpha = \widehat{AMT}$, $\beta = \widehat{BMT}$, $\gamma = \widehat{CMT}$).

Explication. On peut considérer comme vecteur directeur de la sécante le vecteur $\overrightarrow{MM'} = \{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}$ et, par conséquent, les vecteurs colinéaires

(*) Le vecteur $\mathbf{r}'$ est la dérivée du rayon vecteur $\mathbf{r}\{x, y, z\}$ (cf. théorème du § 355).

(**) $\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$

$\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \left\{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}, \dfrac{\Delta y}{\Delta t}, \dfrac{\Delta z}{\Delta t}\right\}$ et $\dfrac{\overrightarrow{MM'}}{\widehat{MM'}} = \left\{\dfrac{\Delta x}{\Delta s}, \dfrac{\Delta y}{\Delta s}, \dfrac{\Delta z}{\Delta s}\right\}$. Les formules (2) et (3) s'obtiennent par passage à la limite.

Nous avons de la fig. 390 $\cos \widehat{CMM'} = \dfrac{MC}{MM'} \approx \dfrac{\Delta z}{\Delta s}$. Le passage à la limite donne $\cos \gamma = \dfrac{dz}{ds}$. Nous obtenons de même les deux autres formules (4).

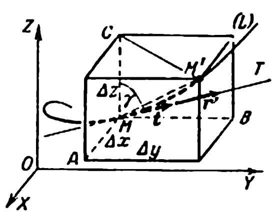


FIG. 390

Les équations symétriques de la tangente (§ 150) s'écrivent

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}. \tag{5}$$

Les accents désignent les dérivées par rapport à un paramètre quelconque.

EXEMPLE. Considérons l'hélice circulaire (§ 349)

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt. \tag{1a}$$

Le vecteur

$$\mathbf{r}' = \{-a\sin t,\ a\cos t,\ b\} = \{-y,\ x,\ b\} \tag{2a}$$

est le vecteur directeur de la tangente. Nous trouvons des équations (6) du § 350 le vecteur unitaire de la tangente:

$$\mathbf{t} = \left\{-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}, \tag{3a}$$

de sorte que

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha &= -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t, \\ \cos\beta &= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t, \quad \cos\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{4a}$$

La dernière formule donne: $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{a}{b}$ (cf. § 349).

Les équations de la tangente s'écrivent

$$\frac{X-a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y-a\sin t}{a\cos t} = \frac{Z-bt}{b} \tag{5a}$$

ou

$$\frac{X-x}{-y} = \frac{Y-y}{x} = \frac{Z-z}{b}. \tag{5b}$$

Sous forme paramétrique on a

$$X = x - yu, \qquad Y = y + xu, \qquad Z = z + bu. \tag{6}$$

A l'origine ($t = 0$, $x = a$, $y = 0$, $z = 0$) la tangente est représentée par l'équation $X = a$, $Y = au$, $Z = bu$.

§ 352. Plan normal

Le plan P (fig. 391) mené par le point M de la courbe L perpendiculairement à la tangente MT est appelé *plan normal* à la courbe L en M.

Le vecteur directeur de la tangente (§ 351) $\mathbf{r}' = \{x', y', z'\}$ est le vecteur normal au plan P. L'équation du plan normal s'écrit (§ 123)

$$(X - x)\, x' + (Y - y)\, y' + (Z - z)\, z' = 0$$

ou sous forme vectorielle

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})\, \mathbf{r}' = 0.$$

EXEMPLE. L'équation du plan normal à l'hélice circulaire

$$x = a \cos t, \qquad y = a \sin t, \qquad z = bt$$

s'écrit

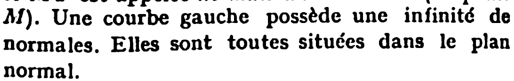
$$(X - a \cos t)(-a \sin t) + (Y - a \sin t)(a \cos t) + (Z - bt)\, b = 0$$

ou

$$-yX + xY + bZ - bz = 0.$$

Le plan normal à l'origine $(a, 0, 0)$ est représenté par l'équation

$$aY + bZ = 0.$$



Toute droite passant par le point M d'une courbe gauche et perpendiculaire à la tangente MT est appelée *normale* à la courbe L (au point M). Une courbe gauche possède une infinité de normales. Elles sont toutes situées dans le plan normal.

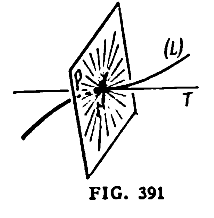


FIG. 391

Si la courbe L est située dans un même plan, on distingue parmi ses normales la *normale principale*, située dans ce plan. On peut également définir la normale principale à une courbe gauche (§ 359).

§ 353. Fonction vectorielle d'une variable scalaire

DÉFINITION. Le vecteur **p** est appelé *fonction vectorielle* de la variable scalaire u si à chaque valeur numérique que peut prendre u correspond une valeur déterminée du vecteur **p** (c'est-à-dire un module déterminé et une direction déterminée de ce vecteur).

A la différence de la fonction vectorielle une grandeur scalaire dépendant de u est appelée *fonction scalaire.*

EXEMPLE 1. Soit M un point se déplaçant sur la courbe L (fig. 392). La vitesse **v** (considérée comme un vecteur) est une fonction vectorielle de la variable scalaire t (le temps compté à partir de l'instant initial), car à chaque instant le vecteur **v** possède un module déterminé et une direction déterminée (il est colinéaire à la tangente à la courbe L). Le vecteur **v** peut également être considéré comme une fonction de la variable (scalaire) s (la longueur de l'arc M_0M). Le *module* de la vitesse est une fonction *scalaire* de la variable t (ou s).

EXEMPLE 2. Le rayon vecteur (§ 95) $\overrightarrow{OM}$ du point M décrivant la courbe L (fig. 392) est une *fonction vectorielle* de la longueur de l'arc $s = \overset{\frown}{M_0M}$. Les coordonnées x, y, z du vecteur $\overrightarrow{OM}$ (c'est-à-dire les coordonnées du point M) sont des fonctions *scalaires* de s (cf. § 350, exemple 2).

REMARQUE. Si l'origine du vecteur **p** est variable (comme dans l'exemple 1), on peut porter à partir d'un point fixe quelconque O (fig. 393) le vecteur $\overrightarrow{OP}$ égal au vecteur **p**. Le lieu géométrique de l'extrémité P (en règle générale c'est une courbe) est appelé *hodographe* de la fonction vectorielle **p**.

NOTATION DE LA FONCTION VECTORIELLE. L'écriture

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$$

signifie que **p** est une fonction vectorielle de la variable scalaire u.

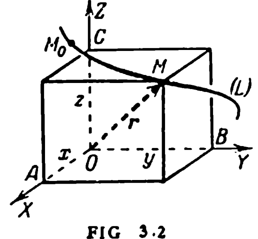


FIG 3.2

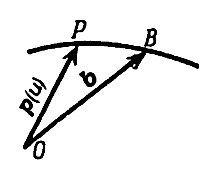




FIG. 393

§ 354. Limite d'une fonction vectorielle

DÉFINITION. Le vecteur constant b est appelé la *limite de la fonction vectorielle* p(u) quand $u \to a$ (ou quand $u \to \infty$) si le module de la différence des vecteurs p(u) et b est infiniment petit quand $u \to a$ (ou quand $u \to \infty$).

ÉCRITURE :

$$\lim_{u \to a} \mathbf{p}(u) = \mathbf{b}. \qquad (1)$$

EXPLICATION. Rapportons le vecteur courant p(u) à l'origine fixe O (fig. 393). Si, quand $u \to a$, l'extrémité variable P tend à coïncider avec le point fixe B, le vecteur $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ est la limite du vecteur p(u). La différence p(u) — b est le vecteur $\overrightarrow{BP}$, et le module de ce dernier est infiniment petit.

REMARQUE 1. Si le module de la fonction vectorielle p(t) est infiniment petit, alors le vecteur p lui-même est dit *infiniment petit*. Le vecteur est un infiniment petit du même ordre que son module.

REMARQUE 2. La continuité d'une fonction vectorielle est définie de la même façon que celle d'une fonction scalaire (§ 218). Elle est très bien illustrée par l'hodographe de la fonction, qui est une courbe continue. Si le vecteur p est une fonction continue de la variable t, alors ses coordonnées sont des fonctions (scalaires) continues de t et inversement.

REMARQUE 3. Les théorèmes sur la limite d'une somme et d'un produit sont valables pour les fonctions vectorielles, et l'on peut alors considérer tous les produits possibles (produit d'une fonction scalaire par une fonction vectorielle, produit scalaire de deux fonctions vectorielles, produit vectoriel de deux fonctions vectorielles et produit mixte de trois fonctions vectorielles). Le théorème sur la limite d'un quotient s'applique dans le seul cas de division considérée en algèbre vectorielle (division d'une fonction vectorielle par une fonction scalaire).

§ 355. Dérivée d'une fonction vectorielle

DÉFINITION. On appelle dérivée de la fonction vectorielle p(u) le vecteur

$$\mathbf{p}' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{p}(u + \Delta u) - \mathbf{p}(u)}{\Delta u}. \qquad (1)$$

Le vecteur p′ est une fonction vectorielle de la variable u. C'est ce qui justifie l'appellation de *dérivée de la fonction vectorielle* et la notation p′(u).

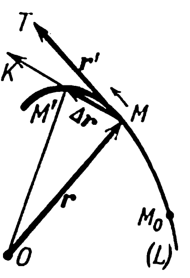


FIG. 394

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. Supposons que l'extrémité variable du vecteur $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}(u)$ (fig. 394) décrive la courbe L [l'hodographe de la fonction vectorielle $\mathbf{r}(u)$]. Le vecteur $\mathbf{r}'(u)$ est alors dirigé suivant la tangente MT dans le sens de la croissance du paramètre u; sa longueur $|\mathbf{r}'(u)|$ est égale à $\left|\frac{ds}{du}\right|$ (cf. exemple 1). Si l'on prend s pour variable, la longueur de la dérivée de la fonction vectorielle est égale à l'unité (cf. exemple 2).

EXPLICATION. Lors du passage du point $M(u)$ au point $M'(u + \Delta u)$, le vecteur $\mathbf{r}(u)$ reçoit l'accroissement

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(u + \Delta u) - \mathbf{r}(u) = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}.$$

Le vecteur $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta u} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta u}$ est orienté suivant la sécante MM'; sa longueur est égale à $\frac{MM'}{|\Delta u|} \approx \frac{\widehat{MM'}}{|\Delta u|} = \left|\frac{\Delta s}{\Delta u}\right|$. Quand $\Delta u \to 0$, la sécante MM' tend à coïncider avec la tangente, et le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta u}$ tend vers la limite $\frac{ds}{du}$.

Les coordonnées de la dérivée p′(u) *du vecteur* p(u) *sont les dérivées des coordonnées de ce vecteur*, autrement dit,

$$[x(u)\,\mathbf{i} + y(u)\,\mathbf{j} + z(u)\,\mathbf{k}]' = x'(u)\,\mathbf{i} + y'(u)\,\mathbf{j} + z'(u)\,\mathbf{k}, \tag{2}$$

ou avec d'autres notations

$$\{x, y, z\}' = \{x', y', z'\}. \tag{3}$$

EXEMPLE 1. Avec les notations du § 349, le rayon vecteur $\mathbf{r}$ de l'hélice circulaire s'exprime en fonction du paramètre t de la manière suivante:

$$\mathbf{r} = \{a \cos t,\ a \sin t,\ bt\}.$$

En vertu de (3) nous avons

$$\mathbf{r}' = \{-a \sin t,\ a \cos t,\ b\}.$$

Le vecteur $\mathbf{r}'$ est dirigé suivant la tangente à l'hélice [cf. § 351, formule (2a)]; sa longueur $\sqrt{a^2 + b^2}$ est égale à $\frac{ds}{dt}$ [cf. (5) § 350].

EXEMPLE 2. Si l'on prend comme variable du rayon vecteur r de l'hélice l'arc s, alors (§ 350, exemple 2)

$$\mathbf{r} = \left\{ a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} s \right\},$$

$$\mathbf{r}' = \left\{ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\}.$$

Le module du vecteur r′ est égal à

$$\frac{a^2}{a^2+b^2} \sin^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{a^2}{a^2+b^2} \cos^2 \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR. Elles se définissent comme les dérivées d'ordre supérieur des fonctions scalaires et sont notées p″(u), p‴(u), etc. Les expressions des dérivées en fonction des différentielles sont données au § 356.

INTERPRÉTATION MÉCANIQUE DES DÉRIVÉES. Soit r(t) la fonction vectorielle exprimant le rayon vecteur d'un point mobile en fonction du temps t. Alors r′(t) est le vecteur vitesse du point M et r″(t) le vecteur accélération.

§ 356. Différentielle d'une fonction vectorielle

La différentielle de la fonction vectorielle p(u) est définie de la même façon que celle d'une fonction scalaire (§ 228) et est notée dp.

La différentielle de la fonction vectorielle p(u) est un *vecteur*; elle est égale au produit de la dérivée p′(u) de la fonction vectorielle par l'accroissement de la variable:

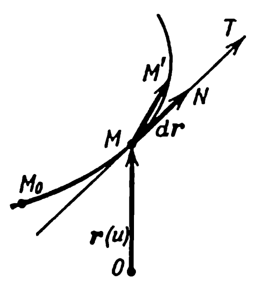


FIG. 395

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}'(u)\, \Delta u \qquad (1)$$

ou

$$d\mathbf{p} = \mathbf{p}'(u)\, du. \qquad (2)$$

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. La différentielle $d\mathbf{r}(u)$ est un vecteur $\overrightarrow{MN}$ (fig. 395) orienté suivant la tangente MT; les coordonnées du vecteur $d\mathbf{r}$ sont les différentielles des coordonnées x, y, z du point M:

$$d\mathbf{r} = \{dx, dy, dz\}. \qquad (3)$$

La longueur du vecteur $d\mathbf{r}$ est égale à la différentielle de l'arc $s = \overset{\frown}{M_0M}$:

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds, \qquad (4)$$

autrement dit,

$$dr^2 = ds^2. \tag{5}$$

Si l'arc s est la variable de la fonction vectorielle $\mathbf{r}(s)$, alors $|d\mathbf{r}| = \Delta s = \overset{\frown}{MM'}$. Dans le cas général $|\Delta\mathbf{r}|$ diffère de l'arc $\overset{\frown}{MM'}$ (de même que de la corde MM') d'un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δu.

Invariance de l'expression (2). La formule (2) est juste également dans le cas où u est considérée comme une fonction d'une variable quelconque. La formule (1) ne possède pas cette propriété (cf. § 234).

Différentielles d'ordre supérieur. Elles se définissent comme les différentielles d'ordre supérieur des fonctions scalaires (§ 258) et sont notées $d^2\mathbf{p}$, $d^3\mathbf{p}$, etc.

Expressions des dérivées en fonction des différentielles:

$$\mathbf{p}'(u) = \frac{d\mathbf{p}}{du}, \tag{6}$$

$$\mathbf{p}''(u) = \frac{d^2\mathbf{p}}{du^2}, \qquad \mathbf{p}'''(u) = \frac{d^3\mathbf{p}}{du^3}, \ldots \tag{7}$$

Dans la formule (6) u peut être aussi bien une variable indépendante qu'une variable dépendante; les formules (7) sont vraies quand u est une variable indépendante; dans le cas contraire, elles sont généralement fausses (cf. § 259).

§ 357. Propriétés de la dérivée et de la différentielle d'une fonction vectorielle

1. La dérivée et la différentielle d'un vecteur constant $\mathbf{a}$ sont nulles:

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = 0, \qquad d\mathbf{a} = 0. \tag{1}$$

Inversement, si la dérivée d'un vecteur est identiquement nulle, ce vecteur est un vecteur constant.

Remarque. Un vecteur constant possède non seulement une longueur constante, mais aussi une direction constante. La dérivée $\frac{d\mathbf{p}}{du}$

du vecteur variable p de longueur constante *n'est pas nulle* (elle est perpendiculaire au vecteur p; cf. propriété 6).

2. La différentielle de la somme de plusieurs vecteurs est égale à la somme de leurs différentielles. Une propriété analogue est valable pour les dérivées:

$$d[\mathbf{p}(u) + \mathbf{q}(u) - \mathbf{r}(u)] = d\mathbf{p}(u) + d\mathbf{q}(u) - d\mathbf{r}(u), \tag{2}$$

$$\frac{d}{du}[\mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r}] = \frac{d\mathbf{p}}{du} + \frac{d\mathbf{q}}{du} - \frac{d\mathbf{r}}{du}. \tag{2a}$$

3. Pour tous les produits des vecteurs on a des formules de dérivation analogues aux formules du § 239, *avec cette différence que dans les produits vectoriels et mixtes l'ordre adéquat des facteurs doit être respecté* (cf. § 112, 2, § 117, 1):

$$d(m\mathbf{p}) = m\,d\mathbf{p} + \mathbf{p}\,dm, \tag{3}$$

$$d(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{p} \times d\mathbf{q} + d\mathbf{p} \times \mathbf{q}, \tag{4}$$

$$d(\mathbf{p}\mathbf{q}) = \mathbf{p}\,d\mathbf{q} + \mathbf{q}\,d\mathbf{p}, \tag{5}$$

$$d(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = (d\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) + (\mathbf{p}, d\mathbf{q}, \mathbf{r}) + (\mathbf{p}, \mathbf{q}, d\mathbf{r}). \tag{6}$$

Les formules correspondantes pour les dérivées sont:

$$\frac{d}{du}(m\mathbf{p}) = m\frac{d\mathbf{p}}{du} + \mathbf{p}\frac{dm}{du}, \tag{3a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) = \mathbf{p} \times \frac{d\mathbf{q}}{du} + \frac{d\mathbf{p}}{du} \times \mathbf{q}, \tag{4a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p}\mathbf{q}) = \mathbf{p}\frac{d\mathbf{q}}{du} + \mathbf{q}\frac{d\mathbf{p}}{du}, \tag{5a}$$

$$\frac{d}{du}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \left(\frac{d\mathbf{p}}{du}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\right) + \left(\mathbf{p}, \frac{d\mathbf{q}}{du}, \mathbf{r}\right) + \left(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \frac{d\mathbf{r}}{du}\right). \tag{6a}$$

4. Un cas particulier des formules (5) et (5a):

$$d(\mathbf{p}^2) = 2\mathbf{p}\,d\mathbf{p}, \qquad \frac{d}{du}(\mathbf{p}^2) = 2\mathbf{p}\frac{d\mathbf{p}}{du}. \tag{7}$$

5. On peut sortir un facteur constant (scalaire ou vectoriel) de sous le signe de la différentielle (de la dérivée):

$$d(a\mathbf{p}) = a\,d\mathbf{p} \qquad (a = \text{const}), \tag{3b}$$

$$d(\mathbf{a} \times \mathbf{q}) = \mathbf{a} \times d\mathbf{q} \qquad (\mathbf{a} = \text{const}), \tag{4b}$$

$$d(\mathbf{a}\mathbf{q}) = \mathbf{a}\,d\mathbf{q} \qquad (\mathbf{a} = \text{const}), \tag{5b}$$

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathbf{a}\,d(\mathbf{q} \times \mathbf{r}) \qquad (\mathbf{a} = \text{const}). \tag{6b}$$

Cela découle des propriétés 1 et 3.

6. Si la longueur du vecteur $\mathbf{p}(u)$ est constante, alors celui-ci est perpendiculaire au vecteur $\mathbf{p}'(u)$ et aussi au vecteur $d\mathbf{p}(u)$, autrement dit, si

$$\mathbf{p}^2 = \text{const}, \tag{8}$$

alors (cf. 4)

$$\mathbf{p}\mathbf{p}' = 0, \qquad \mathbf{p}\, d\mathbf{p} = 0. \tag{9}$$

Cela découle de (7).

Géométriquement, l'hodographe du vecteur $\mathbf{p}(u)$ est une courbe sphérique; sa tangente est perpendiculaire au rayon de la sphère.

§ 358. Plan osculateur

Définition. On appelle *plan osculateur* en M à la courbe L le plan P vers lequel tend le plan KMK' (fig. 396) lorsque deux points (non confondus) K et K' de la courbe L se rapprochent indéfiniment du point M.

Remarque 1. Pour une courbe L située dans un même plan Q le plan osculateur est confondu avec le plan Q. Pour une ligne droite le plan osculateur reste indéterminé.

Explication. Prenons du fil de fer et confectionnons avec un modèle de la courbe L. Fixons trois points M, K, K'. S'ils ne sont pas trop éloignés les uns des autres, l'arc KMK' tiendra pratiquement dans le plan KMK' (bien qu'il ne soit pas rectiligne). Le plan osculateur est une image abstraite du plan KMK'. Une feuille de papier placée sur le modèle de façon qu'elle coïncide avec le plan osculateur, est inclinée, mais est en état d'équilibre (grâce aux forces de frottement dans le secteur KMK'). Dans toutes les autres positions la feuille ne tient pas sur le modèle.

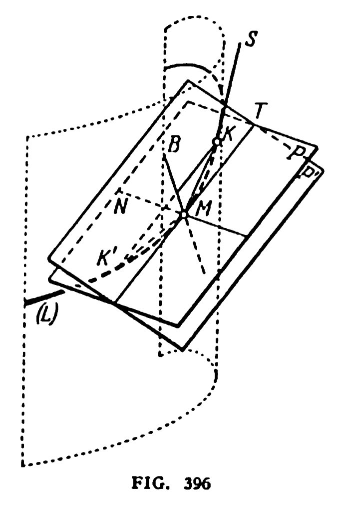


FIG. 396

Equation du plan osculateur. Le «vecteur vitesse» $\mathbf{r}'(u)$ et le «vecteur accélération» $\mathbf{r}''(u)$ sont tous

deux situés dans le plan osculateur[*]. S'ils ne sont pas colinéaires, le produit vectoriel

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' \tag{1}$$

est le vecteur normal au plan osculateur[*], et l'équation de ce dernier s'écrit

$$[(\mathbf{R} - \mathbf{r}), \mathbf{r}', \mathbf{r}''] = 0 \tag{2}$$

ou sous forme de coordonnées

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

EXEMPLE. Trouver le plan osculateur à l'hélice

$$\mathbf{r} = \{a \cos u, \quad a \sin u, \quad bu\}.$$

SOLUTION. Trouvons:

$$\mathbf{r}'(u) = \{-a \sin u, \quad a \cos u, \quad b\},$$
$$\mathbf{r}''(u) = \{-a \cos u, \quad -a \sin u, \quad 0\},$$
$$\mathbf{r}'(u) \times \mathbf{r}''(u) = \{ab \sin u, \quad -ab \cos u, \quad a^2\} = a\{b \sin u, \quad -b \cos u, \quad a\}.$$

En vertu de (3) l'équation du plan osculateur est

$$(X - a \cos u)\, b \sin u - (Y - a \sin u)\, b \cos u + (Z - bu)a = 0,$$

ou bien

$$b \sin u X - b \cos u Y + aZ = abu.$$

L'angle φ formé par le plan osculateur et l'axe de l'hélice est déterminé (§ 146) à l'aide de la formule

$$\sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{b^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u + a^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Nous en tirons $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$, autrement dit, le plan osculateur fait avec l'axe de l'hélice le même angle constant que la tangente (§ 351, exemple).

Le plan osculateur possède les propriétés suivantes.

1) Le plan TMK (fig. 396) passant par la tangente MT et le point K de la courbe L tend vers le plan osculateur P lorsque K se rapproche indéfiniment de M.

2) Le plan P' (fig. 396) passant par la tangente MT et parallèle à la tangente KS tend aussi vers le plan P lorsque K se rapproche indéfiniment de M.

---

[*] Si $\mathbf{r}'$ et $\mathbf{r}''$ sont colinéaires et si $\mathbf{r}^{(k)}$ est le premier des vecteurs dérivés non colinéaires à $\mathbf{r}'$, on peut adopter en qualité de vecteur normal du plan osculateur $\mathbf{r}' \times \mathbf{r}^{(k)}$.

REMARQUE. Chacune de ces propriétés peut servir de définition du plan osculateur.

§ 359. Normale principale. Trièdre mobile

On appelle *normale principale* en M à la courbe L (MN sur la fig. 396) celle des normales qui est située dans le plan osculateur P. La perpendiculaire MB au plan osculateur est appelée *binormale*. Le plan TMB passant par la tangente et la binormale est le *plan rectifiant*.

Les trois plans orthogonaux TMN (plan osculateur), NMB (plan normal) et BMT (plan rectifiant) constituent le *trièdre mobile*, dont les arêtes orthogonales MT, MN, MB sont souvent considérées comme axes de coordonnées (la tangente MT est alors l'axe des abscisses, la normale principale MN l'axe des ordonnées et la binormale MB l'axe des cotes). Pour le choix des directions positives cf. § 361.

Dans le cas général on calculera les vecteurs directeurs des arêtes dans l'ordre suivant:

$\mathbf{T} = \mathbf{r}'$ (vecteur de la tangente; cf. § 351), (1)

$\mathbf{B} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}''$ (vecteur de la binormale; cf. § 358), (2)

$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'$ (vecteur de la normale principale). (3)

L'expression (3) du vecteur $\mathbf{N}$ se simplifie si l'on prend pour paramètre l'arc s de la courbe L. Plus précisément, dans ce cas nous avons

$$\mathbf{N} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} \text{ (*)}. \tag{4}$$

EXEMPLE. Trouver le trièdre mobile de l'hélice

$$\mathbf{r} = \{a \cos u, \ a \sin u, \ bu\}.$$

SOLUTION. Le vecteur de la tangente (§ 355, exemple 1) est

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}' = \{-a \sin u, \ a \cos u, \ b\}.$$

Le vecteur de la binormale est (§ 358, exemple)

$$\mathbf{B} = \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \{ab \sin u, \ -ab \cos u, \ a^2\}.$$

(*) Nous obtenons à l'aide de la formule du double produit vectoriel (§ 122):

$$\mathbf{N} = (\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}' = \mathbf{r}''(\mathbf{r}'^2) - \mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'');$$

comme dans le cas présent $\mathbf{r}'^2 = 1$ et $\mathbf{r}'\mathbf{r}'' = 0$, on a $\mathbf{N} = \mathbf{r}''$.

GÉOMÉTRIQUEMENT, le vecteur accélération $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ est situé dans le plan osculateur et est perpendiculaire au vecteur de la tangente $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$. Il est donc dirigé suivant la normale principale.

Le vecteur de la normale principale est

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \{-a(a^2 + b^2)\cos u, \quad -a(a^2 + b^2)\sin u, \quad 0\}.$$

Les équations de la normale principale s'écrivent

$$\frac{X - a\cos u}{\cos u} = \frac{Y - a\sin u}{\sin u} = \frac{Z - bu}{0}.$$

On voit de ces équations que la normale principale est perpendiculaire à l'axe de l'hélice et coupe cet axe au point $(0, 0, bu)$. Cela signifie que la normale principale est dirigée suivant le rayon du cylindre sur lequel est tracée l'hélice. Le plan rectifiant est confondu avec le plan tangent du cylindre.

§ 360. Position relative d'une courbe et d'un plan

1. Si le plan Q passant par le point M ne contient pas la tangente MT de la courbe L, alors dans le voisinage du point M cette courbe est située des deux côtés du plan.

En particulier, le plan normal coupe toujours la courbe L.

La distance d du point voisin M' de la courbe L au plan Q est dans ce cas un infiniment petit du même ordre que l'arc $\overset{\frown}{MM'}$.

2. Si le plan Q contient la tangente MT, mais est distinct du plan osculateur en M à L, alors, dans le voisinage du point M, la courbe L reste en règle générale d'un même côté du plan (*côté de la concavité* de la courbe L). Il y a exception pour les vecteurs $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$ colinéaires.

En particulier, la courbe L reste généralement d'un même côté du plan rectifiant.

La distance d est, dans le cas général considéré, un infiniment petit du second ordre par rapport à l'arc $\overset{\frown}{MM'}$.

3. Si le plan Q est le plan osculateur à L en M, dans le voisinage de M la courbe L reste généralement des deux côtés du plan. Il y a exception pour les vecteurs $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ coplanaires.

La distance d est, dans le cas considéré, un infiniment petit du troisième ordre par rapport à $\overset{\frown}{MM'}$, et dans le cas exceptionnel mentionné ci-dessus, elle peut être un infiniment petit d'un ordre supérieur.

361. Vecteurs de base du trièdre mobile

es arêtes du trièdre mobile sont dirigées dans les sens positifs qui sont ux des vecteurs unitaires suivants (jouant le rôle des vecteurs **i**, **j**, dans un système de coordonnées rectangulaires).

1. Le vecteur de base de la tangente **t**. Il est dirigé suivant la tannte dans le sens du paramètre croissant:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{T}}{\sqrt{\mathbf{T}^2}} = \frac{\mathbf{r}'(u)}{\sqrt{\mathbf{r}'^2(u)}}. \quad (1)$$

Si l'on prend pour paramètre l'arc s de la courbe L, alors

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (1a)$$

2. Le vecteur de base de la normale principale **n**. Il est dirigé suint la normale principale dans le sens de la concavité de la courbe L:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{\sqrt{\mathbf{N}^2}} \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}'}{\sqrt{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}\sqrt{\mathbf{r}'^2}}. \quad (2)$$

Si on prend pour paramètre l'arc s, cette expression se simplifie ablement:

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\sqrt{\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2}}. \quad (2a)$$

3. Le vecteur de base de la binormale **b**. Il est dirigé suivant la ormale de sorte que le triplet de vecteurs **t**, **n**, **b** soit de sens direct:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''}{\sqrt{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}}. \quad (3)$$

Quand le paramètre est s, nous avons:

$$\mathbf{b} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{ds} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\sqrt{\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}}. \quad (3a)$$

Remarque. La direction du vecteur de base de la normale prinle ne dépend pas du choix du paramètre, autrement dit, elle possède signification géométrique intrinsèque. Le vecteur de base de la ente peut avoir n'importe laquelle des deux directions opposées ı le paramètre adopté. En particulier, si le paramètre est le temps, rection du vecteur **t** coïncide avec la direction du mouvement du t M le long de la courbe L. Si le paramètre est l'arc, la direction

du vecteur **t** coïncide avec la direction des arcs positifs. Ainsi, le vecteur **t** ne possède pas de signification géométrique intrinsèque. Quand la direction du vecteur **t** est établie, celle du vecteur **b** est bien déterminée.

§ 362. Centre, axe et rayon de courbure d'une courbe gauche

Supposons que le point M' (fig. 397) décrivant une courbe gauche tende vers un point immobile M où la courbure C n'est pas nulle. La droite $A'B'$ suivant laquelle le plan normal immobile Q coupe le plan normal mobile Q' tend à coïncider avec la droite AB, perpendiculaire au plan osculateur P et distante de M de $MC = \frac{1}{C}$. Le rayon MC est dirigé dans le sens de la concavité de la courbe L.

La droite AB est appelée *axe de courbure*, le point C où AB coupe le plan osculateur P *centre de courbure*, le segment MC *rayon de courbure*.

Le rayon de courbure est noté ρ, C et ρ sont inverses, autrement dit,

$$\rho = \frac{1}{C}, \quad C = \frac{1}{\rho}. \tag{1}$$

Le cercle de centre C et de rayon $CM = \rho$ est appelé *cercle osculateur* ou *cercle de courbure* de la courbe L (au point M).

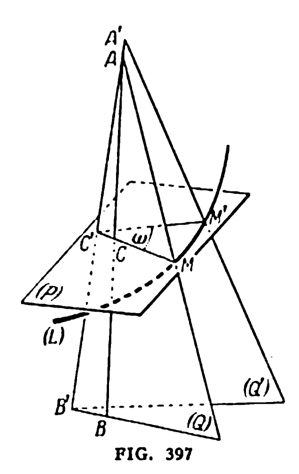


FIG. 397

REMARQUE 1. Si la courbure au point M de la courbe L est nulle, on dit que le rayon de courbure est infini, et l'on écrit $\rho = \infty$ (cf. § 343, remarque).

REMARQUE 2. La définition de la développante donnée au § 347 reste valable pour les courbes gauches. Une courbe gauche L' possède aussi une infinité de développantes (qui sont toutes des courbes gauches). Mais à la différence du cas d'une courbe plane (cf. § 347) le centre de courbure de chacune des développantes L décrit une courbe qui ne coïncide pas avec L'. C'est pourquoi le lieu géométrique des centres de courbure d'une courbe gauche n'est pas appelé la développée de la courbe.

§ 363. Formules pour la courbure, le rayon et le centre de courbure d'une courbe gauche

La courbure C s'exprime par la formule

$$C = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}}{\sqrt{(\mathbf{r}'^2)^3}}. \tag{1}$$

Son expression dans un système de coordonnées est

$$C = \frac{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}}{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}}. \tag{2}$$

Si le paramètre est l'arc, les formules (1) et (2) se simplifient

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|, \tag{1a}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}. \tag{2a}$$

Conformément à la formule (1a) le vecteur $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$ est appelé *vecteur ourbure*. Ce vecteur a le même sens que le vecteur $\overrightarrow{MC}$ joignant le oint M de la courbe L au centre de courbure C.

Le rayon de courbure ρ est trouvé d'après la formule

$$\rho = \frac{1}{C}. \tag{3}$$

faut porter ici l'une des expressions (1), (2), (1a), (2a).

Le rayon vecteur $\mathbf{r}_C$ du centre de courbure est égal à

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r} + \mathbf{n}\rho \tag{4}$$

s'exprime [en vertu de (2) § 361] par la formule suivante:

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{r}'^2}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2}[(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'') \times \mathbf{r}']. \tag{5}$$

nformément à cela les coordonnées x_C, y_C, z_C du centre de courbure xpriment par les formules

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}(Bz' - Cy'), \\ y_C &= y + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}(Cx' - Az'), \\ z_C &= z + \frac{x'^2 + y'^2 + z'^2}{A^2 + B^2 + C^2}(Ay' - Bx'), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

où, pour être bref, on a introduit les notations:

$$A = y'z'' - z'y', \quad B = z'x'' - x'z'', \quad C = x'y'' - y'x''. \tag{7}$$

Si le paramètre est l'arc, les formules (5) et (6) s'écrivent après simplification

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r} + \frac{\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2} = \mathbf{r} + \rho^2 \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \tag{5a}$$

$$\left.\begin{aligned} x_C &= x + \frac{\dfrac{d^2x}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = x + \rho^2 \frac{d^2x}{ds^2}, \\ y_C &= y + \frac{\dfrac{d^2y}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = y + \rho^2 \frac{d^2y}{ds^2}, \\ z_C &= z + \frac{\dfrac{d^2z}{ds^2}}{\left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2z}{ds^2}\right)^2} = z + \rho^2 \frac{d^2z}{ds^2}. \end{aligned}\right\} \tag{6a}$$

REMARQUE. En posant $z = z' = z'' = 0$ on obtient les formules pour la courbure, le rayon et le centre de courbure d'une courbe plane (§ 344).

EXEMPLE. Trouver la courbure, le rayon et le centre de courbure de l'hélice L:

$$\mathbf{r} = \{a \cos t, \quad a \sin t, \quad bt\}. \tag{8}$$

SOLUTION. Prenant pour paramètre la longueur de l'arc nous avons (§ 350):

$$\mathbf{r} = \left\{a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}.$$

Dérivant deux fois, nous trouvons:

$$\mathbf{r}'' = \left\{\frac{-a}{a^2+b^2} \cos \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad -\frac{a}{a^2+b^2} \sin \frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, 0\right\}.$$

Les formules (2a) et (3) donnent:

$$C = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad \rho = \frac{a^2+b^2}{a} = a + \frac{b^2}{a}, \tag{9}$$

autrement dit, la courbure et le rayon de courbure sont constants. Les formules (6a) donnent:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{a^2+b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = \\ &= -\frac{b^2}{a}\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}x, \\ y_C &= -\frac{b^2}{a}\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} = -\frac{b^2}{a^2}y, \\ z_C &= \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}} = z. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

On voit de (10) que pour construire le centre de courbure il faut prolonger le rayon du cylindre portant l'hélice au-delà de l'axe du cylindre à distance constante $\frac{b^2}{a}$. Cela signifie que le lieu des centres de courbure de l'hélice L est une hélice L_1 de même pas $h = 2\pi b$, tracée sur le cylindre de rayon $a_1 = \frac{b^2}{a}$ (de même axe). La symétrie de la relation $aa_1 = b^2$ montre que les courbes L et L_1 sont réciproques, autrement dit, le centre de courbure de la courbe L_1 décrira la courbe L.

§ 364. Signe de la courbure

On peut affecter d'un signe la courbure des courbes planes situées *dans un même plan*. Si lors du mouvement du point M dans le sens des u croissants, la rotation du vecteur de la tangente s'effectue dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, on estime que la courbure est positive et qu'elle est négative si la rotation s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le signe de la courbure change si l'on remplace le paramètre u par un autre paramètre u' qui décroît lorsque u croît. Si le paramètre est l'abscisse, à la croissance du paramètre correspond le déplacement du point « vers la droite ». Dans ce cas la courbure est positive quand la courbe tourne sa concavité vers le haut, et négative quand elle la tourne vers le bas (§ 282).

Les formules (1) et (I) du § 344 sont remplacées par les suivantes:

$$C = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \qquad (1)$$

$$C = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \qquad (I)$$

EXEMPLE. La courbure de la circonférence

$$x = a \cos u, \quad y = a \sin u,$$

calculée d'après la formule (1) est égale à $\frac{1}{a}$ (à la croissance du paramètre correspond un parcours dans le sens inverse aux aiguilles d'une montre, qui est aussi le sens de la rotation du vecteur de la tangente). Si l'on représente cette même circonférence à l'aide des équations

$$x = a \cos u', \quad y = -a \sin u'.$$

la formule (1) donne $C = -\frac{1}{a}$.

Si la circonférence est donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

alors en appliquant la formule (1) nous obtenons pour la demi-circonférence supérieure $C = -\frac{1}{a}$ (le parcours est effectué dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, la concavité est orientée vers le bas), pour la demi-circonférence inférieure $C = \frac{1}{a}$.

Cet exemple montre que ce n'est pas le signe de la courbure qui a une signification géométrique, mais le changement de signe lors du passage par un certain point (point d'inflexion) ou bien la conservation du signe sur un certain tronçon.

La courbure des courbes gauches (ainsi que des courbes planes dans l'espace ne peut être affectée d'un signe, car dans l'espace il n'y a pas de rotation ni dans le sens des aiguilles d'une montre, ni dans le sens contraire. Pour les courbes situées dans un plan on peut distinguer ces deux sens parce qu'en choisissant le côté « face » du plan, nous sous-entendons qu'un observateur est justement placé de ce côté. Si nous distinguons d'après un critère quelconque les côtés « face » et « dos » des plans osculateurs à une courbe gauche, l'observateur ne pourrait observer tous les plans du côté « face ».

§ 365. Torsion

La torsion d'une courbe gauche caractérise le degré d'écart de cette courbe à la forme plane (de même que la courbure caractérise le degré d'écart à la forme rectiligne).

DÉFINITION. On appelle *torsion* de la courbe L au point M une grandeur égale en valeur absolue à la limite du rapport de l'angle ω' formé par les binormales MB et $M'B'$ à l'arc $\widehat{MM'}$, lorsque M' tend vers M tout en restant sur la courbe L. Le signe de la torsion (de même que le signe de l'angle ω') est considéré positif quand le couple de binormales MB, $M'B'$ est de sens direct (cf. § 165a), et négatif quand ce couple est de sens indirect. La torsion est notée σ:

$$\sigma = \lim \frac{\omega'}{\widehat{MM'}}.$$

REMARQUE. La binormale d'une courbe plane conserve une direction constante de sorte que la torsion d'une courbe plane est partout nulle. Inversement, si la torsion d'une courbe est partout nulle, la courbe est plane. La torsion d'une courbe non plane ne peut être nulle qu'en certains points.

RAYON DE TORSION. La grandeur $T = \frac{1}{\sigma}$, inverse de la torsion, est appelée *rayon de torsion* par analogie avec le rayon de courbure $\rho = \frac{1}{C}$. Toutefois cette analogie n'est pas complète: le processus analogue à la construction du centre de courbure ne donne aucun « centre de torsion ».

La torsion s'exprime par la formule

$$\sigma = \frac{(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''')}{(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2} \tag{1}$$

ou, dans un système de coordonnées,

$$\sigma = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}\,. \tag{2}$$

Si on prend comme paramètre l'arc s, les formules (1) et (2) se simplifient quelque peu:

$$\sigma = \frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)}{\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2} = \rho^2 \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}, \frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right), \tag{1a}$$

ou, dans un système de coordonnées,

$$\sigma = \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} : \left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]. \tag{2a}$$

EXEMPLE. Calculer la torsion de l'hélice circulaire

$$x = a\cos u, \quad y = a\sin u, \quad z = bu.$$

SOLUTION. Nous avons:

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = \begin{vmatrix} -a \sin u & a \cos u & b \\ -a \cos u & -a \sin u & 0 \\ a \sin u & -a \cos u & 0 \end{vmatrix} = a^2 b,$$

$$(\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'')^2 = a^2(a^2 + b^2).$$

Nous trouvons d'après la formule (1):

$$\sigma = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Cela montre que la torsion d'une hélice de sens direct ($b > 0$) est positive et celle d'une hélice de sens indirect — négative.

Séries

§ 366. Remarques préliminaires

Pour surmonter certaines difficultés liées à l'intégration, Newton et Leibniz exprimaient la fonction à intégrer sous la forme d'un polynôme comportant un nombre infini de termes (cf. § 270). Appliquant à ces expressions les règles usuelles de l'algèbre, les mathématiciens du XVIII[e] siècle obtinrent des résultats remarquables. Il s'avéra toutefois que si l'on applique intégralement les règles de l'algèbre aux sommes des suites infinies, on peut commettre des erreurs. Il devint indispensable de formuler les notions principales et de démontrer rigoureusement les propriétés des séries. Ce problème fut résolu par les mathématiciens du XIX[e] siècle dont nous parlerons dans les paragraphes suivants.

§ 367. Définition d'une série

Soit

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots \tag{1}$$

une suite de nombres. Sommons ces nombres dans l'ordre indiqué. Nous obtenons une nouvelle suite $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n, \ldots,$ où

$$\left.\begin{array}{l} s_1 = u_1, \\ s_2 = u_1 + u_2, \\ s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{2}$$

On la forme en séparant par le signe + les termes de la suite (1) et on énonce: la *série*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

Les nombres $u_1, u_2, u_3, \ldots$ sont les *termes* de la série. La somme

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$$

est appelée la somme *partielle* de la série ($s_1 = u_1$ est la première somme partielle, $s_2 = u_1 + u_2$ la seconde somme partielle, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3$ la troisième, etc.).

EXEMPLE 1. L'expression

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots, \tag{4}$$

ou, comme on écrit habituellement,

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{4a}$$

est une série. L'expression (4) signifie qu'à partir des termes

$$1, \; -1, \; +1, \; -1, \ldots, (-1)^{n+1} \ldots,$$

on forme les sommes partielles

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1 - 1 = 0, \quad s_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \ldots$$

$$\ldots, s_n = 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}, \ldots \tag{5}$$

EXEMPLE 2. L'expression

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots \tag{6}$$

est une série. Elle signifie qu'à partir des termes

$$1, \frac{1}{2}, \; \frac{1}{4}, \ldots, \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots$$

on forme les sommes partielles

$$s_1 = 1, \quad s_2 = 1\frac{1}{2}, \quad s_3 = 1\frac{3}{4}, \ldots, \quad s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ldots \tag{7}$$

§ 368. Séries convergentes et divergentes

DÉFINITION. Si s_n tend vers une limite S quand $n \to \infty$, on dit que la série est *convergente*. s est la somme de la série convergente.

Si s_n croît indéfiniment ou n'a pas de limite quand $n \to \infty$, la série est dite *divergente*. Une série divergente n'a pas de somme (*).

EXEMPLE 1. La série

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + \ldots \tag{1}$$

(*) Le mot « somme » est ici compris dans le sens de la définition. On peut élargir la notion de somme d'une série et dans ce cas certaines séries divergentes posséderont également des sommes (au sens large).

est divergente, car la suite de ses sommes partielles

$$s_1 = 1,\ s_2 = 3,\ s_3 = 6,\ \ldots,\ s_n = \frac{n(n+1)}{2},\ \ldots \tag{2}$$

a une limite infinie.

EXEMPLE 2. La série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^{n+1} + \ldots \tag{3}$$

est divergente, car la suite de ses sommes partielles

$$s_1 = 1,\ s_2 = 0,\ s_3 = 1,\ \ldots,\ s_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ \ldots \tag{4}$$

(cf. § 367, exemple 1) n'admet pas de limite.

REMARQUE 1. Quand la suite $s_1, s_2, s_3, \ldots$ n'a pas de limite déterminée, la série divergente est dite *indéterminée*.

EXEMPLE 3. La série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots \tag{5}$$

est convergente, car la suite

$$s_1 = 1,\ s_2 = 1\frac{1}{2},\ s_3 = 1\frac{3}{4},\ \ldots,\ s_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},\ \ldots \tag{6}$$

a une limite égale à 2:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2.$$

Le nombre 2 est la somme de la série (5).

REMARQUE 2. L'écriture

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = S \tag{7}$$

signifie que la série $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ est convergente et que sa somme est égale à S, autrement dit, (7) est équivalente à

$$\lim_{n\to\infty} (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = S.$$

EXEMPLE 4. L'écriture

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \ldots = \frac{2}{3}$$

signifie que la suite des sommes partielles

$$s_1 = 1,\quad s_2 = \frac{1}{2},\quad s_3 = \frac{3}{4},\ \ldots,\quad s_n = \frac{2}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right],\ \ldots$$

a une limite égale à $\frac{2}{3}$, c'est-à-dire

$$\lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{1}{2} + \ldots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = \frac{2}{3}.$$

§ 369. Condition nécessaire de convergence d'une série

La série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

ne peut être convergente que si le terme u_n (le *terme général* de la série) tend vers zéro:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{2}$$

En d'autres termes: si le terme général ne tend pas vers zéro, la série est divergente.

EXEMPLE 1. La série

$$0{,}4 + 0{,}44 + 0{,}444 + 0{,}4444 + \ldots \tag{3}$$

est évidemment divergente puisque le terme général $\left(\text{sa limite est } \frac{4}{9}\right)$ ne tend pas vers zéro.

EXEMPLE 2. La série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \tag{4}$$

est évidemment divergente car son terme général ne tend pas vers zéro (et d'ailleurs n'a pas de limite).

AVERTISSEMENT. La condition (2) *n'est pas suffisante*: une série dont le terme général tend vers zéro peut être divergente (cf. exemples 3 et 4).

EXEMPLE 3. La série *harmonique*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \tag{5}$$

est divergente bien que son terme général tende vers zéro. Pour se convaincre de la divergence de la série considérons les sommes partielles

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = 3 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_4 = s_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 3 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_8 = s_4 + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 4 \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 5 \cdot \frac{1}{2},$$

$$s_{16} = s_8 + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) > 6 \cdot \frac{1}{2}, \quad \text{etc.}$$

Nous voyons que la somme partielle croît indéfiniment, autrement dit, la série (5) diverge.

FIG. 398

EXEMPLE 4. La série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots, \tag{6}$$

obtenue à partir de la série harmonique en changeant le signe des termes de numéros pairs, converge. Pour nous en convaincre fixons sur la droite numérique (fig. 398) les points correspondant aux sommes partielles

$$s_1=1,\quad s_2=\frac{1}{2},\quad s_3=\frac{5}{6},\quad s_4=\frac{7}{12},\quad s_5=\frac{47}{60},$$

$$s_6=\frac{37}{60}.$$

On voit que les points s_1, s_3, s_5 d'indices impairs s'avancent vers la gauche et les points s_2, s_4, s_6 d'indices pairs vers la droite, les premiers étant à la droite des seconds. On peut démontrer que cette loi est vraie (*) et que les points s_{2n}, s_{2n+1} se rapprochent indéfiniment (**). Cela signifie que les points d'indices pairs comme les points d'indices impairs tendent vers un certain point S (les premiers à droite, les seconds à gauche). Par conséquent, la suite des sommes partielles de la série (6) a pour limite le nombre S, autrement dit, la série (6) converge et S est sa somme.

Les sommes partielles s_1, s_3, s_5 donnent pour S une valeur approchée par excès et s_2, s_4, s_6 une valeur approchée par défaut. Calculant $s_9 = 0,745$ et $s_{10}=0,645$ nous obtenons pour S une décimale exacte $S=0,7$. Calculant s_{999} et s_{1000} nous aurions trouvé $S=0,693$ avec trois décimales exactes. La valeur exacte de S est ln 2:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\ln 2. \tag{7}$$

(*) La différence

$$s_{2n+1}-s_{2n-1}=\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}\right)-$$

$$-\left(1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)=-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

est négative, la différence $s_{2n+2}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}$ est positive.

(**) La différence $s_{2n+1}-s_{2n}=\frac{1}{2n+1}$ tend vers zéro quand $n\to\infty$.

On obtient la formule (7) à partir du développement en série

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

en faisant $x = 1$ (cf. § 270, 4 et § 272, exemple 2).

§ 370. Reste d'une série

Si l'on rejette les m premiers termes de la série

$$u_1 + u_2 + \dots + u_m + u_{m+1} + u_{m+2} + \dots, \tag{1}$$

on obtient la série

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots. \tag{2}$$

qui converge (ou diverge) si la série (1) converge (ou diverge). C'est pourquoi lors de *l'étude de la convergence d'une série on peut supprimer, au début de cette série, un nombre quelconque de termes.*

Dans le cas où la série (1) est convergente, la somme

$$R_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \dots \tag{3}$$

de la série (2) est appelée le *reste* de la première série ($R_1 = u_2 + u_3 + \dots$ est le premier reste, $R_2 = u_3 + u_4 + \dots$ le second, etc.). Le reste R_m est l'erreur que l'on commet en remplaçant la somme S de la série (1) par la somme partielle s_m. La somme de la série S et le reste R_m sont liés par la relation

$$S = s_m + R_m. \tag{4}$$

Quand $m \to \infty$, le reste tend vers zéro. En pratique, il importe que le reste R_m devienne inférieur à l'erreur admissible pour une valeur pas très grande de m. On dit alors que la série (1) *converge rapidement,* dans le cas contraire on dit que la série *converge lentement.* Il est bien évident qu'une convergence rapide ou lente sont des notions relatives.

Exemple 1. La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \tag{5}$$

est très lentement convergente. En nous arrêtant au vingtième terme nous n'obtenons S qu'à $0,5 \cdot 10^{-1}$ près; pour la calculer à $0,5 \cdot 10^{-4}$ près il faudrait au moins 19 999 termes (cf. exemple 4 § 369).

Exemple 2. La série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \tag{6}$$

(progression géométrique) est bien plus rapidement convergente que la série (5); son quinzième reste $-\frac{1}{2^{15}}+\frac{1}{2^{16}}-\frac{1}{2^{17}}+\ldots$ est en valeur absolue inférieur à $\left(\frac{1}{2}\right)^{15} < 0,5 \cdot 10^{-4}$, de sorte que les quinze premiers termes assurent une précision de $0,5 \cdot 10^{-4}$.

EXEMPLE 3. La série

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots$$

(sa somme est égale à e; cf. § 272, exemple 1) est encore plus rapidement convergente: une précision de $0,5 \cdot 10^{-4}$ est assurée par huit termes de la série.

§ 371. Opérations élémentaires sur les séries

1. MULTIPLICATION TERME À TERME PAR UN NOMBRE. Si la série

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{1}$$

est convergente et sa somme est S, la série

$$wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots \tag{2}$$

obtenue en multipliant chaque terme de la série (1) par un même nombre w est aussi convergente et sa somme est égale à wS, autrement dit,

$$wu_1+wu_2+\ldots+wu_n+\ldots=w(u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots). \tag{3}$$

EXEMPLE 1. La série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{4}$$

est convergente et sa somme est égale à $0,693\ldots=\ln 2$ (§ 369, exemple 4). Par conséquent, la série

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots \tag{5}$$

est convergente et sa somme est égale à $0,346\ldots=\frac{1}{2}\ln 2$.

2. ADDITION ET SOUSTRACTION TERME À TERME. Si les séries

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots, \tag{6}$$

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{7}$$

sont convergentes et si leurs sommes sont respectivement U et V, la série

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots, \qquad (8)$$

obtenue par additon (ou soustraction) terme à terme, est aussi convergente et sa somme est $U + V$(ou $U - V$), autrement dit,

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots = (u_1 + u_2 + \ldots) \pm (v_1 + v_2 + \ldots). \qquad (9)$$

EXEMPLE 2. La série

$$0,11 + 0,0101 + 0,001001 + \ldots$$

est convergente et sa somme est $\frac{12}{99}$. En effet, cette série s'obtient en ajoutant terme à terme les séries convergentes $0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + \ldots$ et $0,01 + 0,01^2 + 0,01^3 + \ldots$, et les sommes de ces dernières sont respectivement $\frac{1}{9}$ et $\frac{1}{99}$.

AVERTISSEMENT. *Toutes les propriétés des sommes des suites finies ne sont pas valables pour les séries convergentes.* Ainsi, la permutation des termes d'une série convergente peut en modifier la somme et même la rendre divergente. Permutons, par exemple, les termes de la série convergente

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \ldots = 0,693 \ldots \qquad (10)$$

de sorte que deux termes positifs soient suivis d'un terme négatif (l'ordre des termes positifs reste inchangé, de même que celui des termes négatifs). Nous obtenons la série

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{8} + \ldots \qquad (11)$$

Elle est convergente, mais sa somme est une fois et demie plus grande que celle de la série initiale (10). Nous avons en effet (cf. exemple 1):

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \ldots = \frac{1}{2} \cdot 0,693 \qquad (12)$$

(les zéros que nous avons ajoutés ne modifient pas la somme de la série !). Ajoutant terme à terme les séries (10) et (12), nous obtenons:

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{2}{8} + \frac{1}{9} + 0 + \ldots = \frac{3}{2} \cdot 0,693 \ldots$$

Simplifiant les fractions et rejetant les zéros nous obtenons à gauche la série (11).

§ 372. Séries positives

Une *série positive* (ou à *termes positifs*) ne peut être indéterminée (§ 368, remarque 1). Ses sommes partielles ont toujours une limite finie ou infinie. Dans le premier cas la série est convergente, dans le second divergente.

Une série positive convergente dont on permute les termes reste convergente et *sa somme n'est pas modifiée* (cf. § 371, avertissement); de même pour une série positive divergente.

§ 373. Comparaison des séries positives

Pour étudier la convergence d'une série positive donnée

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots \tag{1}$$

on la compare souvent avec une autre série positive

$$v_0 + v_1 + v_2 + \dots \tag{2}$$

dont on sait qu'elle est convergente ou divergente.

Si la série (2) est convergente, sa somme égale à V et si les termes de la série (1) ne sont pas supérieurs aux termes correspondants de la série (2), la série donnée converge aussi et sa somme n'est pas supérieure à V. Le reste de la série (1) est aussi non supérieur au reste de la série (2).

Si la série (2) est divergente et que les termes de la série donnée (1) ne soient pas inférieurs aux termes correspondants de la série (2), la série donnée (1) est divergente.

Exemple 1. Considérer la série positive

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 5^{n-1}} + \dots \tag{3}$$

et si elle est convergente trouver sa somme S avec quatre chiffres significatifs.

Solution. Comparons la série donnée (3) avec la progression géométrique

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{n-1}} + \dots \tag{4}$$

La série (4) converge et sa somme est égale à 1,25. Les termes de la série étudiée (3) ne sont pas supérieurs aux termes correspondants de la série (4). Cela signifie que la série donnée est convergente et que $S < 1{,}25$. Le reste

$$R_n = \frac{1}{(n+1)\,5^n} + \frac{1}{(n+2)\,5^{n+1}} + \frac{1}{(n+3)\,5^{n+2}} + \dots \tag{5}$$

de la série (3) est inférieur au reste de rang n de la série (4), autrement dit,

$$R_n < \frac{1}{5^n} + \frac{1}{5^{n+1}} + \frac{1}{5^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{4 \cdot 5^{n-1}}.$$

Pour une meilleure estimation comparons le reste (5) avec la série

$$\frac{1}{(n+1)\,5^n} + \frac{1}{(n+1)\,5^{n+1}} + \frac{1}{(n+1)\,5^{n+2}} + \ldots = \frac{1}{(n+1)\cdot 4 \cdot 5^{n-1}}. \qquad (6)$$

Raisonnant comme plus haut, nous obtenons l'inégalité

$$R_n < \frac{1}{4(n+1)\,5^{n-1}}. \qquad (7)$$

Posant successivement $n = 1, 2, 3, \ldots$ nous trouvons que l'expression $\frac{1}{4(n+1)\,5^{n-1}}$ devient inférieure à 0,0005 pour $n = 4$. Prenons les quatre premiers termes de la série. Nous obtenons une valeur approchée (à $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ près) par défaut

$$S \approx 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} = 1{,}115.$$

Exemple 2. Pour établir si la série

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots \qquad (8)$$

est convergente, comparons-la avec la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \qquad (9)$$

Cette dernière est divergente (§ 369, exemple 3), et les termes de la série (8) ne sont pas inférieurs aux termes correspondants de la série (9). Cela signifie que la série (8) est divergente.

Exemple 3. Pour étudier la convergence de la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \qquad (10)$$

comparons-la avec la série

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots \qquad (11)$$

dont les termes sont, à partir du deuxième, supérieurs aux termes correspondants de la série (10). La série (11) converge et sa somme $S = 2$, car s_n peut être représentée sous la forme

$$s_n = 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 + 1 - \frac{1}{n}. \qquad (12)$$

La série (10) est a fortiori convergente et sa somme est inférieure à 2. Le reste R_n de la série (11) est égal à (§ 370)

$$R_n = S - s_n = \frac{1}{n}.$$

Le reste de la série (10) n'est que très peu inférieur, de sorte que la série (10) est lentement convergente: pour trouver quatre chiffres significatifs il faut calculer près de 2000 termes. La valeur exacte de la somme de la série (10) est $\frac{\pi^2}{6}$ (cf. plus bas § 417, exemple 3).

§ 374. Règle de d'Alembert pour une série positive

THÉORÈME. Si dans la série positive

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ d'un terme au précédent tend vers une limite q lorsque $n \to \infty$:

1° si $q < 1$, la série est convergente;
2° si $q > 1$, la série est divergente(*);
3° si $q = 1$, il y a doute.

Ce théorème est appelé *règle de d'Alembert*(**).

EXEMPLE 1. Considérons la série positive

$$2 \cdot 0{,}8 + 3 \cdot 0{,}8^2 + 4 \cdot 0{,}8^3 + \ldots + (n+1) \cdot 0{,}8^n + \ldots$$

On observe au début la croissance des termes(***) ($a_1 = 1{,}6$, $a_2 = 1{,}92$, $a_3 = 2{,}048$, ...). Toutefois la série est convergente, car $a_{n+1} : a_n = 0{,}8\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)$, et la limite de ce rapport est égale à 0,8, c'est-à-dire qu'elle est inférieure à 1.

EXPLICATION. Supposons que pour une certaine série positive $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ la limite du rapport $u_{n+1} : u_n$ soit égale à 0,8. Cela signifie qu'à partir d'un certain numéro N le rapport

(*) On inclut ici le cas où $\lim u_{n+1} : u_n = \infty$.

(**) En fait on l'attribue improprement à d'Alembert, car c'est Cauchy qui l'a énoncé et formulé pour la première fois.

(***) Ensuite, cette croissance fait place à la décroissance.

$u_{n+1} : u_n$ diffère de 0,8 de moins de $\pm$ 0,1. Par conséquent, il est inférieur à 0,9, de sorte que

$$\left.\begin{aligned} u_{N+1} &< 0{,}9u_N, \\ u_{N+2} &< 0{,}9u_{N+1} < 0{,}9^2u_N, \\ u_{N+3} &< 0{,}9u_{N+2} < 0{,}9^3u_N, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

etc. La comparaison de la série $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots$ avec la série $0{,}9\, u_N + 0{,}9^2u_N + 0{,}9^3\, u_N + \ldots$ (progression géométrique décroissante) montre (§ 373) que la série considérée est convergente.

On peut prendre au lieu de 0,9 n'importe quel nombre compris entre 0,8 et 1. (Si l'on prend l'unité ou un nombre plus grand, le raisonnement n'est plus valable).

La démonstration est analogue dans le cas général $q < 1$.

EXEMPLE 2. Considérons la série positive

$$1{,}1 + \frac{1{,}1^2}{2} + \frac{1{,}1^3}{3} + \ldots + \frac{1{,}1^n}{n} + \ldots \tag{3}$$

Les premiers termes décroissent, mais la série est divergente, car la limite du rapport

$$u_{n+1} : u_n = \frac{1{,}1^{n+1}}{n+1} : \frac{1{,}1^n}{n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) 1{,}1$$

est égale à 1,1, autrement dit, elle est supérieure à 1.

EXPLICATION. Comme $\lim (u_{n+1} : u_n) = 1{,}1$, à partir d'un certain numéro N le rapport u_{n+1} à u_n est supérieur à 1,09. Comparant la série $u_{N+1} + u_{N+2} + u_{N+3} + \ldots$ avec la série divergente $1{,}09u_N + 1{,}09^2\, u_N + 1{,}09^3u_N + \ldots$ et raisonnant comme dans l'explication précédente, nous démontrons (§ 373) que la série considérée diverge.

On peut prendre au lieu de 1,09 n'importe quel nombre compris entre 1,1 et 1 (mais non l'unité).

La démonstration est analogue dans le cas général $q > 1$.

EXEMPLE 3. Considérons les séries

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots, \tag{4}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

Dans les deux cas nous avons

$$q = \lim_{n\to\infty} (u_{n+1} : u_n) = 1.$$

Or la série (4) est divergente (§ 369), et la série (5) convergente (§ 373).

REMARQUE. Dans le cas 1 ($q < 1$) plus q est petit et plus la convergence est rapide. Dans le cas 2 ($q > 1$) plus q est grand et plus la di-

vergence est rapide. Dans le cas 3 ($q = 1$) même si la série est convergente, cette convergence est lente de sorte que la série se prête mal aux calculs.

§ 375. Critère intégral de convergence

Si chaque terme de la série positive

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \tag{1}$$

est inférieur au précédent, on peut utiliser, pour étudier la convergence, l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} f(n)\, dn, \tag{2}$$

où $f(n)$ est une fonction décroissante continue de n, prenant pour $n = 1, 2, 3 \dots$ les valeurs $u_1, u_2, u_3, \dots$

La série (1) est convergente ou divergente suivant que l'intégrale impropre (2) converge ou diverge. Dans le cas de la convergence le reste R_n de la série (1) vérifie les inégalités

$$\int_{n+1}^{\infty} f(n)\, dn < R_n < \int_n^{\infty} f(n)\, dn. \tag{3}$$

REMARQUE. Le critère intégral est commode dans les cas où le terme u_n est donné par une expression ayant un sens non seulement pour les valeurs entières de n, mais aussi pour tous les n supérieurs à l'unité.

EXEMPLE 1. Etudions la convergence de la série harmonique

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \tag{4}$$

Cette série est positive; chacun de ses termes est inférieur au précédent, et le terme général u_n est donné par l'expression $\frac{1}{n}$ qui a un sens pour toutes les valeurs de n (sauf zéro). La fonction $f(n) = \frac{1}{n}$ est continue et décroissante dans l'intervalle $(1, \infty)$. Considérons l'intégrale impropre $\int_1^{\infty} \frac{dn}{n}$. Elle est divergente, car elle prend une valeur infinie:

$$\lim_{x \to \infty} \int_1^x \frac{dn}{n} = \lim_{x \to \infty} \ln x = \infty.$$

Par conséquent, la série (4) est aussi divergente (cf. § 369, exemple 3).

EXEMPLE 2. Etudions la convergence de la série des « carrés inverses »

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \tag{5}$$

Ici $f(n) = \frac{1}{n^2}$. L'intégrale impropre correspondante

$$\int_1^{\infty} \frac{dn}{n^2} = \lim_{x \to \infty} \int_1^{x} \frac{dn}{n^2} = 1$$

converge. Par conséquent, la série (5) est aussi convergente. En prenant les 10 premiers termes, nous trouvons $S_{10} = 1{,}5498$. Le reste R_{10} vérifie l'inégalité

$$\int_{11}^{\infty} \frac{dn}{n^2} < R_{10} < \int_{10}^{\infty} \frac{dn}{n^2}, \text{ c.-à-d. } \frac{1}{11} < R_{10} < \frac{1}{10}.$$

Cela signifie que l'erreur donnée par l'égalité approchée

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots \approx 1{,}5498$$

n'excède pas 0,1.

EXPLICATION. Le graphe de la fig. 399 représente la fonction $f(n)$; les termes u_1, u_2, ... sont représentés par les ordonnées P_1M_1, P_2M_2, ... ; ces dernières sont numériquement égales aux aires des rectangles $P_1M_1N_2P_2$, $P_2M_2N_3P_3$, ...

La divergence de l'intégrale $\int_1^{\infty} f(n)\, dn$ signifie que l'aire comprise sous la courbe $M_1M_2M_3$ ... est infiniment grande. L'aire décrite par le contour polygonal est a fortiori infiniment grande, autrement dit, la série $u_1 + u_2 + \ldots$ est divergente.

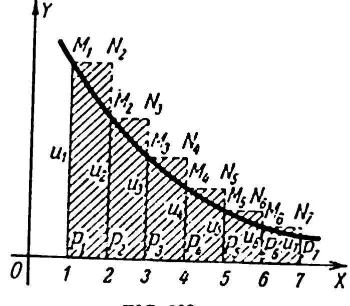


FIG. 399

Si par contre l'intégrale $\int_1^\infty f(n)\,dn$ converge, l'aire sous la courbe $M_1M_2M_3 \ldots$ est finie. L'aire des rectangles inscrits hachurés sur la fig. 400 est a fortiori finie, autrement dit, la série $u_2 + u_3 + \ldots$ est convergente. Par conséquent, la série $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ est aussi convergente.

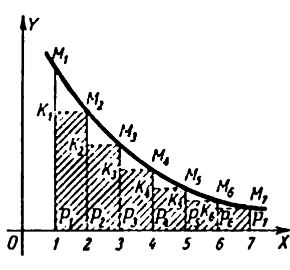


FIG. 400

Explicitons les inégalités (3) pour $n = 2$. Le reste $R_2 = u_3 + u_4 + \ldots$ est numériquement égal à l'aire de la figure exinscrite $XP_2M_2N_3M_3N_4 \ldots$ (fig. 399); cela signifie que $R_2 > \int_3^\infty f(n)\,dn$ (par hypothèse cette intégrale converge). Le même reste est égal à l'aire de la figure $XP_2N_2M_3K_3M_4 \ldots$ (fig. 400); cela signifie que

$$R_2 < \int_2^\infty f(n)\,dn.$$

§ 376. Série alternée. Critère de Leibniz

La série est dite *alternée* si ses termes sont alternativement positifs et négatifs. La série

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1} u_n + \ldots, \qquad (1)$$

où les lettres $u_1, u_2, u_3, \ldots$ désignent des nombres positifs, est une série alternée.

CRITÈRE DE LEIBNIZ. Si les termes d'une série alternée tendent vers zéro en décroissant constamment en valeur absolue, la série est convergente[*]. Le reste d'une telle série est de même signe que le premier terme rejeté et lui est inférieur en valeur absolue.

---

[*] Les termes d'une série alternée peuvent tendre vers zéro sans décroître constamment. Alors la série peut ne pas être convergente. Ainsi, la série

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{2} - \frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \ldots$$

dont les termes tendent vers zéro sans décroître constamment est divergente. En effet, en groupant les termes deux par deux nous trouvons que $s_{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ de sorte que (§ 369, exemple 3) $\lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = \infty$.

Les raisonnements à la base de la démonstration du critère sont rapportés pour un cas particulier dans l'exemple 4 § 369.

EXEMPLE. La série alternée

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{2}$$

est convergente, car ses termes tendent vers zéro en décroissant constamment en valeur absolue. Le quinzième reste

$$R_{15}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{17}-\frac{1}{18}+\dots$$

est négatif, de sorte que la somme partielle s_{15} donne pour la somme de la série (2) une valeur approchée par excès. Le reste est inférieur à $\frac{1}{16}$ en valeur absolue.

§ 377. Séries absolument convergentes et semi-convergentes

THÉORÈME. Si la série positive

$$|u_1|+|u_2|+\dots+|u_n|+\dots \tag{1}$$

formée avec les valeurs absolues des termes de la série

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots \tag{2}$$

est convergente, cette série (2) est aussi convergente.

Le reste de la série considérée n'excède pas en valeur absolue le reste correspondant de la série (1)(*).

La somme S de la série considérée n'excède pas en valeur absolue la somme S' de la série (1)

$$|S|\leqslant S'.$$

On n'a le signe d'égalité que lorsque tous les termes de la série (2) sont de même signe.

REMARQUE 1. La série (2) peut être convergente même quand la série (1) est divergente.

EXEMPLE 1. La série

$$1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}+\dots, \tag{3}$$

(*) La démonstration est donnée plus bas (cf. explication).

est convergente car la série

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \tag{4}$$

formée avec les valeurs absolues des termes de la série (3) est convergente (§ 373, exemple 3). La somme S de la série (3) est inférieure à la somme S' de la série (4) (*).

EXEMPLE 2. La série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

est convergente (§ 369, exemple 4), bien que la série formée avec les valeurs absolues de ses termes soit divergente (§ 369, exemple 3).

DÉFINITION 1. La série est dite *absolument convergente* si la série formée avec les valeurs absolues de ses termes est convergente (cette série est aussi convergente; cf. exemple 1).

DÉFINITION 2. La série est dite *semi-convergente* si elle est convergente sans être absolument convergente (cf. exemple 2).

REMARQUE 2. Une série convergente dont tous les termes sont positifs ou négatifs est absolument convergente.

EXPLICATION DE L'EXEMPLE 1. Conservons dans la série (3) les termes positifs et remplaçons les termes négatifs par des zéros. Nous obtenons la série positive convergente

$$1 + \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + 0 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + 0 + \dots = U \tag{5}$$

(sa convergence découle de sa comparaison avec la série (10) § 373). Remplaçons maintenant les termes positifs de la série (3) par des zéros et changeons le signe des termes négatifs. Nous obtenons la série positive convergente

$$0 + 0 + \frac{1}{3^2} + 0 + 0 + \frac{1}{6^2} + 0 + 0 + \frac{1}{9^2} + \dots = V. \tag{6}$$

Retranchons terme à terme la série (6) de la série (5). Nous obtenons la série (3). En vertu du § 371, 2 elle est convergente et sa somme S est

$$S = U - V. \tag{7}$$

Chacun des nombres positifs U, V est inférieur (§ 373) à la somme S' de la série (4). C'est pourquoi

$$S < S'.$$

Le théorème général se démontre de façon analogue.

REMARQUE. Additionnant (5) et (6) nous trouvons:

$$S' = U + V. \tag{8}$$

(*) Dans le cas considéré $S = \frac{7}{9} S'$ (cf. explication).

Dans l'exemple considéré nous avons en outre (§ 371, 1):

$$V = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots = \frac{1}{3^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right) = \frac{1}{9} S'. \qquad (9)$$

Il découle de (7), (8) et (9) que

$$S = \frac{7}{9} S'.$$

§ 378. Règle de d'Alembert pour une série à termes de signes quelconques

Supposons que la série

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

contienne des termes positifs et des termes négatifs (ou bien que tous les termes sont négatifs). Soit q la limite de la valeur absolue du rapport $u_{n+1} : u_n$:

$$\lim_{n\to\infty} | u_{n+1} : u_n | = q.$$

Alors si $q < 1$, la série est convergente, si $q > 1$ divergente, si $q = 1$, il y a doute.

Cela découle des §§ 374, 377.

Exemple. La série

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots, \qquad (2)$$

dans laquelle deux termes positifs sont suivis de deux termes négatifs, puis de nouveau de deux termes positifs, est convergente, car $| u_{n+1} : u_n | = \frac{1}{n!} : \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{n}$; par conséquent,

$$q = \lim_{n\to\infty} | u_{n+1} : u_n | = 0, \quad \text{c.-à-d.} \quad q < 1.$$

§ 379. Changement de l'ordre des termes d'une série

Dans une série absolument convergente on peut intervertir les termes d'une manière quelconque, sans détruire la convergence absolue ni modifier la somme de la série (en particulier, la somme d'une série positive convergente ne dépend pas de l'ordre des termes).

Au contraire, le changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente peut modifier la somme et même altérer la convergence.

Exemple 1. La série

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6-\left(\frac{1}{2}\right)^5+\ldots \tag{1}$$

que l'on obtient en permutant les termes de la série absolument convergente

$$-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\ldots \tag{2}$$

est convergente et possède la même somme S que la progression géométrique (2). Par conséquent, nous avons

$$S=\frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=-\frac{1}{3}. \tag{3}$$

On peut vérifier la formule (3) en considérant la somme partielle s_{2n} de la série (1) comme la somme des termes d'une progression géométrique dont le premier terme est $\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$ et la raison $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Exemple 2. La série

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots \tag{4}$$

est semi-convergente (§ 377). La série

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots \tag{5}$$

que l'on obtient en modifiant l'ordre des termes de la série (4) est convergente, mais sa somme est une fois et demie plus grande que celle de la série considérée (§ 371, avertissement).

Remarque. Dans une série semi-convergente on peut modifier l'ordre des termes de façon que la somme de la série ainsi formée soit égale à n'importe quel nombre fixé à l'avance (on peut aussi obtenir une série divergente).

§ 380. Groupement des termes d'une série

Si la commutativité est la propriété des seules séries absolument convergentes (cf. § 379), l'associativité est valable pour *n'importe quelle* série convergente.

Plus précisément, on peut dans chaque série convergente, *sans modifier l'ordre des termes*, les grouper de façon arbitraire. En additionnant les termes à l'intérieur de chaque groupe nous obtenons une nouvelle série. Elle est aussi convergente et sa somme n'est pas modifiée.

Exemple 1. Dans la série convergente (en vertu du critère de Leibniz)

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots \tag{1}$$

les termes peuvent être groupés de la manière suivante:

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\dots \tag{2}$$

Additionnant les termes à l'intérieur de chaque groupe nous obtenons:

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\frac{2}{10^2-1}+\dots \tag{3}$$

Cette série positive a la même somme (*) que la série alternée (1).

Exemple 2. Dans la série (1) nous pouvons grouper le second terme avec le troisième, le quatrième avec le cinquième, etc. Nous obtenons alors la série convergente

$$1-\frac{2}{4^2-1}-\frac{2}{8^2-1}-\frac{2}{12^2-1}-\dots \tag{4}$$

qui possède la même somme.

Remarque. L'opération inverse (l'ouverture des paranthèses) n'est certainement possible que dans le cas où *après l'ouverture des parenthèses* la série obtenue est convergente (alors la série initiale est a fortiori convergente). Il est toutefois possible que la série soit convergente, mais que la série obtenue après l'ouverture des parenthèses soit divergente.

Exemple 3. La série

$$(1-0{,}9)+(1-0{,}99)+(1-0{,}999)+\dots \tag{5}$$

(la progression géométrique $0{,}1+0{,}01+0{,}001+\dots$) est convergente et sa somme est $\frac{1}{9}$.

En ouvrant les parenthèses nous obtenons la série

$$1-0{,}9+1-0{,}99+1-0{,}999+\dots; \tag{5'}$$

elle est divergente, car les sommes partielles de numéros pairs tendent toujours vers la limite $\frac{1}{9}$, alors que les sommes partielles de numéros impairs tendent vers la limite $1\frac{1}{9}$.

Exemple 4. Considérons la série

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\dots \tag{6}$$

On peut la présenter sous la forme

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots \tag{7}$$

est possible ici d'ouvrir les parenthèses, car la série ainsi obtenue

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots \tag{8}$$

(*) Elle est égale à $\frac{\pi}{4}$; cf. § 398, exemple 3.

est convergente. En effet, toute somme partielle s_{2n-1} est égale à l'unité, et la somme partielle

$$s_{2n} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

tend vers l'unité. La somme de la série (8) $S = 1$ est aussi la somme de la série (6):

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots = 1.$$

§ 381. Multiplication des séries

THÉORÈME. Etant données deux séries absolument convergentes

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = U, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots = V, \tag{2}$$

on peut les multiplier par la règle de multiplication des polynômes. Chaque terme de la série (1) est multiplié par chaque terme de la série (2) et les produits sont additionnés dans un ordre quelconque. Nous obtenons ainsi une série absolument convergente dont la somme est UV:

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \ldots = UV. \tag{3}$$

REMARQUE 1. Pour éviter que dans la série (3) un terme ne soit répété deux fois ou omis, il est recommandé de grouper les termes u_iv_k pour lesquels la somme des indices i, k est la même (cette somme est appelée le *poids* du terme u_iv_k). La série obtenue est alors de la forme

$$w_1 + w_2 + w_3 + \ldots, \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1v_1,\\ w_2 &= u_2v_1 + u_1v_2,\\ w_3 &= u_3v_1 + u_2v_2 + u_1v_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_n &= u_nv_1 + u_{n-1}v_2 + u_{n-2}v_3 + \ldots + u_1v_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Ce groupement correspond à une multiplication effectuée d'après le schéma:

$$\begin{array}{rrrrr} u_1 + & u_2 + & u_3 + & u_4 + & \ldots \\ v_1 + & v_2 + & v_3 + & v_4 + & \ldots \\ \hline u_1v_1 + & u_2v_1 + & u_3v_1 + & u_4v_1 + & \ldots \\ & u_1v_2 + & u_2v_2 + & u_3v_2 + & \ldots \\ & & u_1v_3 + & u_2v_3 + & \ldots \\ & & & u_1v_4 + & \ldots \\ \hline w_1 + & w_2 + & w_3 + & w_4 + & \ldots \end{array} \tag{6}$$

EXEMPLE 1. Considérons deux séries absolument convergentes:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots, \tag{7}$$

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots \tag{8}$$

En les multipliant d'après le schéma (6), nous trouvons:

$$\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ \quad -\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots \\ \qquad\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots \\ \qquad\qquad -\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots \\ \qquad\qquad\qquad +\frac{1}{16}+\ldots \\ \hline 1+0+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{16}+\ldots \end{array} \tag{9}$$

Les termes de la série obtenue se forment d'après la loi suivante(*):

$$w_{2n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}}, \qquad w_{2n}=0.$$

En omettant les zéros, nous obtenons une série absolument convergente

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{4^{n-1}}+\ldots \tag{10}$$

Sa somme est le produit des sommes des séries (7) et (8). On le vérifie aisément, car la somme de la progression (7) est égale à 2, celle de la progression (8) est $\frac{2}{3}$ et celle de la progression (10) $\frac{4}{3}$.

EXEMPLE 2. La série

$$1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ldots+\frac{n}{7^{n-1}}+\ldots \tag{11}$$

absolument convergente (en vertu de la règle de d'Alembert). rouver sa somme.

(*) Dans chaque colonne du schéma (9) les termes ont une même valeur absolue les signes étant alternés. La colonne d'indice pair (dont le nombre des termes est pair) donne zéro. Dans la colonne d'indice impair $2n-1$ le premier terme est $\frac{1}{2_{2n-2}}$ et les autres s'éliminent mutuellement.

SOLUTION. La somme cherchée est le produit des sommes de deux séries absolument convergentes identiques

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}, \qquad (12)$$

$$1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{7^{n-1}}+\ldots=\frac{7}{6}. \qquad (13)$$

En effet, nous obtenons d'après le schéma (6):

$$\begin{array}{l} 1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\ \quad\ \ \frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\ \qquad\quad\ \ \frac{1}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\ldots \\ \qquad\qquad\quad\ \ \frac{1}{7^3}+\ldots \\ \hline 1+\frac{2}{7}+\frac{3}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\ldots \end{array}$$

Cela signifie que la somme de la série (11) est égale à

$$\frac{7}{6}\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{36}.$$

REMARQUE 2. Si l'une des séries (1), (2) est absolument convergente et l'autre semi-convergente, la série (4) obtenue d'après le schéma (6) est convergente et sa somme est toujours égale à UV. Mais elle peut s'avérer semi-convergente; dans ce cas on ne peut modifier arbitrairement l'ordre des termes (§ 379).

Si les deux séries (1), (2) sont semi-convergentes, la série (4) *peut s'avérer divergente*(*). Mais si elle est convergente, sa somme est égale à UV.

(*) La série

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\mp\ldots \qquad (U)$$

est convergente (d'après le critère de Leibniz, § 376), mais elle est semi-convergente, autrement dit, la série positive

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

est divergente (§ 373, exemple 2). Si l'on applique les formules (4), (5) aux deux séries dont chacune coïncide avec (U), nous obtenons la série

$$w_1+w_2+w_3+\ldots \qquad (W)$$

dont chaque terme est supérieur à l'unité en valeur absolue. En effet, la formule (5) donne:

$$|w_n|=\frac{1}{\sqrt{1\cdot n}}+\frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n\cdot 1}}.$$

Ici chacun des n termes est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{n\cdot n}}=\frac{1}{n}$. Par conséquent, w_n ne tend pas vers zéro, et la série (W) est divergente (§ 369).

§ 382. Division des séries

THÉORÈME. Soient données deux séries convergentes:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = U, \tag{1}$$

$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = V. \tag{2}$$

Appliquant à ces séries le schéma de division du polynôme $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ par le polynôme $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ nous obtenons la série

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots \tag{3}$$

Si la série (3) est convergente(*), sa somme W est égale à $U : V$.

EXEMPLE. Appliquons aux séries convergentes

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = U, \tag{1a}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \ldots = V \tag{2a}$$

le schéma de division d'un polynôme par un polynôme. Nous avons

$$\begin{array}{l|l} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots & \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots \\ -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots\right) & 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \\ \hline \quad \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + \ldots & \\ \quad -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots\right) & \\ \hline \qquad \frac{1}{2^2} + 0 + \frac{1}{2^4} + 0 + \ldots & \\ \qquad -\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^5} + \ldots\right) & \\ \hline \qquad\quad \frac{1}{2^3} + 0 + \frac{1}{2^5} + \ldots & \\ \qquad\quad -\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \ldots\right) & \\ \hline \qquad\qquad \frac{1}{2^4} + 0 + \ldots & \end{array}$$

(*) Elle peut s'avérer divergente même quand les séries (1) et (2) sont absolumen convergentes. Ainsi, si l'on divise, d'après le schéma mentionné, la série $1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ (dont tous les termes, sauf le premier, sont des zéros) par la série $1 + 1 + 0 + 0 + 0 + \ldots$ (dont tous les termes, sauf les deux premiers, sont des zéros), nous obtenons la série divergente $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Dans l'exemple considéré les termes de la série (3) sont formés d'après la loi suivante:

$$w_1 = 1, \qquad w_2 = \frac{1}{2^0}, \qquad w_3 = \frac{1}{2^1},$$

$$w_4 = \frac{1}{2^2}, \ldots, \qquad w_n = \frac{1}{2^{n-2}}, \ldots \qquad (n \geqslant 2)$$

En effet, le second reste s'obtient en multipliant terme à terme le premier reste par $\frac{1}{2}$; par conséquent, le troisième terme de la série (3) s'obtient du second terme en le multipliant par $\frac{1}{2}$. Lors de la troisième soustraction tous les termes respectifs sont deux fois plus petits que lors de la seconde soustraction. Par conséquent, le troisième reste s'obtient en multipliant le second par $\frac{1}{2}$. Cela signifie que le quatrième terme de la série (3) s'obtient du troisième en le multipliant par $\frac{1}{2}$, etc.

Ainsi, les termes de la série (3) à partir du deuxième forment une progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Par conséquent, la série (3) est convergente. Sa somme W est égale à $U : V$. Nous avons en effet:

$$U = 1, \quad V = \frac{1}{3}, \qquad W = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3,$$

de sorte que

$$U : V = W.$$

§ 383. Série de fonctions

On appelle *série de fonctions* l'expression

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{1}$$

où $u_1(x)$, $u_2(x)$, ... (les termes de la série) sont des fonctions d'une variable x définies dans un intervalle (a, b).

Le sens de l'expression (1) est expliqué au § 367, où on considérait une série dont les termes étaient des nombres (série *numérique*) et non

des fonctions. Les *sommes partielles* d'une série de fonctions sont définies de même que celles d'une série numérique.

Si dans la série de fonctions (1) on donne à la variable x une certaine valeur appartenant à l'intervalle (a, b), on obtiendra une série numérique.

§ 384. Domaine de convergence d'une série de fonctions

Il peut arriver que pour toute valeur de x prise dans l'intervalle (a, b) la série de fonctions soit convergente. Il peut également arriver que pour toute valeur de x la série soit divergente. En général la série de fonctions est convergente pour certaines valeurs de x et divergente pour d'autres. L'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série est convergente est appelée *domaine de convergence* de la série de fonctions.

Dans le domaine de convergence à chaque valeur de x correspond une somme déterminée de la série, de sorte que cette somme est une fonction de l'argument x, définie dans le domaine de convergence. En dehors de ce domaine la série de fonctions n'a pas de somme.

Exemple 1. Considérons la série de fonctions

$$1 \cdot x + 1 \cdot 2x^2 + 1 \cdot 2 \cdot 3x^3 + \ldots + 1 \cdot 2 \ldots nx^n + \ldots \quad (1)$$

Ses termes sont des fonctions

$$u_1(x) = x, \quad u_2(x) = 2x^2, \quad u_3(x) = 6x^3, \ \ldots \quad (2)$$

définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Or, la série (1) ne converge que pour $x = 0$, elle diverge pour toute autre valeur de x. En effet, donnons à x une valeur x_0 non nulle. Nous obtenons la série numérique

$$1 \cdot x_0 + 1 \cdot 2x_0^2 + \ldots + 1 \cdot 2 \ldots nx_0^n + \ldots \quad (3)$$

Le rapport

$$| u_{n+1} : u_n | = | (n+1)! \ x_0^{n+1} : n! x_0^n | = (n+1) \ | x_0 |$$

a une limite infinie quand $n \to \infty$. Par conséquent (§ 378), la série (3) est divergente pour $x \neq 0$. Le domaine de convergence se compose d'un seul point $x = 0$.

Exemple 2. La série de fonctions

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (4)$$

[ses termes sont des fonctions définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$] est convergente pour toute valeur $x = x_0$. En effet le rapport

$$|u_{n+1} : u_n| = \frac{| x_0 |}{n+1}$$

tend vers zéro quand $n \to \infty$ (§ 378). Le domaine de convergence est tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. La somme de la série (4) est une fonction définie dans cet intervalle (cette fonction est égale à e^x; cf. § 272, exemple 1).

EXEMPLE 3. Trouver le domaine de convergence et l'expression de la somme de la série

$$2+\frac{1}{2}x(1-x)+\frac{1}{2}x^2(1-x)+\ldots+\frac{1}{2}x^{n-1}(1-x)+\ldots \tag{5}$$

SOLUTION. Ecrivons la somme partielle de la série (5) sous la forme

$$s_n=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-\ldots-\frac{1}{2}x^{n-1}+\frac{1}{2}x^{n-1}-\frac{1}{2}x^n=$$
$$=2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n. \tag{6}$$

Si $|x|>1$, s_n n'a pas de limite finie quand $n\to\infty$ (le terme $-\frac{1}{2}x^n$ est un infiniment grand), autrement dit, la série (5) est divergente. Pour $x=-1$ la série est aussi divergente, car dans ce cas

$$s_n=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n=\frac{3}{2}+\frac{(-1)^{n+1}}{2}.$$

Nous voyons donc que s_n prend alternativement les valeurs 2 et 1.

Pour les autres valeurs de x (c'est-à-dire pour $-1<x\leqslant 1$) la série (5) est convergente. En effet, si $x=1$, tous les termes de la série (5), sauf le premier, s'annulent et nous avons

$$S(1)=2. \tag{7}$$

Si $|x|<1$, alors dans la formule (6) le terme $-\frac{1}{2}x^n$ tend vers zéro quand $n\to\infty$ pour un x fixe, de sorte que

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^n\right)=$$
$$=2+\frac{1}{2}x. \tag{8}$$

Le domaine de convergence de la série (5) est l'intervalle $(-1,+1)$ dont l'extrémité $x=-1$ est exclue (sur la fig. 401 le seg-

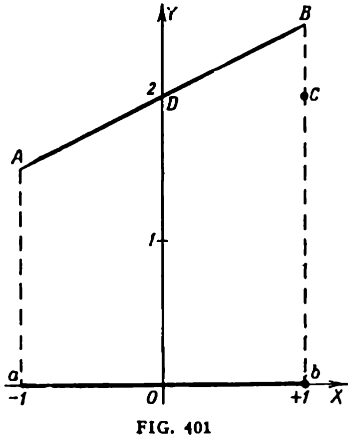


FIG. 401

ment *ab* sans le point *a*). Dans ce domaine la somme S de la série (5) est une fonction de x définie par les égalités suivantes

$$\left.\begin{array}{l} S(x) = 2 + \frac{1}{2}x \text{ pour } -1 < x < 1, \\ S(x) = 2 \text{ pour } x = 1. \end{array}\right\} \tag{9}$$

La fonction $S(x)$ est discontinue pour $x = 1$ et continue aux autres points du domaine de convergence. A l'extérieur du domaine $-1 < x \leqslant 1$ la fonction $S(x)$ n'est pas définie du tout. Son graphe est (fig. 401) le segment AB dont on a exclu les extrémités A et B et auquel on a ajouté (au lieu du point B) le point C.

§ 385. Convergence uniforme et non uniforme (*)

Soit

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{1}$$

une série de fonctions convergente en chaque point de l'intervalle (a, b) (fermé ou ouvert)(**). On demande de trouver la valeur approchée de la somme S de la série (1) à ε près (autrement dit, le reste R_n ne doit pas être supérieur en valeur absolue au nombre positif ε). Pour chaque valeur déterminée de x cette exigence est satisfaite à partir d'un certain rang $n = N$. La grandeur N dépend généralement de x, et il peut arriver qu'*aucun rang n ne permet d'assurer la précision exigée pour tous les x à la fois*. On dit alors que la série (1) *converge non uniformément* dans l'intervalle (a, b). Si par contre on peut assurer le degré exigé de précision pour tous les x à la fois à partir d'un certain rang N, on dit que la série (1) est *uniformément convergente* dans l'intervalle (a, b).

EXEMPLE 1. La série de fonctions

$$2 + \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}x^2(1-x) + \ldots + \frac{1}{2}x^{n-1}(1-x) + \ldots \tag{2}$$

(cf. § 384, exemple 3) converge en chaque point de l'intervalle fermé $(0, 1)$. Montrons que dans cet intervalle elle est non uniformément convergente.

Exigeons que la somme partielle

$$s_n = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^n \tag{3}$$

(*) Cf. § 386 (définition).

(**) La série peut également être convergente en des points extérieurs à l'intervalle (a, b) que nous ne considérons pas ici.

donne la somme de la série (2) à $\frac{1}{2} \cdot 0{,}1$ près. Pour $x = 1$ et $x = 0$ toutes les sommes partielles satisfont à cette exigence (on obtient la valeur exacte $S = 2$). Pour les autres valeurs de x la somme de la série est

$$S = 2 + \frac{1}{2}x, \tag{4}$$

de sorte que le reste de la série est

$$R_n = S - s_n = \frac{1}{2}x^n. \tag{5}$$

Pour $x = 0{,}1$ ou $x = 0{,}2$ ou $x = 0{,}3$ la précision requise est assurée à partir de $N = 2$, par exemple pour $x = 0{,}3$ nous avons:

$$|R_2| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}3^2 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Or, pour $x = 0{,}4$ deux termes ne suffisent pas; il faut en prendre au moins trois. Dans ce cas

$$|R_3| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4^3 \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}06 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Les essais ultérieurs montrent que pour $x = 0{,}5$ la précision requise n'est assurée qu'à partir de $N = 4$, pour $x = 0{,}6$ à partir de $N = 5$ et pour $x = 0{,}8$ à partir de $N = 11$. Au fur et à mesure que x s'approche de 1, le nombre N croît indéfiniment, de sorte qu'aucun rang N ne peut assurer une précision de 0,1 pour toutes les valeurs de x à la fois (et a fortiori une meilleure précision). Donc la série (2) est non uniformément convergente dans l'intervalle (0, 1).

On a représenté sur la fig. 402 les graphes des sommes partielles

$$s_1(x) = 2, \qquad s_2(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2,$$

$$s_3(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^3, \quad s_4(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^4.$$

Le reste est représenté pour $x \neq 1$ par les segments des ordonnées comprises entre le graphe correspondant et la droite $y = 2 + \frac{1}{2}x$ [représentant la somme de la série (2) pour toutes les valeurs de x, excepté $x = 1$].

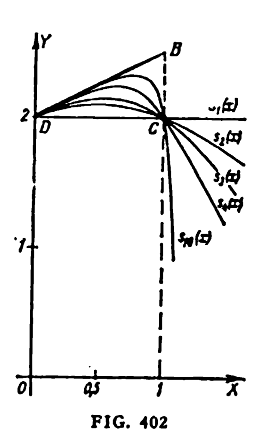


FIG. 402

La série (2) est convergente: les graphes des sommes partielles se rapprochent de plus en plus de la droite DB, et cela sur un tronçon de plus en plus grand. La série (2) est non uniformément convergente: à proximité de B chacun des graphes de s_n s'écarte de la droite DB. Toutefois, cet écart se manifeste sur un tronçon de plus en plus petit avec la croissance de n.

EXEMPLE 2. Montrons que cette même série est uniformément convergente dans le segment (0, 0,5).

Exigeons une précision de $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$. Pour $x = 0{,}5$ cette précision est assurée à partir de $N = 4$, car

$$|R_4| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^4 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}0625 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}1.$$

Pour toute autre valeur de x dans l'intervalle (0, 0,5) la précision requise est a fortiori assurée à partir de $N = 4$.

Exigeons maintenant une précision de $\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$; dans ce cas il suffit pour $x = 0{,}5$ de prendre $N = 7$, car

$$|R_7| = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5^7 \approx \frac{1}{2} \cdot 0{,}0078 < \frac{1}{2} \cdot 0{,}01.$$

Pour toute autre valeur de x dans l'intervalle (0, 0,5) sept termes sont a fortiori suffisants. En général, le numéro N qui assure une précision à ε près pour $x = 0{,}5$, assure immédiatement cette même précision pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle (0, 0,5). Par conséquent, dans cet intervalle la série (2) converge uniformément (fig. 402): le plus grand écart du graphe de s_n à la droite DB tend vers zéro avec la croissance de n. Cela n'a pas lieu dans l'intervalle (0, 1).

§ 386. Définition de la convergence uniforme et non uniforme

La série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots, \tag{1}$$

convergente dans l'intervalle (a, b) (fermé ou ouvert), est dite *uniformément convergente* dans cet intervalle si, à partir d'un certain rang N, *le même pour toutes les*

valeurs de x, le reste $R_n(x)$ reste inférieur en valeur absolue à tout nombre $\varepsilon > 0$ fixé d'avance:

$$|R_n(x)| < \varepsilon \quad \text{quand } n \geqslant N(\varepsilon) \tag{2}$$

(le rang N ne dépend que de ε).

Si pour un certain ε la condition (2) ne peut être vérifiée (pour tous les x simultanément) pour aucune valeur de N, on dit que la série (1) *est non uniformément convergente* dans l'intervalle (a, b).

Cf. § 385 (exemples).

§ 387. Interprétation géométrique de la convergence uniforme et non uniforme

Soient AB (fig. 403) le graphe de la somme $S(x)$ d'une série convergente dans l'intervalle (a, b) et A_nB_n, $A_{n+1}B_{n+1}$, ... les graphes des sommes partielles $s_n(x)$, $s_{n+1}(x)$, ... Construisons une bande $A'A''B''B'$ de sorte que les courbes $A'B'$ et $A''B''$ soient distantes (en verticale) de AB d'une constante ε. Si la série est uniformément convergente, toutes les courbes A_nB_n à partir d'un rang $N(\varepsilon)$ sont entièrement intérieures (dans les limites de l'intervalle considéré) à cette bande.

Cela n'aura pas lieu pour une série non uniformément convergente. Ainsi, tous les graphes de $s_n(x)$ de la fig. 404 présentent deux pics sortant de la bande $A'A''B'B''$ (ils se rapprochent du point C avec la croissance

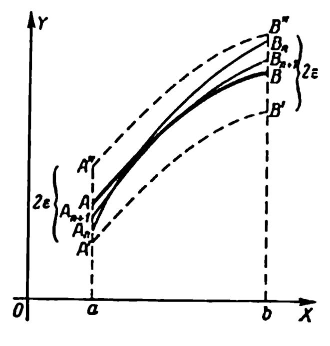


FIG. 403

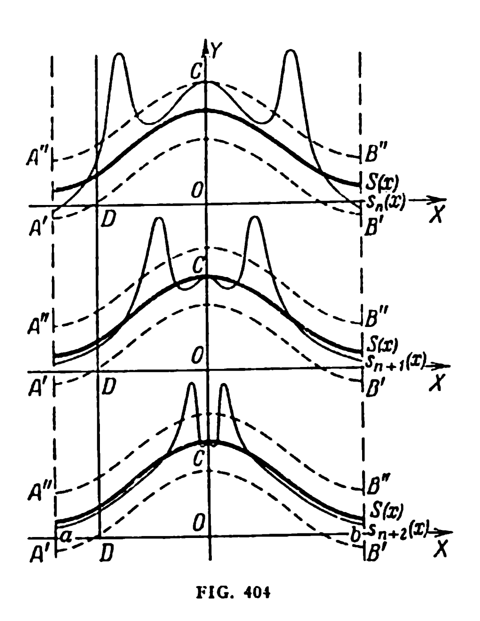


FIG. 404

de n). (Par ailleurs, *au-dessus de chaque point D* du tronçon ab les graphes de $s_n(x)$ se rapprochent indéfiniment du graphe de $S(x)$ (après que le pic a quitté le point D).

§ 388. Critère de convergence uniforme; séries régulières

Si chaque terme $u_n(x)$ de la série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \qquad (1)$$

pour tout x dans l'intervalle (a, b) n'est pas supérieur en valeur absolue au nombre positif A_n et si la série numérique

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots \qquad (2)$$

est convergente, la série de fonctions (1) est uniformément convergente dans cet intervalle.

EXPLICATION. La convergence de la série (1) découle des §§ 377 et 373. Le reste de la série (1) n'est pas supérieur en valeur absolue au reste de la série (2). A partir de N qui assure une précision à ε près pour la série (2), cette précision est a fortiori assurée pour la série (1) pour tous les x à la fois.

EXEMPLE. La série de fonctions

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots \tag{3}$$

converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, car tous ses termes pour n'importe quel x ne dépassent pas en valeur absolue les termes correspondants de la série numérique positive

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots \tag{4}$$

Cette dernière est convergente (§ 373, exemple 3). Une precision de 0,1 est assurée pour la série (4) à partir de $n = 10$. Pour la série (3) cette précision est a fortiori assurée à partir de la dixième somme partielle

Dans l'intervalle fermé $(-\pi, \pi)$ la somme de la série (3) est égale à

$$\frac{1}{4}\left(x^2-\frac{\pi^2}{3}\right).$$

Pour $x = \pm\pi$ la série de fonctions (3) se transforme en série numérique (4) dont la somme est $\frac{\pi^2}{6}$ (cf. § 417, exemple 3).

REMARQUE. La série de fonctions satisfaisant au critère du présent paragraphe est dite *régulière*. Toute série régulière est uniformément convergente. Les séries non régulières convergent uniformément en certains cas et non uniformément en d'autres.

§ 389. Continuité de la somme d'une série

THÉORÈME. La somme de la série de fonctions continues

$$u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots \tag{1}$$

uniformément convergente dans l'intervalle (a, b) est elle-même une fonction continue dans cet intervalle.

EXEMPLE 1. Tous les termes de la série

$$-\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}-\frac{\cos 3x}{3^2}+\ldots+(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\ldots, \tag{2}$$

uniformément convergente dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ (§ 388) sont des fonctions continues. Par conséquent, la somme de la série (2) est

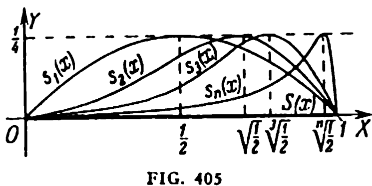


FIG. 405

une fonction continue pour chaque valeur de x.

REMARQUE. La somme d'une série de fonctions continues non uniformément convergente peut être continue ou discontinue.

EXEMPLE 2. Tous les termes de la série

$$2 + \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}x^2(1-x) + \dots + \frac{1}{2}x^{n-1}(1-x) + \dots \tag{3}$$

non uniformément convergente dans l'intervalle fermé (0, 1) (§ 385) sont des fonctions continues. Toutefois la somme de la série est une fonction discontinue pour $x = 1$ (cf. § 384, exemple 3).

EXEMPLE 3. La série

$$(x - x^2) + [(x^2 - x^4) - (x - x^2)] + [(x^3 - x^6) - (x^2 - x^4)] + \dots \tag{4}$$

de terme général

$$u_n(x) = (x^n - x^{2n}) - (x^{n-1} - x^{2n-2}) \tag{5}$$

est non uniformément convergente dans l'intervalle fermé (0, 1), mais possède une somme continue $S(x)$ identiquement nulle.

En effet, nous avons $s_n(x) = x^n - x^{2n}$ et pour chaque valeur de x dans l'intervalle (0, 1) cette expression tend vers zéro, de sorte que la série converge et a pour somme $S(x) = 0$.

Toutefois, le reste de la série $|R_n(x)| = |S(x) - s_n(x)| = x^n - x^{2n}$ ne peut être rendu inférieur à $\frac{1}{4}$ pour toutes les valeurs de x à la fois, car pour tout n il est égal à $\frac{1}{4}$ pour $x = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$

Par conséquent (§ 385), la série (4) est non uniformément convergente. Néanmoins, la somme $S(x) = 0$ est une fonction continue.

GÉOMÉTRIQUEMENT, les graphes de toutes les sommes partielles s_n (fig. 405) ont une « bosse » sur la droite $y = \frac{1}{4}$, de sorte qu'aucun graphe ne peut être entièrement intérieur à la bande comprise entre les droites $y = \pm\frac{1}{4}$. N'empêche que la somme (représentée par le segment gras de l'axe OX) est une fonction continue.

§ 390. Intégration des séries

THÉORÈME. Si la série convergente

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = S(x) \tag{1}$$

formée de fonctions continues dans l'intervalle (a, b) est uniformément convergente dans cet intervalle, elle peut être intégrée terme à terme. La série

$$\int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \dots \tag{2}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle (a, b), et sa somme est égale à l'intégrale $\int_a^x S(x)\,dx$ de la somme de la série (1):

$$\int_a^x u_1(x)\,dx + \int_a^x u_2(x)\,dx + \dots + \int_a^x u_n(x)\,dx + \dots = \int_a^x S(x)\,dx. \tag{3}$$

EXPLICATION. La somme partielle $s_n'(x)$ de la série (2) est l'intégrale de la somme partielle $s_n(x)$ de la série (1)

$$s_n'(x) = \int_a^x s_n(x)\,dx$$

et est représentée par l'aire aA_nC_nx (fig. 406). L'intégrale $\int_a^x S(x)\,dx$ de la somme $S(x)$ de la série (1) est représentée par l'aire $aACx$.

Le théorème affirme que premièrement la série (2) est convergente et que sa somme est égale à $\int_a^x S(x)\,dx$.

GÉOMÉTRIQUEMENT, l'aire $aACx$ (fig. 406) est la limite de l'aire aA_nC_nx quand $n \to \infty$.

En effet en cas de convergence uniforme de la série (1) le graphe A_nC_n est entièrement intérieur à la bande $A'A''C''C'$ (§ 387). Cela signifie que l'aire aA_nC_nx est comprise entre les aires $aA'C'x$ et $aA''C''x$. Or toutes les deux ont pour limite l'aire $aACx$.

Le théorème affirme que, deuxièmement, la série (2) converge uniformément.

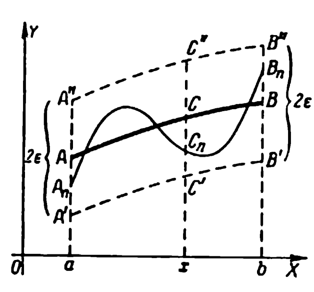


FIG. 406

Géométriquement, pour toutes les positions de l'ordonnée xC'' la grandeur

$$|\text{ aire } aACx - \text{aire } aA_nC_nx\,| \tag{4}$$

peut, à partir d'un certain rang n, être rendue inférieure à toute aire E fixée d'avance. En effet, la bande $A'A''B''B'$ peut être rétrécie à tel point que son aire soit inférieure à E. L'aire $A'A''C''C'$ est alors a fortiori inférieure à E et la grandeur (4) encore plus petite.

Exemple 1. La série

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots \tag{5}$$

est uniformément convergente (en vertu du critère du § 388), dans l'intervalle $(0, q)$ où q est une fraction régulière, car ses termes ne sont pas supérieurs aux termes correspondants de la série positive convergente (§ 374)

$$1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots \tag{6}$$

Par ailleurs (*),

$$S(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{7}$$

Conformément au théorème du présent paragraphe, la série

$$\int_0^x dx + \int_0^x 2x\,dx + \ldots + \int_0^x nx^{n-1}\,dx + \ldots \tag{8}$$

est uniformément convergente dans l'intervalle $(0, q)$ et sa somme est

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} - 1\,(0 \leqslant x \leqslant q). \tag{9}$$

On le vérifie facilement car la série (8) est la progression

$$x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Remarque. Si la série (1) est non uniformément convergente, elle est intégrable terme à terme dans certains cas et non intégrable dans d'autres (cf. exemples 2 et 3).

Exemple 2. La série non uniformément convergente dans l'intervalle (0, 1)

$$(x - x^2) + [(x^2 - x^4) - (x - x^2)] + [(x^3 - x^6) - (x^2 - x^4)] + \ldots = 0 \tag{10}$$

(*) La formule (7) peut être obtenue en multipliant terme à terme la série

$$1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad \left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$$

par elle-même (cf. § 381, exemple 2.

(cf. § 389, exemple 3) peut être intégrée terme à terme de 0 à 1:

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx + \int_0^1 [(x^2 - x^4) - (x - x^2)]\,dx + \dots = \int_0^1 0 \cdot dx = 0. \tag{11}$$

En effet, la somme partielle s'_n de la série (11) est égale à

$$s'_n = \int_0^1 (x^n - x^{2n})\,dx = \frac{n}{(n+1)(2n+1)}. \tag{12}$$

Elle tend vers zéro quand $n \to \infty$.

GÉOMÉTRIQUEMENT, l'aire limitée par le graphe de $s_n(x)$ (fig. 405) et le segment (0, 1) tend vers zéro malgré la «bosse» (avec la croissance de n la «bosse» se rétrécit indéfiniment, sa hauteur restant constante).

EXEMPLE 3. La série

$$(x - x^2) + [2(x^2 - x^4) - (x - x^2)] + [3(x^3 - x^6) - 2(x^2 - x^4)] + \dots \tag{13}$$

de terme général

$$u_n(x) = n(x^n - x^{2n}) - (n-1)(x^{n-1} - x^{2n-2}) \tag{14}$$

converge dans l'intervalle (0, 1) et possède une somme continue $S(x) = 0$ [on le démontre de la même façon que pour la série (10)]. Par conséquent,

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0. \tag{15}$$

Par ailleurs, l'intégration terme à terme de 0 à 1 ne donne pas zéro, mais $\frac{1}{2}$. En effet, nous obtenons la série

$$\int_0^1 (x - x^2)\,dx + \left[2\int_0^1 (x^2 - x^4)\,dx - \int_0^1 (x - x^2)\,dx\right] + \dots +$$

$$+ \left[n\int_0^1 (x^n - x^{2n})\,dx - (n-1)\int_0^1 (x^{n-1} - x^{2n-2})\,dx\right] + \dots \tag{16}$$

de somme partielle

$$s'_n = n\int_0^1 (x^n - x^{2n})\,dx = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}. \tag{17}$$

Par conséquent, sa somme S' est égale à

$$S' = \lim_{n\to\infty} s'_n = \frac{1}{2}. \tag{18}$$

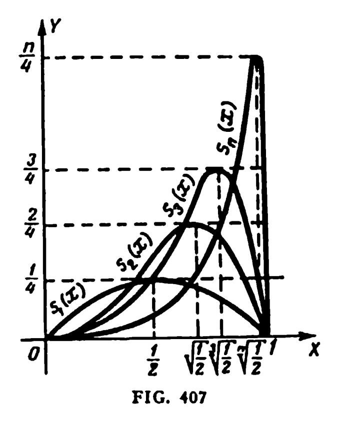


FIG. 407

La non-concordance entre (15) et (18) est due à la convergence non uniforme de la série (13) (la non-uniformité de la convergence se démontre de la même façon que dans l'exemple 3 § 389).

Géométriquement, le graphe de s_n (fig. 407) tend à se confondre avec l'axe des abscisses au-dessus de n'importe quel tronçon du segment (0, 1) ne contenant pas le point $x = 1$. Or au voisinage de ce point se forme une bosse. Elle se rapproche indéfiniment de l'extrémité $x = 1$. Toutefois, tout en se rétrécissant dans le sens horizontal, la bosse croît dans le sens vertical (*). Cette compensation fait que l'aire comprise entre s_n et le segment (0, 1) ne tend pas vers zéro, mais vers $\frac{1}{2}$.

Remarque. Si l'on modifie la série (13) en prenant la série de terme général

$$u_n(x) = n^2(x^n - x^{2n}) - (n-1)^2(x^{n-1} - x^{2n-2}), \tag{14a}$$

on aura comme auparavant:

$$\int_0^1 S(x)\,dx = 0, \tag{16a}$$

et après intégration terme à terme on obtient la série de somme partielle

$$s'_n = \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}. \tag{18a}$$

Elle est divergente, car $\lim_{n\to\infty} s'_n = \infty$ (la croissance de la bosse vers le haut sera plus rapide que son rétrécissement suivant l'horizontale).

§ 391. Dérivation des séries

Même une série uniformément convergente n'est pas toujours dérivable terme à terme. Le théorème suivant donne des conditions permettant de dériver terme à terme une série.

Théorème. Si la série de fonctions

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \tag{1}$$

(*) Les graphes de la fig. 407 s'obtiennent des graphes semblables de la fig. 405 par traction dans le sens vertical dans le rapport $n : 1$.

est convergente dans l'intervalle (a, b) et si ses termes admettent en tout point de (a, b) des derivées continues, alors la série (1) peut être dérivée terme à terme *si la série obtenue*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \dots + u_n'(x) + \dots \tag{2}$$

est uniformément convergente dans cet intervalle. La somme de la série (2) est la dérivée de la somme de la série (1).

La démonstration est basée sur la réciprocité des opérations d'intégration et de dérivation et découle du théorème du § 390.

Exemple. La série

$$x + x^2 + \dots + x^n + \dots \tag{3}$$

est convergente dans l'intervalle $(0, q)$ où q est une fraction régulière. On a alors

$$x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{x}{1-x} \quad (0 \leqslant x \leqslant q). \tag{4}$$

Les dérivées des termes sont des fonctions continues dans l'intervalle $(0, q)$, et la série qu'elles forment

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots \tag{5}$$

est uniformément convergente dans cet intervalle (§ 390, exemple 1). Par conséquent, la somme de la série (5) est la dérivée de la somme $\frac{x}{1-x}$ de la série (3):

$$1 + 2x + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{6}$$

Remarque 1. Le théorème n'exige pas la convergence uniforme de la série (1). Ceci découle des hypothèses du théorème en vertu du théorème du § 390.

Remarque 2. Il peut s'avérer que même dans le cas de la convergence uniforme de la série (1) et de la continuité des dérivées $u_n'(x)$, la série (2) est non uniformément convergente de sorte que sa somme n'est pas toujours égale à la dérivée de la somme de la série (1). Qui plus est, la série (2) peut être divergente. Ainsi, la série

$$\sin x + \frac{\sin 2^4 x}{2^2} + \dots + \frac{\sin n^4 x}{n^2} + \dots \tag{7}$$

est uniformément convergente sur toute la droite numérique (cf. exemple § 388), alors que la série des dérivées

$$\cos x + 2^2 \cos 2^4 x + \dots + n^2 \cos n^4 x + \dots \tag{8}$$

est divergente pour $x = 0$ (ainsi que pour une infinité d'autres valeurs de x).

§ 392. Série entière

Les séries de fonctions les plus importantes pour la pratique sont les séries entières (au sujet de leur origine cf. § 270). La série

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \qquad (1)$$

et aussi la série de forme plus générale

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

où x_0 est une constante, est dite série entière ou série de puissance. La série entière (1) est dite *série des puissances de* x et la série entière (2) *série des puissances de* $(x - x_0)$.

Les constantes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont *les coefficients* de la série entière.

Si l'on désigne $x - x_0$ par z, la série (2) est dite entière en z, autrement dit elle est de la forme (1). C'est pourquoi, dans ce qui suit sauf indication contraire, nous appellerons série entière la série de la forme (1). Une série entière converge toujours pour $x = 0$. En ce qui concerne sa convergence aux autres points, trois cas peuvent se présenter (cf. § 393).

§ 393. Intervalle et rayon de convergence d'une série entière

1. Il peut arriver qu'une série entière soit divergente en tous les points sauf $x = 0$. Telle est, par exemple, la série

$$1^1x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots,$$

dont le terme général $n^nx^n = (nx)^n$ croît indéfiniment en valeur absolue dès que nx devient supérieur à l'unité. De telles séries entières n'ont pratiquement aucune importance.

2. Une série entière peut être convergente en tous les points. Telle est, par exemple, la série

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots,$$

dont la somme est égale à e^x pour toute valeur de x (§ 272, exemple 1).

3. Dans le cas général la série entière converge en certains points et diverge en d'autres.

EXEMPLE 1. La progression géométrique

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (1)$$

est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| \geqslant 1$. Le domaine de convergence (§ 384) est ici l'intervalle $(-1, +1)$ dont on a exclu les deux extrémités $x = +1$ et $x = -1$. La somme de la série (1) (dans le domaine de convergence) est

$$\frac{1}{1-x}.$$

EXEMPLE 2. La série entière

$$1 + \frac{x}{1^2} + \frac{x^2}{2^2} + \ldots + \frac{x^n}{n^2} + \ldots \tag{2}$$

est convergente pour $|x| \leqslant 1$ et divergente pour $|x| > 1$. (cf. § 374, exemple 3). Le domaine de convergence est l'intervalle $(-1, +1)$, y compris les deux extrémités $x = +1$ et $x = -1$. La somme de la série (2) ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires.

EXEMPLE 3. La série entière

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots \tag{3}$$

est convergente pour $|x| < 1$ et divergente pour $|x| > 1$. Elle est également divergente pour $x = -1$ (§ 369, exemple 3) et convergente pour $x = 1$ (§ 369, exemple 4). Le domaine de convergence est l'intervalle $(-1, +1)$, y compris le point $x = 1$; le point $x = -1$ est exclu.

La somme de la série (3) (dans le domaine de convergence) est $\ln(1 + x)$ (§ 272, exemple 2). La série (3) s'obtient par intégration terme à terme de la série

$$1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{1}{1+x}.$$

THÉORÈME. Le domaine de convergence de la série entière

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{4}$$

est un certain intervalle $(-R, R)$ symétrique par rapport au point $x = 0$. On doit parfois y inclure les deux extrémités $x = R$ et $x = -R$, parfois l'une des extrémités et parfois on doit exclure les deux extrémités.

L'intervalle $(-R, R)$ est appelé *intervalle de convergence*, le nombre positif R *rayon de convergence* de la série entière. Si la série entière est convergente uniquement au point $x = 0$, alors $R = 0$. Dans les exemples 1-3 le rayon de convergence est égal à l'unité. Si la série converge en tous les points, on dit que le rayon de convergence est infini ($R = \infty$).

§ 394. Recherche du rayon de convergence

Théorème. Le rayon de convergence de la série entière

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \qquad (1)$$

est égal à la limite du rapport $|a_n| : |a_{n+1}|$ si cette limite (finie ou infinie) existe:

$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n : a_{n+1}|. \qquad (2)$$

Exemple 1. Trouver le rayon et le domaine de convergence de la série

$$\frac{0,1x}{1} - \frac{0,01x^2}{2} + \frac{0,001x^3}{3} - \dots - \frac{(-0,1)^n x^n}{n} + \dots \qquad (3)$$

Solution. Ici $a_n = -\frac{(-0,1)^n}{n}$. Nous avons:

$$|a_n| : |a_{n+1}| = \frac{0,1^n}{n} : \frac{0,1^{n+1}}{n+1} = 10\frac{n+1}{n},$$
$$R = \lim_{n\to\infty} |a_n : a_{n+1}| = 10. \qquad (4)$$

Le rayon de convergence est égal à 10, l'intervalle de convergence est $(-10, 10)$. La série (3) converge à l'intérieur de cet intervalle et diverge à l'extérieur. Pour $x = 10$ la série (3) est de la forme

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{(-1)^n}{n} + \dots \qquad (5)$$

Cette série est convergente (§ 369, exemple 4). Pour $x = -10$ nous obtenons la série divergente (§ 369, exemple 3)

$$-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$$

Par conséquent, le domaine de convergence est l'intervalle $(-10, +10)$, l'extrémité $x = +10$ comprise; l'autre extrémité est exclue.

Explication. Considérons x comme un nombre donné et appliquons à la série (3) la règle de d'Alembert (§ 378). Nous avons:

$$u_n = -\frac{(-0,1)^n x^n}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} |u_{n+1} : u_n| = \lim_{n\to\infty}\left(|x| \cdot 0,1\frac{n}{n+1}\right) = |x| \cdot 0,1.$$

D'après la règle de d'Alembert la série (3) converge quand $|x| \cdot 0,1 < 1$, autrement dit, quand $|x| < 10$, et diverge quand $|x| \cdot 0,1 > 1$, autrement dit, quand $|x| > 10$.

En répétant ce raisonnement pour la série (1), nous obtenons la formule (2).

REMARQUE 1. La somme de la série (3) (dans le domaine de convergence) est égale à $\ln(1 + 0{,}1\, x)$ (cf. § 393, exemple 3).

EXEMPLE 2. Trouver le rayon de convergence de la série

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \ldots \tag{6}$$

SOLUTION. Ici $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n!}$. Nous avons, en vertu de la formule (2):

$$R = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n!} : \frac{1}{(n+1)!}\right] = \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty. \tag{7}$$

La série (6) converge en tous les points. Sa somme est e^{-x} (cf. § 272, exemple 1).

REMARQUE 2. Si la série (1) contient une infinité de coefficients nuls, le rapport $|a_n| : |a_{n+1}|$ n'a pas de limite et *la formule* (2) *ne peut être appliquée* même si l'on rejette les coefficients nuls et que l'on ordonne les coefficients restants.

EXEMPLE 3. Trouver le rayon de convergence de la série

$$\frac{0{,}1z^2}{1} - \frac{0{,}01z^4}{2} + \frac{0{,}001z^6}{3} - \ldots, \tag{8}$$

que l'on obtient à partir de la série (3) par la substitution $x = z^2$.

SOLUTION. Comme la série (3) converge pour $|x| < 10$ et diverge pour $|x| > 10$, la série (8) converge pour $|z| < \sqrt{10}$ et diverge pour $|z| > \sqrt{10}$. Cela signifie que le rayon de convergence de la série (8) est $\sqrt{10}$. La formule (2) ne peut être appliquée: si l'on tient compte des coefficients nuls des puissances impaires de z, le rapport $|a_n| : |a_{n+1}|$ n'a aucun sens pour des n pairs; si l'on rejette les coefficients nuls et si l'on ordonne les coefficients restants, la limite du rapport $|a_n| : |a_{n+1}|$ sera égale à 10 et ne donnera pas le vrai rayon de convergence.

La somme de la série (8) (dans le domaine de convergence) est $\ln(1 + z^2)$.

§ 395. Domaine de convergence d'une série des puissances de $(x - x_0)$

Le domaine de convergence de la série entière

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{1}$$

est un certain intervalle $(x_0 - R,\ x_0 + R)$ symétrique par rapport au point x_0. Il peut comprendre les deux extrémités, une seule ou bien ne pas les comprendre du tout.

L'intervalle $(x_0 - R, x_0 + R)$ est appelé *intervalle de convergence*, le nombre positif R *rayon de convergence* de la série (1). Si la série converge en tous les points, le rayon de convergence est infini ($R = \infty$).

Si le rapport $|a_n| : |a_{n+1}|$ possède une limite (finie ou infinie), le rayon de convergence est déterminé à l'aide de la formule

$$R = \lim_{n \to \infty} |a_n : a_{n+1}|. \tag{2}$$

EXEMPLE. Trouver le rayon et le domaine de convergence de la série

$$\frac{x+0,2}{1} + \frac{(x+0,2)^2}{2} + \ldots + \frac{(x+0,2)^n}{n} + \ldots \tag{3}$$

Ici $x_0 = -0,2$, $a_n = \frac{1}{n}$. Trouvons d'après la formule (2):

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{1}{n} : \frac{1}{n+1} \right| = 1.$$

Le domaine de convergence est l'intervalle $(-1,2; 0,8)$ dont on a exclu l'extrémité $x = 0,8$. La somme de la série (3) (dans le domaine de convergence) est $-\ln[1-(x+0,2)] = \ln \frac{1}{0,8-x}$.

§ 396. Théorème d'Abel (*)

THÉORÈME. Si la série entière

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots \tag{1}$$

est absolument convergente ou semi-convergente en un point x_0, elle converge *absolument et uniformément* dans tout intervalle fermé (a, b) situé à *l'intérieur* de l'intervalle $(-|x_0|, +|x_0|)$.

REMARQUE 1. Le mot « à l'intérieur » est compris au sens étroit, autrement dit d'après les hypothèses du théorème aucune des extrémités de l'intervalle (a, b) ne coïncide ni avec le point $|x_0|$, ni avec le point $-|x_0|$.

EXEMPLE. La série

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \tag{2}$$

(*) L'affirmation sur la convergence uniforme de la série (1) est postérieure à la formulation du théorème (la distinction entre la convergence uniforme et la convergence non uniforme a été introduite par Weierstrass à la fin des années 40 du XIXe siècle).

est semi-convergente au point $x = -1$ en lequel elle se transforme en la série numérique (§ 369, exemple 4)

$$-\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$$

En vertu du théorème d'Abel la série (2) est absolument et uniformément convergente dans tout intervalle fermé situé à l'intérieur de l'intervalle $(-1,\ 1)$, par exemple dans l'intervalle fermé $(-0{,}99,\ 0{,}99)$.

Si l'on choisit comme extrémité gauche de l'intervalle $(a,\ b)$ le point $x_0 = -1$, la convergence absolue est violée (au point $x = -1$). Si on prend pour extrémité droite de $(a,\ b)$ le point $x_0 = 1$, la série (2) devient divergente.

REMARQUE 2. Si, pour l'une des extrémités de l'intervalle $(a,\ b)$, on prend le point x_0, la convergence reste uniforme dans un tel intervalle. Il en est de même du point $-x_0$ si *la série* (1) *converge* en ce point.

§ 397. Opérations sur les séries entières

Soient données deux séries entières:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = S_1(x), \tag{1}$$

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots = S_2(x). \tag{2}$$

Soient A le rayon de convergence de la série (1) et B le rayon de convergence de la série (2). Désignons par r la plus petite de ces quantités (si elles sont égales, r est leur valeur commune).

Si l'on additionne, retranche ou multiplie terme à terme (par la règle de multiplication terme à terme des polynômes cf. § 381) les séries (1), (2), on obtient de nouvelles séries entières. Leur rayon de convergence est dans le pire des cas égal à r et peut être supérieur à r. Leurs sommes sont respectivement $S_1(x) + S_2(x)$, $S_1(x) - S_2(x)$, $S_1(x) \cdot S_2(x)$ (cf. §§ 371, 381, 396).

La division (terme à terme) de la série (1) par la série (2) peut être effectuée d'après le schéma du § 382 à condition que $b_0 \neq 0$. Si $r \neq 0$, le rayon de convergence r_1 de la série obtenue est différent de zéro, mais n'est pas supérieur à A; il peut même arriver que r_1 soit plus petit que chacun des rayons A, B [cf. exemple 4 et remarque pour la formule (4) § 401]. La somme de la nouvelle série (dans l'intervalle de convergence) est $S_1(x) : S_2(x)$.

Si $b_0 = 0$, la division terme à terme n'est pas du tout possible pour $a \neq 0$ (car le quotient $S_1(x) : S_2(x)$ est infiniment grand quand $x \to 0$ et on ne peut le représenter par une série entière en x). Si par contre $b_0 = 0$ et $a_0 = 0$, la division terme à terme est impos-

sible quand la plus petite puissance du dividende est inférieure à la plus petite puissance du diviseur (pour la même raison). Dans le cas contraire la division est possible, et la nouvelle série possède dans l'intervalle $(-r_1, r_1)$ la somme $S_1(x) : S_2(x)$ (*).

EXEMPLE 1. Nous avons dans l'intervalle $(-1, +1)$:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}, \tag{3}$$

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}. \tag{4}$$

Ajoutant terme à terme nous trouvons

$$2 + 2x^2 + 2x^4 + \dots = \frac{2}{1-x^2}. \tag{5}$$

Retranchant terme à terme (4) de (3) nous obtenons:

$$2x + 2x^3 + 2x^5 + \dots = \frac{2x}{1-x^2}. \tag{6}$$

Multipliant terme à terme (cf. § 381, exemple 1), nous avons:

$$1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}. \tag{7}$$

Divisant terme à terme la série (3) par la série (4) (cf. § 382, exemple), nous trouvons:

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + \dots = \frac{1+x}{1-x}. \tag{8}$$

En vertu du théorème du § 394, les séries (5)-(8) possèdent le rayon de convergence $R = 1$, de même que les séries (3) et (4). Les formules (5)-(8) se vérifient aisément: leurs premiers membres sont des progressions géométriques [dans (8) à partir du second terme].

EXEMPLE 2. Nous avons dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ (§ 272, exemple 1)

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x. \tag{9}$$

Remplaçant x par $-x$ nous obtenons

$$1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \dots = e^{-x}. \tag{10}$$

Comme $e^x \cdot e^{-x} = 1$, lors de la multiplication terme à terme tous les termes, excepté le terme constant, doivent se détruire mutuellement, ce qui a réellement lieu.

(*) Pour $x = 0$ cette somme (c'est-à-dire le terme constant de la nouvelle série) est la limite du quotient $S_1(x) : S_2(x)$ quand $x \to 0$.

Exemple 3. Si l'on divise terme à terme la série (9) par la série (10), on obtient la série

$$1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + \dots \tag{11}$$

On ne devine pas immédiatement la loi d'obtention des coefficients, mais sachant que la série (11) converge dans un certain intervalle et possède (dans cet intervalle) la somme $e^x : e^{-x} = e^{2x}$, on peut représenter la série (11) sous la forme

$$1 + \frac{2}{1!}x + \frac{2^2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{3!}x^3 + \frac{2^4}{4!}x^4 + \dots + \frac{2^n}{n!}x^n + \dots \tag{12}$$

La série (12) de même que les séries (9), (10) ont, en vertu du théorème du § 394, un rayon de convergence infini.

Exemple 4. Considérons les binômes $1 + x$ et $1 - x$ comme des séries entières dont les coefficients de tous les termes, excepté les deux premiers, sont nuls. Les rayons de convergence A et B de ces séries sont infinis. Si l'on divise terme à terme $1 + x$ par $1 - x$, on obtient la série entière

$$1 + 2x + 2x^2 + 2x^3 + 2x^4 + \dots \tag{13}$$

Ses termes, à partir du second, forment une progression géométrique de raison x. La somme de la série (13) dans son intervalle de convergence est $(1 + x) : (1 - x)$, mais le rayon de convergence r_1 n'est pas infini, il est égal à l'unité.

§ 398. Dérivation et intégration des séries entières

Théorème 1. Toute série entière

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = S(x) \tag{1}$$

a, pour chaque valeur de x intérieure à son intervalle de convergence, une derivée, qui est la somme de la série

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots = S'(x), \tag{2}$$

obtenue en dérivant terme à terme la première. Cette série dérivée a le même rayon de convergence que la proposée.

La somme d'une série entière est donc une fonction dérivable; elle possède les dérivées de n'importe quel ordre [car on peut appliquer de nouveau le théorème 1 à la série (2), etc.].

Remarque 1. Si la série (1) est divergente à l'une des extrémités de l'intervalle $(-R, R)$, la série (2) l'est également. Si la série (1) est

convergente à une extrémité de l'intervalle $(-R, R)$, la série (2) peut l'être également, mais peut ne pas l'être.

REMARQUE 2. La convergence de la série (2) est un peu plus mauvaise que celle de la série (1) (car na_n est plus grand que a_n en valeur absolue).

EXEMPLE 1. Dérivant successivement la série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x} \quad (-1 < x < +1) \tag{3}$$

pour laquelle $R = 1$, nous obtenons des séries de même rayon de convergence. Leurs sommes seront les dérivées successives de $\frac{1}{1-x}$:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots = \frac{1}{(1-x)^2}, \tag{4}$$

$$2 + 6x + 12x^2 + \ldots + n(n-1)\,x^{n-2} + \ldots = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \tag{5}$$

$$6 + 24x + \ldots + n(n-1)(n-2)\,x^{n-3} + \ldots = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1-x)^4}. \tag{6}$$

La série (3) est divergente aux deux extrémités de l'intervalle de convergence, les séries (4)-(6) le sont également.

EXEMPLE 2. La série (3) s'obtient par dérivation de la série

$$x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots = -\ln(1-x). \tag{7}$$

La série (7) est divergente pour $x = 1$ et convergente pour $x = -1$, mais la dérivation détruit la convergence à l'extrémité $x = -1$.

THÉORÈME 2. En intégrant terme à terme de 0 à x la série (1) on obtient la série de même rayon de convergence et de somme $\int\limits_0^x S(x)\,dx$:

$$a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \ldots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \ldots = \int\limits_0^x S(x)\,dx. \tag{8}$$

REMARQUE 3. Si la série (1) est convergente à l'une des extrémités de l'intervalle $(-R, R)$, la série (8) l'est également, et la formule (8) reste en vigueur. Si la série (1) est divergente à une extrémité de l'intervalle $(-R, R)$, la série (8) peut l'être également, mais peut ne pas l'être. La convergence de la série (8) est quelque peu meilleure que celle de la série (1).

Exemple 3. Le rayon de convergence de la progression géométrique

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots = \frac{1}{1 + x^2} \qquad (9)$$

est égal à l'unité. Intégrant terme à terme nous obtenons (pour $|x| < 1$):

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x. \qquad (10)$$

Le rayon de convergence de la série (10) est aussi égal à l'unité. A l'extrémité $x = 1$ la série (9) est divergente et la série (10) convergente (d'après le critère de Leibniz), et nous avons [*]:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

A l'extrémité $x = -1$ la série (10), de même que (9), est divergente (d'après le critère intégral).

Exemple 4. Intégrant terme à terme la série

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sin x \qquad (11)$$

(§ 272, exemple 2) pour laquelle $R = \infty$, nous obtenons:

$$\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \dots = \int_0^x \sin x \, dx = 1 - \cos x,$$

où x est un nombre arbitraire. Nous en tirons le développement de la fonction $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (12)$$

Ici également $R = \infty$.

§ 399. Série de Taylor [**]

Définition. On appelle *série de Taylor* relative à la fonction $f(x)$ la série entière

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots \qquad (1)$$

[*] Ce résultat appartient à Leibniz.

[**] Nous recommandons avec insistance de lire au préalable le § 270.

Pour $x_0 = 0$ la série de Taylor est de la forme

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \qquad (2)$$

Exemple 1. Représenter la fonction $f(x) = \dfrac{1}{5 - x}$ par la série de Taylor des puissances de $(x - 2)$.

Solution. Calculons les valeurs de la fonction $f(x)$ et de ses dérivées successives pour $x = 2$. Nous obtenons:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = \dfrac{1}{3}, \quad f'(2) = \left.\dfrac{1}{(5-x)^2}\right|_{x=2} = \dfrac{1}{3^2}, \quad f''(2) = \left.\dfrac{1 \cdot 2}{(5-x)^3}\right|_{x=2} = \dfrac{1 \cdot 2}{3^3}, \ldots, \\ f^{(n)}(2) = \left.\dfrac{n!}{(5-x)^{n+1}}\right|_{x=2} = \dfrac{n!}{3^{n+1}}, \ldots \end{array}\right\} \qquad (3)$$

La série cherchée est

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}(x-2) + \frac{1}{3^3}(x-2)^2 + \ldots + \frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n + \ldots \qquad (4)$$

Exemple 2. Représenter la même fonction par la série de Taylor des puissances de x.

Solution. Nous trouvons comme dans l'exemple 1:

$$f(0) = \frac{1}{5}, \quad f'(0) = \frac{1}{5^2}, \quad f''(0) = \frac{2!}{5^3}, \ldots, \quad f^{(n)}(0) = \frac{n!}{5^{n+1}}, \ldots \qquad (5)$$

La série cherchée s'écrit

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} x + \frac{1}{5^3} x^2 + \ldots + \frac{1}{5^{n+1}} x^n + \ldots \qquad (6)$$

Exemple 3. La fonction $\dfrac{1}{x - 5}$ ne peut être représentée par une série de Taylor des puissances de $(x - 5)$, car la fonction n'est pas définie au point $x = 5$ (elle devient infinie).

Exemple 4. La fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ne peut être représentée par une série de Taylor des puissances de x, car la dérivée $f'(0)$ est infinie. Toutefois, elle le peut par une série de Taylor des puissances de $(x-1)$ qui s'écrit

$$1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{2!}\frac{2}{3^2}(x-1)^2 + \frac{1}{3!}\frac{2 \cdot 5}{3^3}(x-1)^3 + \frac{1}{4!}\frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{3^4}(x-1)^4 + \ldots$$

§ 400. Développement d'une fonction en série entière

Développer la fonction $f(x)$ en série entière des puissances de $(x - x_0)$ revient à former une série de la forme

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (1)$$

dont le rayon de convergence ne soit pas nul et dont la somme soit identiquement égale à la fonction donnée en tout point intérieur à l'intervalle de convergence.

THÉORÈME. Si la fonction $f(x)$ est développable en série entière (1), ce développement est unique et la série (1) coïncide avec la série de Taylor des puissances de $(x - x_0)$.

EXPLICATION. Par hypothèse nous avons dans l'intervalle de convergence identiquement:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots \qquad (2)$$

Cela signifie (§ 398, théorème 1) que la fonction $f(x)$ possède des dérivées de tout ordre et qu'en tous les points de l'intervalle de convergence nous avons:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \ldots, \\ f''(x) &= 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4a_4(x - x_0)^2 + \ldots, \\ f'''(x) &= 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4(x - x_0) + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

etc. Pour $x = x_0$ les formules (2) et (3) donnent:

$$a_0 = f(x_0), \qquad a_1 = f'(x_0), \qquad a_2 = \frac{f''(x_0)}{3!} \qquad a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3!}, \ \ldots, \qquad (4)$$

autrement dit, le développement (2) est unique et coïncide avec la série de Taylor pour la fonction $f(x)$.

EXEMPLE 1. Trouver la valeur de la dérivée cinquième de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$ pour $x = 0$.

La calcul direct est laborieux. Toutefois, on peut aisément développer la fonction $f(x)$ en série entière en x, en effectuant la division $x : (1 - x^2)$ (§ 397). Nous obtenons le développement

$$\frac{x}{1 - x^2} = x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots \qquad (5)$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$. Or la série (5) est la série de Taylor, des puissances de x, de la fonction $f(x)$. Par conséquent, le coefficient $a_5 = 1$ donne la valeur $\dfrac{f^{\mathrm{v}}(0)}{5!}$, c'est-à-dire $f^{\mathrm{v}}(0) = 5! = 120$. Nous trouvons de même:

$$f^{(2n+1)}(0) = (2n + 1)!, \quad f^{(2n)}(0) = 0. \qquad (6)$$

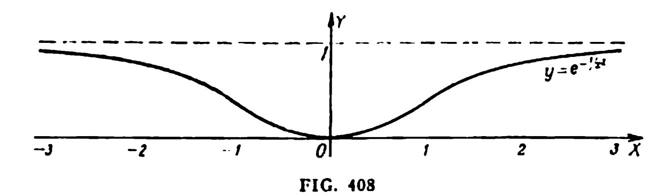


FIG. 408

DÉFINITION. La fonction $f(x)$ développable en série des puissances de $x - x_0$ est appelée *analytique au point* x_0.

EXEMPLE 2. La fonction $\sqrt[3]{x}$ n'est pas analytique au point $x = 0$ (§ 399, exemple 4) ; cette même fonction est analytique au point $x = 1$ (et en tout point $x_0 \neq 0$).

REMARQUE. Une fonction $f(x)$ définie au point $x = x_0$ peut ne pas être analytique en ce point pour l'une des trois raisons suivantes:

1) Elle peut ne pas avoir pour $x = x_0$ de dérivée finie d'un ordre quelconque; ainsi la fonction $\sqrt[3]{x}$ n'est pas analytique au point $x = 0$, car en ce point la dérivée première est infinie.

2) La série de Taylor de la fonction $f(x)$ de rayon de convergence non nul peut avoir une somme non égale à $f(x)$.

3) Le rayon de convergence de la série de Taylor de la fonction $f(x)$ peut être nul.

Seul le premier type a une importance pratique. Dans l'exemple 3 nous considérons une fonction du second type.

Les exemples connus de fonctions du troisième type sont trop compliqués pour être exposés ici.

EXEMPLE 3. Déterminons la fonction $\varphi(x)$ (fig. 408) par la formule $\varphi(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ (pour $x \neq 0$). Pour $x = 0$ nous posons $\varphi(0) = 0$. Toutes les dérivées de cette fonction sont nulles au point $x = 0$ (*). Cela signifie que toutes les dérivées $f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n)}(0)$

(*) Pour $x \neq 0$ nous avons

$$\varphi'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Pour $x = 0$ cette expression n'est pas valable; ici

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} = 0$$

d'après la règle de L'Hospital). Nous avons ensuite

$$\varphi''(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi'(h) - \varphi'(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{h^4} e^{-\frac{1}{h^2}} = 0, \text{ etc. ...}$$

de la fonction $f(x) = e^x + \varphi(x)$ ont les mêmes valeurs que les dérivées correspondantes de e^x, autrement dit la série de Taylor de la fonction $f(x)$ est:

$$1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Cette série possède un rayon de convergence non nul ($R = \infty$), mais sa somme e^x n'est pas égale à $f(x)$.

§ 401. Développement en séries entières des fonctions les plus usuelles

REMARQUES PRÉLIMINAIRES. Pour développer la fonction $f(x)$ en série des puissances de $(x - x_0)$ on peut trouver les dérivées successives $f'(x_0), f''(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0), \dots$ Si elles existent et sont finies, nous obtenons la série de Taylor

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

En vertu de ce que nous avons dit au § 400 il faut encore démontrer que cette série possède un rayon de convergence non nul, et que sa somme est précisément $f(x)$ et non une autre fonction. On parvient parfois à évaluer le reste $R_n = f(x) - s_n(x)$ et à démontrer que $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. A cette fin on présente ce reste sous forme de Lagrange (§ 272, exemples 1 et 2) ou sous une autre forme.

Dans la majorité des cas une telle évaluation est difficile ou irréalisable. On peut alors obtenir le développement par d'autres méthodes sans calculer les dérivées de $f(x)$ au point x_0 (celles-ci s'obtiennent automatiquement du développement trouvé, comme dans l'exemple 1 du § 400).

Nous donnons plus bas les développements en séries entières en x des fonctions les plus usuelles. Nous omettons le terme général si son expression peut être aisément devinée.

Fonctions exponentielles

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (R = \infty), \tag{1}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad (R = \infty). \tag{1a}$$

Les deux développements peuvent être obtenus en évaluant le reste (§ 272, exemple 1). La formule (1a) se déduit de (1) en remplaçant x par $-x$.

Fonctions trigonométriques

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (R = \infty), \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (R = \infty). \tag{3}$$

On peut obtenir ces deux développements en évaluant le reste (§ *272*, exemple 2). L'un se déduit de l'autre par dérivation (ou intégration) terme à terme.

Nous obtenons par division terme à terme de (2) par (3):

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots \left(R = \frac{\pi}{2}\right). \tag{4}$$

La loi d'obtention des coefficients ne s'exprime pas à l'aide d'une formule élémentaire de sorte qu'il est difficile de trouver le rayon de convergence à l'aide du théorème du § 394. Il est toutefois clair que R n'est pas supérieur à $\frac{\pi}{2}$; en effet, pour $x = \pm\frac{\pi}{2}$ la série (4) diverge puisque $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \infty$.

Remarque. Le rayon de convergence de la série (4) s'avère plus petit que chacun des rayons de convergence des séries (2), (3) dont on déduit la série (4) par division terme à terme. Cf. § 397, exemple 4.

La fonction $\operatorname{cotg} x$ ne se développe pas suivant les puissances de x (car $\operatorname{cotg} 0 = \infty$).

Fonctions hyperboliques (*)

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \qquad (R = \infty) \tag{2a}$$

(*sinus hyperbolique de* x; notation: $\operatorname{sh} x$),

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad (R = \infty) \tag{3a}$$

(*cosinus hyperbolique de* x; notation: $\operatorname{ch} x$),

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 - \dots \left(R = \frac{\pi}{2}\right) \tag{4a}$$

(*tangente hyperbolique de* x; notation: $\operatorname{th} x$).

Les développements (2a) et (3a) s'obtiennent par soustraction et addition de (1) et (1a), le développement (4a) par division terme à terme de (2a) par (3a). Cf. remarque de la formule (4).

(*) Sur les fonctions hyperboliques cf. § 403.

Les développements des fonctions hyperboliques et ceux des fonctions trigonométriques ne se distinguent que par les signes.

Fonctions logarithmiques

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (R = 1), \qquad (5)$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (R = 1). \qquad (6)$$

Les formules (5), (6) s'obtiennent par intégration terme à terme des développements $\frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \dots$. Nous trouvons par soustraction terme à terme:

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots\right] \quad (R = 1). \qquad (7)$$

A l'aide de la série (7) il est commode de calculer les logarithmes des nombres naturels. Par exemple, pour $x = \frac{1}{3}$ nous obtenons une série rapidement convergente pour ln 2.

Série du binôme

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots \quad (R = 1). \qquad (8)$$

Pour un m entier positif la série s'arrête au terme à la puissance m (les coefficients suivants sont nuls). La formule obtenue est appelée *binôme de Newton* (*). Le développement (8) est valable pour n'importe quel m réel.

Pour $-\frac{1}{2} < x < 1$ on peut se servir dans la démonstration du reste sous forme de Lagrange. On peut démontrer par d'autres moyens(**) la validité de la formule (8) pour tout l'intervalle $(-1, 1)$.

(*) Il serait plus juste de rattacher cette appellation à la formule générale (8) (cf. § 270, 1).

(**) Pour la fonction $f(x) = (1+x)^m$ on a identiquement: $mf(x) = (1+x)f'(x)$. La vérification immédiate (dérivation et multiplication terme à terme) montre que pour la somme $S(x)$ de la série (8) la même relation $mS(x) = (1+x)S'(x)$ est valable. Par conséquent, $\frac{S(x)}{S'(x)} = \frac{f(x)}{f'(x)}$, autrement dit $[\ln f(x)]' = [\ln S(x)]'$. Comme les fonctions $\ln S(x)$ et $\ln f(x)$ ont des dérivées identiques et des valeurs égales pour $x = 0$, elles sont égales. Cela signifie que $S(x) = f(x)$. C.Q.F.D.

Des cas particuliers de (8) sont les développements suivants:

$$(1+x)^{-1}=\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots, \tag{9}$$

$$(1+x)^{-2}=\frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\ldots, \tag{10}$$

$$(1+x)^{-3}=\frac{1}{(1+x)^3}=1-\frac{2\cdot 3}{2}x+\frac{3\cdot 4}{2}x^2-\frac{4\cdot 5}{2}x^3+\ldots, \tag{11}$$

$$(1+x^2)^{-1}=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+x^8-\ldots, \tag{12}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+\ldots, \tag{13}$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\ldots, \tag{14}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^8+\ldots \tag{15}$$

Fonction trigonométriques inverses

$$\text{arc sin } x=x+\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (R=1), \tag{16}$$

$$\text{arc tg } x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots \qquad (R=1). \tag{17}$$

Les développements (16) et (17) se déduisent respectivement de (15) et (12) par intégration terme à terme de zéro à x.

Les développements

$$\text{arc cos } x=\frac{\pi}{2}-\text{arc sin } x \text{ et arc cotg } x=\frac{\pi}{2}-\text{arc tg } x$$

s'obtiennent de (16) et (17).

Fonctions hyperboliques inverses(*)

$$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{x^5}{5}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (R=1) \tag{16a}$$

(*argument* sh x; notation: Arg sh x) (**).

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}+\ldots \qquad (R=1) \tag{17a}$$

(*argument* th x; notation: Arg th x).

(*) Au sujet des fonctions hyperboliques inverses cf. § 404.

(**) La notation Arg correspond à la détermination principale de la fonction au lieu de arg qui désigne la fonction inverse en général (*N.D.T.*).

Les fonctions

$$\ln (x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \operatorname{Arg ch} x$$

(argument ch x) et

$$\frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} = \operatorname{Arg coth} x$$

(argument coth x) ne se développent pas en série suivant les puissances de x [elles ne sont définies en aucun point de l'intervalle $(-1, 1)$ et, en particulier, au point $x = 0$].

Les développements (16a) et (17a) ne se distinguent des développements (16) et (17) que par les signes.

§ 402. Application des séries au calcul des intégrales [*]

De nombreuses intégrales qui ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires sous forme finie peuvent être représentées par des séries rapidement convergentes. Il est également intéressant de développer en série des intégrales qui peuvent être représentées par des expressions finies (si ces dernières sont compliquées). En effet, même en utilisant les expressions exactes on commet des erreurs puisque les valeurs de celles-là sont généralement trouvées à l'aide de tables.

Exemple 1. L'intégrale $\int\limits_0^x e^{-x^2}\, dx$ ne peut être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions élémentaires. En utilisant la série

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \tag{1}$$

convergente dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ nous obtenons

$$\int\limits_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{1}{1!}\,\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\,\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \tag{2}$$

L'intervalle de convergence est également $(-\infty, +\infty)$ (§ 398).

---

[*] Cf. § 270.

EXEMPLE 2. Calculer $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ à $0{,}5\cdot 10^{-4}$ près.

SOLUTION. Portant dans (2) la valeur $x = 1$, nous obtenons:

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \dots \qquad (3)$$

Nous rejetons le terme $-\frac{1}{75600}$ et les termes suivants, car l'erreur commise est alors bien inférieure à $0{,}5\cdot 10^{-4}$ [la série (3) est alternée de termes décroissants; § 376]. Nous effectuons les calculs avec cinq ou six chiffres significatifs et obtenons

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0{,}7468.$$

EXEMPLE 3. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$ à $0{,}5\cdot 10^{-3}$ près.

SOLUTION. L'intégrale indéfinie $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$ ne s'exprime pas sous forme finie. Développant $\sin x$ en série et divisant terme à terme par x, nous obtenons la série

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots, \qquad (4)$$

qui est convergente pour toute valeur de x (en vertu du théorème du § 394). Nous avons alors en intégrant:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = x - \frac{x^3}{3\cdot 3!} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} - \frac{x^7}{7\cdot 7!} + \dots,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \frac{1}{600}\left(\frac{\pi}{2}\right)^5 - \frac{1}{35280}\left(\frac{\pi}{2}\right)^7 + \dots \qquad (5)$$

Le premier terme rejeté $\frac{1}{9 \cdot 9!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^9$ (par un calcul grossier) est bien inférieur à $0{,}5 \cdot 10^{-3}$. Nous trouvons ensuite:

$$\begin{array}{rr} & \frac{\pi}{2} = 1{,}5708 \\ + & \frac{1}{600} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 = 0{,}0159 \\ \hline & 1{,}5867 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 = 0{,}2153 \\ + & \frac{1}{35\,280} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^7 = 0{,}0007 \\ \hline & 0{,}2160 \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx = 1{,}5867 - 0{,}2160 \approx 1{,}371.$$

§ 403. Fonctions hyperboliques

Les séries entières

$$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots \qquad (R = \infty), \tag{1}$$

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots \qquad (R = \infty), \tag{2}$$

semblables aux développements de $\sin x$, $\cos x$ ont des sommes respectivement égales à $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Ces fonctions sont appelées *sinus hyperbolique* (*) *de x* ($\operatorname{sh} x$) et *cosinus hyperbolique de x* ($\operatorname{ch} x$):

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{4}$$

On appelle *tangente hyperbolique de x* ($\operatorname{th} x$) et *cotangente hyperbolique de x* ($\operatorname{coth} x$) les fonctions

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \tag{5}$$

$$\operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \tag{6}$$

(*) La notation sh est le sigle de *sinus hyperbolicus* et ch celui de *cosinus hyperbolicus*

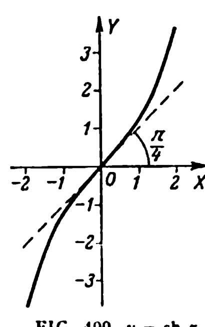


FIG. 409. $y = \text{sh}\ x$

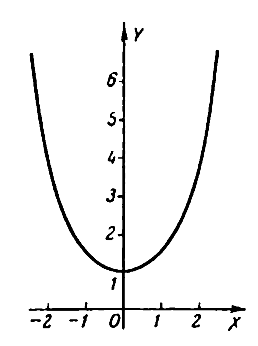


FIG. 410. $y = \text{ch}\ x$

Les fonctions sh x, ch x, th x, coth x sont appelées *fonctions hyperboliques* (*). Les graphes de ces fonctions sont donnés sur les fig. 409-412.

Les fonctions hyperboliques ont une valeur déterminée pour toute valeur de x (excepté coth x pour $x = 0$, où cette fonction est infinie).

La fonction sh x prend toutes les valeurs possibles, ch x uniquement les valeurs non inférieures à l'unité (ch $0 = 1$), les valeurs de th x sont comprises entre -1 et $+1$, celles de coth x sont supérieures à 1 pour $x > 0$ et inférieures à -1 pour $x < 0$. Les droites $y = +1$ et $y = -1$ sont les asymptotes des deux courbes $y = \text{th}\ x$, $y = \text{coth}\ x$.

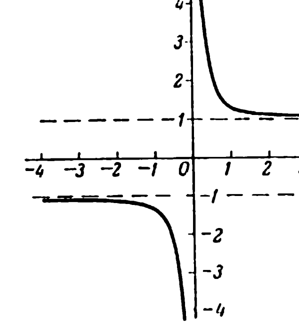


FIG. 412. $y = \text{coth}\ x$

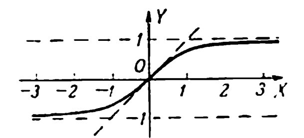


FIG. 411. $y = \text{th}\ x$

(*) Cf. § 405 pour les rapports avec l'hyperbole.

Les fonctions hyperboliques sont liées par les relations

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \tag{7}$$

$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{coth} x = 1, \tag{8}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{coth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \tag{9}$$

et d'autres semblables à celles qui relient les fonctions trigonométriques. Nous avons ainsi

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \tag{10}$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \tag{11}$$

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}. \tag{12}$$

Toutes ces relations découlent des formules (3)-(6).

En général, à chaque formule trigonométrique ne contenant pas de grandeurs constantes sous les signes des fonctions trigonométriques (*) correspond une relation analogue entre les fonctions hyperboliques. Cette dernière s'obtient si on remplace partout $\cos \alpha$ par $\operatorname{ch} \alpha$ et $\sin \alpha$ par $i \operatorname{sh} \alpha$ (i désigne ici l'unité imaginaire); les valeurs imaginaires s'élimineront d'elles-mêmes.

Exemple 1. Nous obtenons de la formule trigonométrique

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

à l'aide de la substitution mentionnée:

$$i \operatorname{sh}(x + y) = i \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \, i \operatorname{sh} y.$$

Divisant par i les deux membres de l'égalité nous obtenons (10).

Exemple 2. Nous obtenons de la formule

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

la formule

$$\operatorname{ch}^2 x + i^2 \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Posant $i^2 = -1$, nous obtenons (7).

(*) Cette restriction est importante. On ne peut, par exemple, transformer par le procédé indiqué la formule $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$.

FORMULES DE DÉRIVATION ET D'INTÉGRATION

$$d \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \, dx, \qquad \int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C; \tag{13}$$

$$d \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \, dx, \qquad \int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C; \tag{14}$$

$$d \operatorname{th} x = \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C; \tag{15}$$

$$d \operatorname{coth} x = -\frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x}, \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{coth} x + C. \tag{16}$$

Ces formules s'obtiennent des formules correspondantes pour les fonctions trigonométriques, si l'on effectue la substitution susmentionnée et si l'on remplace dx par $i\,dx$.

§ 404. Fonctions hyperboliques inverses

On définit pour les fonctions hyperboliques sh x, ch x, th x, coth x les fonctions inverses Arg sh x (argument sh x; fig. 413), Arg ch x (argument ch x; fig. 414), Arg th x (argument th x; fig. 415), Arg coth x (argument coth x; fig. 416). Cf. les graphes des fonctions hyperboliques sur les fig. 409-412.

La fonction Arg sh x est définie de façon unique sur toute la droite numérique. La fonction Arg ch x n'est définie que sur le segment $(1, \infty)$ et elle est à deux déterminations (ses valeurs sont égales en module et diffèrent par le signe). On ne considère habituellement que les valeurs positives qui correspondent à la détermination principale de la fonction (la branche principale) représentée sur la fig. 414 par une ligne continue. Dans cette condition la fonction Arg ch x est univoque.

Les fonctions Arg th x et Arg coth x sont univoques; la première est définie uniquement dans l'intervalle ouvert $(-1, 1)$, la seconde

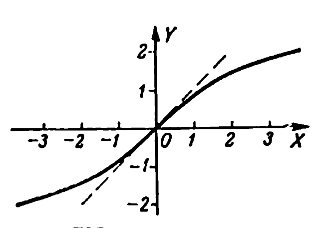


FIG. 413. $y =$ Arg sh x

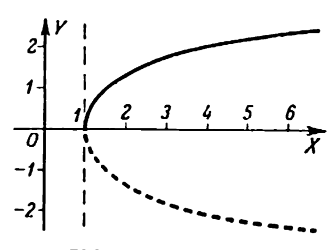


FIG. 414. $y =$ Arg ch x

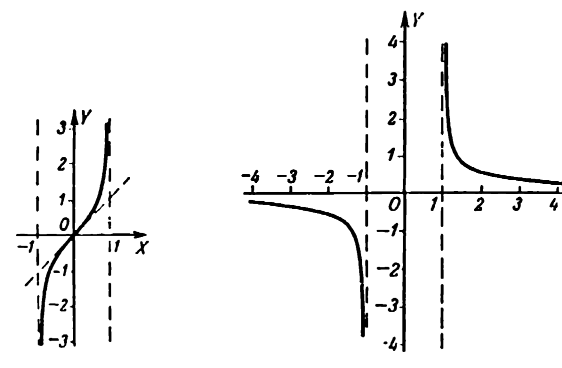


FIG. 415. $y = \text{Arg th}\, x$ FIG. 416. $y = \text{Arg coth}\, x$

uniquement en dehors de cet intervalle. Les droites $x = \pm 1$ sont asymptotes aux deux courbes $y = \text{Arg th}\, x$ et $y = \text{Arg coth}\, x$.

Les fonctions hyperboliques inverses s'expriment à l'aide des fonctions élémentaires de la manière suivante:

$$\text{Arg sh}\, x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), \tag{1}$$

$$\text{Arg ch}\, x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad (x \geqslant 1), \tag{2}$$

les signes supérieurs dans la formule (2) correspondent à la détermination principale Arg ch x;

$$\text{Arg th}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x} \quad (|x| < 1), \tag{3}$$

$$\text{Arg coth}\, x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1} \quad (|x| > 1). \tag{4}$$

Formules de dérivation et d'intégration

$$d\, \text{Arg sh}\, x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; \tag{5}$$

$$d\, \text{Arg ch}\, x = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x > 1); \tag{6}$$

$$d\, \text{Arg th}\, x = \frac{dx}{1 - x^2} \quad (|x| < 1); \tag{7}$$

$$d\,\mathrm{Arg\,coth}\,x = \frac{dx}{1-x^2}\quad (|x| > 1); \tag{8}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \mathrm{Arg\,sh}\,\frac{x}{a} + C; \tag{5a}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \mathrm{Arg\,ch}\,\frac{x}{a} + C\ (x > a); \tag{6a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arg\,th}\,\frac{x}{a} + C\ (|x| < a); \tag{7a}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arg\,coth}\,\frac{x}{a} + C\ (|x| > a). \tag{8a}$$

§ 405. Définition géométrique des fonctions hyperboliques

Considérons l'hyperbole équilatère (fig. 417)

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

Soit s le double de l'aire du secteur hyperbolique AOM balayé par le rayon vecteur d'un point mobile sur l'hyperbole quand ce point va du sommet A à un point quelconque M; cette aire est comptée positivement si le rayon vecteur tourne dans le sens positif, négativement dans le cas contraire. Les rapports des segments orientés PM, OP, AK (construits

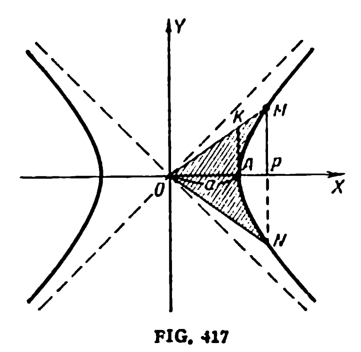


FIG. 417

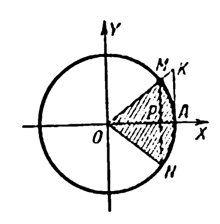


FIG. 418

pour le point M de l'hyperbole de façon analogue aux lignes trigonométriques; cf. fig. 418) au demi-axe a s'expriment en fonction de s de la manière suivante(*):

$$\frac{PM}{a} = \operatorname{sh} \frac{s}{a^2}, \qquad \frac{OP}{a} = \operatorname{ch} \frac{s}{a^2}, \qquad \frac{AK}{a} = \operatorname{th} \frac{s}{a^2}. \tag{2}$$

Prenons maintenant au lieu de l'hyperbole (1) le cercle (fig. 418)

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Si l'on conserve les notations précédentes, la grandeur $\frac{s}{a^2}$ prise avec le signe adéquat (s désigne l'aire du secteur circulaire $MONA$) donne l'angle $\alpha = \widehat{AOM}$ de sorte qu'au lieu de (2) on peut écrire:

$$\frac{PM}{a} = \sin \frac{s}{a^2}, \qquad \frac{OP}{a} = \cos \frac{s}{a^2}, \qquad \frac{AK}{a} = \operatorname{tg} \frac{s}{a^2}. \tag{2a}$$

Les formules (2) et (2a) mettent en évidence l'analogie profonde entre les fonctions circulaires (trigonométriques) et les fonctions hyperboliques.

§ 406. Nombres complexes

Les nombres complexes ont acquis droit de cité en mathématiques parce que facilitant la recherche de nombreuses relations entre des grandeurs réelles.

Exemple 1. En multipliant successivement le nombre complexe $\cos\varphi + i\sin\varphi$ par lui-même, nous obtenons la *formule de Moivre*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = (\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

pour un n entier positif (**). Appliquons au premier membre la formule du binôme et égalons les coordonnées correspondantes des deux membres (pour deux nombres com-

---

(*) Nous avons (§ 333, exemple 4):

$$s = 2 \text{ aire } AOM = a^2 \ln \frac{x+y}{a}.$$

Résolvant cette équation simultanément avec (1), nous trouvons:

$$\frac{x}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} + e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{ch} \frac{s}{a^2}, \qquad \frac{y}{a} = \frac{e^{\frac{s}{a^2}} - e^{-\frac{s}{a^2}}}{2} = \operatorname{sh} \frac{s}{a^2}.$$

Nous avons de la similitude des triangles OAK et OPM:

$$\frac{AK}{a} = \frac{PM}{OP} = \frac{y}{x} = \operatorname{th} \frac{s}{a^2}.$$

(**) On peut définir la puissance négative d'un nombre complexe de même que pour un nombre réel, et alors la formule (1) s'étend aux exposants négatifs. Pour les exposants fractionnaires et irrationnels on peut adopter la formule (1) en tant que définition. Le résultat sera multiforme (du fait que l'angle φ est défini de façon multiforme: $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, où k est un nombre entier). Les règles des opérations avec les puissances restent les mêmes que lors d'une base réelle.

plexes égaux les abscisses et les ordonnées sont respectivement égales). Nous obtenons $\cos n\varphi$ et $\sin n\varphi$ en fonction des puissances de $\cos\varphi$ et de $\sin\varphi$. Par exemple, pour $n = 4$ nous avons:

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi, \quad (2)$$

$$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi. \quad (3)$$

Nous n'avons ici que des grandeurs réelles.

Exemple 2. Utilisant la formule de la somme d'une progression géométrique, nous trouvons:

$$1 + (\cos\varphi + i\sin\varphi) + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + \ldots + (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \frac{1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)^{n+1}}{1 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)}. \quad (4)$$

Appliquons aux deux membres de la formule (4) la formule (1) et effectuons la division dans le second membre. Nous obtenons deux formules:

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{(2n+1)\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}, \quad (5)$$

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\frac{(2n+1)\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}. \quad (6)$$

Introduisant des *variables complexes* et définissant pour elles les notions de fonction, de limite, de dérivée, etc., nous trouvons de nombreuses relations nouvelles entre les variables réelles.

Aux §§ 407-410 nous nous écartons du plan général du livre et considérons les fonctions complexes d'une variable réelle; nous ne nous arrêtons pas du tout sur les fonctions d'une variable complexe.

§ 407. Fonction complexe d'une variable réelle

Le nombre complexe

$$z = x + iy \quad (1)$$

(x et y sont réels) est appelé *fonction complexe de la variable réelle t* si à chacune des valeurs de t (dans le domaine considéré) correspond une valeur déterminée de z (c'est-à-dire une valeur déterminée de x et une valeur déterminée de y).

Chacune des coordonnées x, y est alors une fonction réelle de la variable t.

La relation

$$z = f(t) + i\varphi(t) \quad (2)$$

est équivalente aux deux relations suivantes

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t). \quad (3)$$

Si l'on représente le nombre complexe $x + iy$ par le point (x, y) du plan XOY, la fonction z sera représentée par un ensemble de points discrets ou remplissant une courbe [cette courbe est définie paramétriquement par les équations (3)].

Les notions de limite et d'infiniment petit sont définies pour les nombres complexes de la même manière que pour les nombres réels (on prend comme valeur absolue du nombre complexe $x + iy$ son module $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$). Les points représentant les valeurs de la fonction se rapprochent indéfiniment du point représentant la limite quand la variable t tend vers la valeur donnée (ou vers l'infini). Pour trouver la limite c de la fonction complexe z, il suffit de trouver les limites a et b de ses coordonnées x, y. Nous avons alors $c = a + bi$.

Exemple 1. La suite

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_3 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}i, \ldots, \quad z_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}i, \ldots \tag{4}$$

est représentée (fig. 419) par l'ensemble des points discrets (x_n, y_n):

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{n-1}{n}. \tag{5}$$

Ils sont situés sur la droite $x + y = 1$. Nous avons:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = 1, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = 0 + 1i = i. \tag{7}$$

La relation (7) signifie que le module $|z_n - i|$ de la différence $z_n - i$ diminue indéfiniment quand $n \to \infty$.

Géométriquement, les points z_n se rapprochent indéfiniment du point $C(0, 1)$.

Exemple 2. La fonction complexe

$$z = e^{-0,1t} (\cos t + i \sin t) \tag{8}$$

de la variable t est représentée (fig. 420) par la courbe

$$x = e^{-0,1t} \cos t, \quad y = e^{-0,1t} \sin t \tag{9}$$

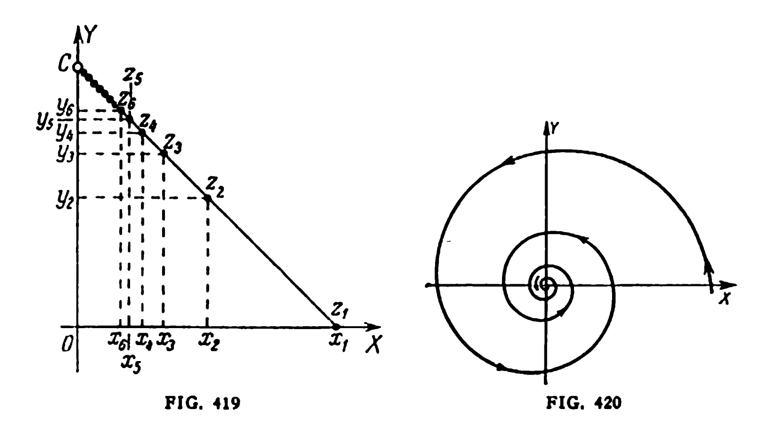


FIG. 419 FIG. 420

(*spirale logarithmique*). Nous avons:

$$\lim_{t\to\infty} x = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y = 0;$$

$$\lim_{t\to\infty} z = \lim_{t\to\infty} (x + iy) = 0.$$

Quand $t \to \infty$, le point variable du plan complexe qui se déplace le long de la spirale dans le sens de la flèche se rapproche indéfiniment du point O représentant la limite de la fonction.

§ 408. Dérivée d'une fonction complexe

DÉFINITION. On appelle dérivée de la fonction complexe

$$F(t) = f(t) + i\varphi(t) \tag{1}$$

de la variable réelle t et on la note $F'(t)$ la limite du rapport $\frac{\Delta F(t)}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$.

Les coordonnées de la dérivée sont les dérivées des coordonnées $f(t)$, $\varphi(t)$ de la fonction donnée:

$$F'(t) = f'(t) + i\varphi'(t). \tag{2}$$

Le vecteur représentant $F'(t)$ est le vecteur de la tangente au point correspondant du graphe

$$x = f(t), \quad y = \varphi(t). \tag{3}$$

Si t est le temps, le module de la dérivée est égal à la valeur absolue de la vitesse du point se déplaçant le long du graphe (3).

La différentielle d'une fonction complexe est définie de la même façon que pour une fonction réelle et possède les mêmes propriétés.

Si la fonction complexe $F(t)$ est représentée par le polynôme

$$F(t) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n, \tag{4}$$

où z est une fonction complexe de la variable réelle t, alors

$$F'(t) = (a_1 + 2a_2z + \ldots + na_nz^{n-1})\, z'(t). \tag{5}$$

Les formules de la dérivée du produit et du quotient sont les mêmes que pour les fonctions réelles.

EXEMPLE 1. La dérivée de la fonction

$$F(t) = a\left(\cos 2\pi\frac{t}{T} + i\sin 2\pi\frac{t}{T}\right) \tag{6}$$

est égale à

$$F'(t) = \frac{2\pi a}{T}\left(-\sin 2\pi\frac{t}{T} + i\cos 2\pi\frac{t}{T}\right). \tag{7}$$

La fonction (6) est représentée par l'ensemble des points de la circonférence (fig. 421) de rayon a:

$$x = a\cos 2\pi\frac{t}{T}, \quad y = a\sin 2\pi\frac{t}{T}. \tag{8}$$

La dérivée (7) est représentée par le vecteur de la tangente MK de coordonnées

$$x' = -\frac{2\pi a}{T}\sin 2\pi\frac{t}{T}, \quad y' = \frac{2\pi a}{T}\cos 2\pi\frac{t}{T}. \quad (9)$$

Le module de la dérivée (exprimant la vitesse si t est le temps) est

$$|F'(t)| = \sqrt{x'^2 + y'^2} = \frac{2\pi a}{T}. \quad (10)$$

Par conséquent, la vitesse du mouvement du point sur la circonférence est une constante, de sorte que $|F'(t)|$ est l'arc de circonférence parcouru par unité de temps. Cela signifie que T est la période d'un tour complet du cercle.

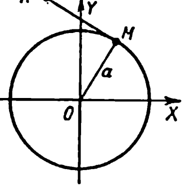


FIG. 421

Il découle de (6) et (7) que

$$F'(t) = F(t)\frac{2\pi}{T}i. \quad (11)$$

Géométriquement, le vecteur MK s'obtient du vecteur OM par une extension (une contraction) de $\frac{2\pi}{T}$ fois et une rotation de 90° (la multiplication par i est équivalente à une rotation de 90°).

EXEMPLE 2. La dérivée de la fonction

$$F(t) = (x + iy)^2, \quad (12)$$

où x et y sont des fonctions de t, est

$$F'(t) = 2(x + iy)(x' + iy') = 2(xx' - yy') + 2i(xy' + yx'). \quad (13)$$

Nous obtenons le même résultat en mettant préalablement (12) sous la forme

$$F(t) = (x^2 - y^2) + 2xyi. \quad (14)$$

§ 409. Elévation d'un nombre positif à une puissance complexe

La série

$$1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

converge partout pour toutes les valeurs *réelles* de u et sa somme est e^u.

Pour toute valeur *complexe* de u, la série (1) converge également, autrement dit, ses sommes partielles s_n (qui sont maintenant des nombres complexes) tendent vers une limite finie (qui est également un nombre complexe).

Cela permet de donner la définition suivante de cette nouvelle opération qui est l'élévation d'un nombre positif à une puissance complexe(*).

Définition. Elever le nombre e (la base des logarithmes népériens) à la puissance complexe $u = x + iy$ signifie prendre la somme de la série (1). Comme puissance complexe u de tout autre nombre positif a on prend la quantité $e^{u \ln a}$ (pour une valeur réelle de u elle est identiquement égale à a^u).

Remarque. Toutes les règles des opérations sur les puissances peuvent être étendues aux puissances complexes des nombres positifs. Toutefois, ces règles doivent être démontrées.

Exemple 1. Elever e à la puissance πi.

Solution. Nous avons par définition

$$e^{\pi i} = 1 + \frac{\pi i}{1!} + \frac{\pi^2 i^2}{2!} + \frac{\pi^3 i^3}{3!} + \frac{\pi^4 i^4}{4!} + \frac{\pi^5 i^5}{5!} + \ldots =$$

$$= 1 + \frac{\pi i}{1!} - \frac{\pi^2}{2!} - \frac{\pi^3 i}{3!} + \frac{\pi^4}{4!} + \frac{\pi^5 i}{5!} - \frac{\pi^6}{6!} - \frac{\pi^7 i}{7!} + \ldots$$

L'abscisse de la somme est

$$1 - \frac{\pi^2}{2!} + \frac{\pi^4}{4!} - \frac{\pi^6}{6!} + \ldots = \cos \pi = -1$$

(cf. § 272). L'ordonnée de la somme est

$$\frac{\pi}{1!} - \frac{\pi^3}{3!} + \frac{\pi^5}{5!} - \frac{\pi^7}{7!} + \ldots = \sin \pi = 0.$$

Cela signifie que

$$e^{\pi i} = -1.$$

Nous avons obtenu dans ce cas un nombre réel.

Exemple 2. Calculer 10^i.

Solution. Nous avons par définition

$$10^i = e^{i \ln 10} = e^{\frac{1}{M} i},$$

où $\frac{1}{M} \approx 2{,}3026$ (cf. § 242);

$$10^i = 1 + \frac{1}{1!M} i - \frac{1}{2!M^2} - \frac{1}{3!M^3} i + \frac{1}{4!M^4} + \frac{1}{5!M^5} i - \frac{1}{6!M^6} -$$

$$- \frac{1}{7!M^7} i + \ldots = \left(1 - \frac{1}{2!M^2} + \frac{1}{4!M^4} - \frac{1}{6!M^6} + \ldots\right) +$$

$$+ i \left(\frac{1}{1!M} - \frac{1}{3!M^3} + \frac{1}{5!M^5} - \frac{1}{7!M^7} + \ldots\right) = \cos \frac{1}{M} + i \sin \frac{1}{M} \approx$$

$$\approx \cos 2{,}3026 + i \sin 2{,}3026 \approx \cos 131^\circ 56' + i \sin 131^\circ 56' =$$

$$= -0{,}6680 + i \cdot 0{,}7440.$$

(*) Au sujet de l'élévation d'un nombre complexe à une puissance réelle cf. § 406 (renvoi(**), page 599). On peut également définir l'élévation d'un nombre complexe à une puissance complexe, mais cela est plus compliqué.

EXEMPLE 3. Calculer 10^{2+i}.
SOLUTION. Nous avons (cf. exemple 2):

$$10^{2+i} = 10^2 \cdot 10^i \approx -66,80 + 74,40\,i.$$

§ 410. Formule d'Euler

La relation

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (1)$$

est appelée *formule d'Euler*. Elle découle de la définition du § 409 (elle peut être déduite comme dans l'exemple 1 du § 409).

Si l'on *définit* $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ pour φ complexe à l'aide des mêmes séries dont on sait que les sommes donnent $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ pour φ réels, la formule (1) sera valable pour toute valeur complexe de φ.

Nous obtenons de la formule (1):

$$e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi, \qquad (2)$$

et nous trouvons de (1) et (2):

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \qquad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \qquad (3)$$

Ces formules ressemblent fort aux expressions des fonctions hyperboliques

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}, \qquad \operatorname{sh}\varphi = \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{2}.$$

Il découle également de (1) la formule

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad (4)$$

(cf. § 409, remarque).

Si x et y de la formule (4) sont des fonctions de la variable t, la formule (4) peut être dérivée de la même façon que pour i réel constant:

$$e^{x+iy}(x' + iy') = x'e^x(\cos y + i\sin y) + y'e^x(-\sin y + i\cos y). \qquad (5)$$

On vérifie immédiatement la formule (5).

EXEMPLE. Trouver la dérivée de la fonction

$$F(t) = e^{0,1t}(\cos 2t + i\sin 2t).$$

SOLUTION. Représentons $F(t)$ sous la forme

$$F(t) = e^{(0,1+2i)t}.$$

Nous obtenons alors

$$F'(t) = (0,1 + 2i)\,e^{(0,1+2i)\,t} = (0,1 + 2i)\,e^{0,1t}\,(\cos 2t + i\sin 2t) =$$

$$= e^{0,1t}\,[(0,1\cos 2t - 2\sin 2t) + i(0,1\sin 2t + 2\cos 2t)].$$

§ 411. Série trigonométrique

On appelle *série trigonométrique* une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \qquad (1)$$

Ici $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ sont des constantes appelées *coefficients* de la serie.

REMARQUE 1. Le terme constant (on peut l'écrire sous la forme $\frac{a_0}{2} \cos 0x$) est noté $\frac{a_0}{2}$ (et non a_0) pour que les formules des coefficients (cf. § 414) soient uniformes.

REMARQUE 2. Tous les termes de la série (1) sont des fonctions *périodiques* de période 2π. Cela signifie que, quand la variable x reçoit un accroissement multiple de 2π, tous les termes conservent leurs valeurs.

REMARQUE 3. On appelle également *série trigonométrique* une expression plus générale

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots$$

$$\ldots + a_n \cos n\frac{\pi x}{l} + b_n \sin n\frac{\pi x}{l} + \ldots, \qquad (2)$$

où l est une constante positive appelée *demi-période* [tous les termes de la série (2) sont des fonctions périodiques de période $2l$; cf. remarque 2]. La série (1) est un cas particulier de la série (2), quand la demi-période est $l = \pi$.

§ 412. Historique des séries trigonométriques

Les séries trigonométriques ont été introduites en 1753 par Daniel Bernoulli qui étudiait les vibrations d'une corde. La question qui se posa de la possibilité de développer une fonction en série trigonométrique divisa les grands mathématiciens de l'époque (Euler, d'Alembert, Lagrange). Les divergences provenaient du peu de précision de la notion de fonction, et les débats contribuèrent justement à la définir plus exactement.

En 1757, Clairaut établit les formules exprimant les coefficients de la série (1) par la fonction donnée (§ 414). Ces formules ne retinrent pas l'attention et Euler les redécouvrit en 1777 (le travail ne fut publié qu'après sa mort, en 1793). La démonstration rigoureuse des formules fut esquissée par Fourier en 1823. Développant les idées de Fourier, Dirichlet établit et démontra rigoureusement en 1829 les conditions suffisantes pour qu'une fonction soit développable en série trigonométrique (§ 418).

Par la suite d'autres conditions suffisantes furent établies et on étudia des fonctions ne satisfaisant pas aux conditions mentionnées. De nombreux savants russes et soviétiques (Lobatchevski, Krylov, Bernstein, Louzine, Menchov, Bari, Kolmogorov) ont grandement contribué à l'élaboration de la théorie des séries trigonométriques et de leurs applications.

§ 413. Orthogonalité du système de fonctions cos nx, sin nx

DÉFINITION 1. Deux fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont dites *orthogonales dans l'intervalle* (a, b) si l'intégrale du produit $\varphi(x)\,\psi(x)$ prise entre a et b est nulle.

EXEMPLE 1. Les fonctions

$$\varphi(x) = \sin 5x$$

et

$$\psi(x) = \cos 2x$$

sont orthogonales dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, car

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 5x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin 7x + \sin 3x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{14} \cos 7x - \frac{1}{6} \cos 3x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

EXEMPLE 2. Les fonctions

$$\varphi(x) = \sin 4x$$

et

$$\psi(x) = \sin 2x$$

sont orthogonales dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, car

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin 4x \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos 2x - \cos 6x) \, dx = 0.$$

THÉORÈME. Les fonctions appartenant au système de fonctions

$$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots \tag{1}$$

sont orthogonales dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, autrement dit

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx \, dx = 0 \ (m \neq 0), \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx \, dx = 0, \tag{2}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0 \tag{3}$$

$$(m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \tag{4}$$

(m, n sont des nombres naturels arbitraires).

La démonstration est conduite comme dans les exemples 1, 2

REMARQUE 1. Si au lieu de deux fonctions différentes du système (1) on prend deux fonctions identiques, l'intégrale prise entre $-\pi$ et π sera égale à π pour toutes les fonctions (1), sauf la première pour laquelle elle est égale à 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 dx = 2\pi, \tag{5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi \ (n = 1, 2, 3 \ldots). \tag{6}$$

Les formules (6) s'obtiennent à l'aide des transformations

$$\cos^2 nx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2nx), \ \sin^2 nx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2nx).$$

REMARQUE 2. Les formules (2)-(6) restent en vigueur pour tout intervalle d'amplitude 2π. Par exemple,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{1\frac{3}{4}\pi} \sin 4x \sin 2x \, dx = \int_{0}^{2\pi} \sin 4x \sin 2x \, dx = 0,$$

$$\int_{-2\pi}^{0} \cos^2 3x \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 3x \, dx = \pi.$$

DÉFINITION 2. Si les fonctions d'un système quelconque de fonctions sont orthogonales, le système est dit *orthogonal*. En vertu du théorème du présent paragraphe le système (1) est orthogonal dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ (ainsi que dans tout intervalle d'amplitude 2π).

§ 414. Formules d'Euler-Fourier

THÉORÈME. Si la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \quad (1)$$

converge pour toutes les valeurs de x vers une fonction $f(x)$ périodique de période 2π et si pour cette fonction (elle peut être discontinue) l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$ (propre ou impropre) existe, on a alors les *formules d'Euler-Fourier* pour les coefficients de la série (1) (cf. § 411):

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos x \, dx, \qquad b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx,$$

$$a_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos 2x \, dx, \qquad b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin 2x \, dx,$$

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 3x\,dx, \qquad b_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin 3x\,dx,$$

. . . .

et généralement

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx, \tag{2}$$

REMARQUE. L'expression de a_0 s'obtient de la formule générale pour a_n si l'on pose dans cette dernière $n = 0$. Cette unité de forme n'a plus lieu si l'on note a_0 le terme indépendant de x de la série (1) et non le double de sa valeur. Cf. § 411, remarque 1.

EXPLICATION. Nous avons:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots \tag{3}$$

Intégrons cette égalité entre $-\pi$ et π. Supposant que l'on puisse intégrer cette série terme à terme(*) nous obtenons:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx + b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx + \ldots \tag{4}$$

Toutes les intégrales du second membre, excepté la première, sont nulles en vertu de (2) § 413, et nous trouvons:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi a_0, \quad \text{c-à-d.} \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Nous avons obtenu la première formule (2) pour le cas $n = 0$, les autres formules s'obtiennent de la même façon si l'on multiplie au préalable l'égalité (3) par $\cos nx$ ou $\sin nx$.

Ainsi, multipliant (3) par $\cos 2x$ et intégrant terme à terme, nous obtenons:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\,dx + a_1\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\cos 2x\,dx +$$

$$+ b_1\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\cos 2x\,dx + a_2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 2x\,dx + b_2\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2x\cos 2x\,dx + \ldots \tag{5}$$

Dans le second membre toutes les intégrales excepté la quatrième sont nulles en vertu de (2), (3) et (4) § 413. La quatrième est égale à π en vertu de (6) § 413. Nous avons, par conséquent,

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx.$$

(*) Quand l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx$ converge, la série trigonométrique (1) qui converge vers la fonction $f(x)$ peut être intégrée terme à terme.

SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE DE PÉRIODE QUELCONQUE. Supposons que la série trigonométrique de période $2l$:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos \frac{\pi x}{l} + b_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \cos 2\frac{\pi x}{l} +$$
$$+ b_2 \sin 2\frac{\pi x}{l} + \ldots + a_n \cos n\frac{\pi x}{l} + b_n \sin n\frac{\pi x}{l} + \ldots \qquad (6)$$

converge pour toutes les valeurs de x vers une fonction $f(x)$ (cette fonction possède aussi une période $2l$). Si l'intégrale $\int_{-l}^{l} |f(x)|\, dx$ (propre ou impropre) existe, alors pour les coefficients de la série (6) on a les formules d'Euler-Fourier:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \cos n\frac{\pi x}{l}\, dx \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x) \sin n\frac{\pi x}{l}\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Les formules (2) s'obtiennent de (7) quand $l = \pi$.

§ 415. Série de Fourier

Nous avons considéré au § 414 la somme $f(x)$ de la série trigonométrique convergente *donnée*. En pratique le problème inverse suivant est d'une grande importance: étant donnée une fonction $f(x)$ de période 2π [*], trouver une série trigonométrique partout convergente

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \ldots + a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots, \qquad (1)$$

dont la somme soit $f(x)$.

Si ce problème a une solution, elle est unique, et les coefficients de la série cherchée (1) sont trouvés par les formules d'Euler-Fourier (§ 414):

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx. \qquad (2)$$

---

[*] On suppose que pour cette fonction, l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx$ (propre ou impropre) existe.

La série obtenue est appelée *série de Fourier de la fonction $f(x)$.*

Il n'est pas exclu que le problème posé *n'ait pas de solution*: la série de Fourier peut [même si la fonction $f(x)$ est continue] s'avérer divergente en une infinité de points de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. C'est pourquoi la relation entre la fonction $f(x)$ et sa série de Fourier est notée:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots, \tag{3}$$

en évitant d'employer le signe d'égalité.

Toutefois, *pour toutes les fonctions continues d'intérêt pratique* le problème a une solution, autrement dit la série de Fourier d'une fonction périodique continue $f(x)$ s'avère en pratique partout convergente et sa somme est égale à la fonction donnée. Cela découle du § 416 où l'on donne les conditions suffisantes de développement d'une fonction continue en série de Fourier.

De plus, les fonctions périodiques discontinues d'intérêt pratique sont aussi développables en série de Fourier avec la réserve suivante: aux points de discontinuité de la fonction $f(x)$ sa série de Fourier peut avoir une somme différente de la valeur correspondante de la fonction (cf. § 418).

REMARQUE. Les fonctions non périodiques définies dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ peuvent aussi être développées en série de Fourier avec la réserve suivante: à l'extérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et à ses extrémités la série de Fourier de la fonction $f(x)$ aura une somme qui différera généralement de la valeur correspondante de la fonction [ce qui est d'ailleurs naturel puisque la somme d'une série trigonométrique est une fonction périodique (cf. § 417, exemple 2)]. Or, cela n'est pas important, car nous ne nous intéressons qu'aux valeurs de la fonction à l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$.

§ 416. Série de Fourier d'une fonction continue

THÉORÈME. Si une fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle fermé $(-\pi, \pi)$ et n'admet pas d'extréma ou bien en admet un nombre fini (*), la série de Fourier de cette fonction est partout convergente. La somme de la série est égale à $f(x)$ pour toute valeur de x à l'inté-

(*) Un exemple de fonction continue ayant une infinité de maxima et de minima dans un intervalle fini est fourni par $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ considérée dans n'importe quel intervalle renfermant le point $x = 0$ (en ce point on confère à la fonction la valeur 0; cf. § 231).

rieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. Aux deux extrémités de cet intervalle la somme est égale à

$$\frac{1}{2}[f(-\pi)+f(\pi)],$$

autrement dit à la moyenne arithmétique de $f(-\pi)$ et $f(+\pi)$.

EXEMPLE. Considérons la fonction $f(x) = x$; elle est continue dans l'intervalle fermé $(-\pi, \pi)$ et ne possède pas d'extréma. Les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de sa série de Fourier sont nuls. En effet,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx. \qquad (1)$$

Après la substitution $x = -x'$ le premier terme devient $\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} x'\cos nx'\,dx'$ et en s'ajoutant au second terme donne zéro:

$$a_n = 0\ (n = 0, 1\ 2, 3, \ldots). \qquad (2)$$

Nous trouvons les coefficients b_n en intégrant par parties:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi n}x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx = \qquad (3)$$

$$= -\frac{2\pi\cos\pi n}{\pi n} = 2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}. \qquad (4)$$

La série de Fourier de la fonction x est de la forme

$$2\left[\frac{1}{1}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx + \ldots\right]. \qquad (5)$$

Conformément au théorème la série (5) est partout convergente; pour $-\pi < x < \pi$ sa somme est égale à

$$2\left[\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \ldots\right] = x$$

$$(-\pi < x < \pi). \qquad (6)$$

Pour $x = \pm\pi$ la somme est égale à

$$\frac{1}{2}\Big[-\pi+\pi\Big] = 0.$$

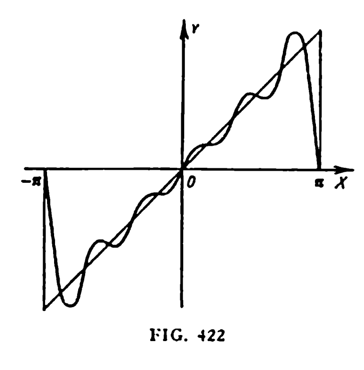


FIG. 422

Cela est évident car tous les termes de la série s'annulent.

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ la formule (6) donne la série de Leibniz (§ 398)

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}. \quad (7)$$

La fig. 422, graphe de la $5^{\text{ième}}$ somme partielle de la série de Fourier pour la fonction $f(x) = x$

$$s_5 = 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \right.$$
$$\left. - \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5}\right), \quad (8)$$

donne une idée du degré de proximité de la somme partielle s_n de la série (5) à l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et de la fonction $f(x)$. Le graphe de $y = s_5(x)$ oscille autour de la droite $y = x$; pour certaines valeurs de x on obtient une valeur approchée par défaut de la fonction, pour d'autres une valeur par excès.

La courbe $y = s_5(x)$ passe par les points $(-\pi, 0)$ et $(\pi, 0)$ de sorte qu'au voisinage de ces points elle s'écarte fortement de la droite $y = x$.

Il en est de même pour les sommes partielles suivantes. Seulement l'intervalle où cet écart a lieu décroît indéfiniment avec la croissance de n. Aux extrémités de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ toutes les sommes partielles sont nulles et, par conséquent, ne s'approchent pas des valeurs de la fonction $f(x) = x$ aux points $x = \pm\pi$. Par contre, dans tout intervalle intérieur dont les extrémités ne coïncident pas avec les points $x = \pm\pi$, la série (5) converge uniformément vers la fonction $f(x) = x$. Toutefois, cette convergence est mauvaise; ainsi, en prenant la valeur $x = \frac{\pi}{2}$ nous obtenons la série (7) qui (d'après le critère de Leibniz; § 376) converge très lentement.

REMARQUE 1. La fonction $f(x) = x$ est également définie à l'extérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$, mais comme elle n'est pas périodique, pour $x > \pi$ et pour $x < -\pi$ la somme de la série (5) n'est pas égale à x (cf. § 415, remarque). Le graphe de la somme de la série (5) se compose (fig. 423) d'un ensemble de segments de droite qui s'obtiennent par une translation horizontale du segment AB de $\pm 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$. Tous les segments $A_{-1}B_{-1}$, AB, A_1B_1, ... sont dépourvus d'extrémités qui sont remplacées par les points C_{-1}, C_1, C_2, ..., milieux des segments $B_{-1}A$, BA_1, B_1A_2, etc.

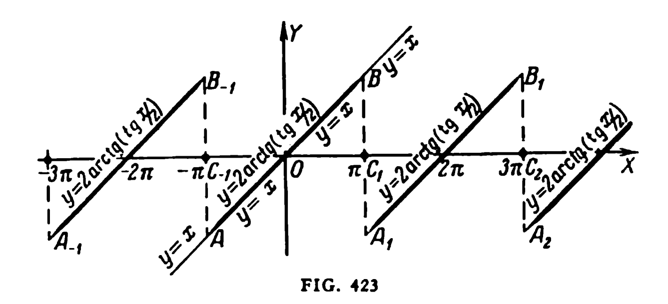


FIG. 423

REMARQUE 2. Considérons la fonction périodique $f_1(x) = 2$ arc tg $\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$; sa période est 2π. A l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ elle coïncide avec la fonction $f(x) = x$ (fig. 423). Aux points $\pm\pi$ cette fonction n'est pas définie et admet une discontinuité. La série de Fourier de $f_1(x)$ coïncide avec la série de Fourier de $f(x)$, et maintenant la somme de la série de Fourier est égale à $f_1(x)$ à l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ et aussi partout sauf, bien entendu, aux points de discontinuité $x = \pm\pi$, $x = \pm 3\pi$, etc. En ces derniers elle est nulle.

§ 417. Série de Fourier des fonctions paire et impaire

DÉFINITION. Soit $f(x)$ une fonction définie dans l'intervalle $(-a, a)$. Elle est dite *paire* si sa valeur ne change pas quand on change le signe de la variable:

$$f(-x) = f(x). \tag{1}$$

Telle est la puissance paire x^{2m} (c'est de là que découle le terme « fonction paire »), telles sont les fonctions $\cos nx$, $x^3 \sin nx$, etc.

La fonction est dite *impaire* si, quand on change le signe de la variable, seul le signe de la fonction change, sa valeur absolue restant la même

$$f(-x) = -f(x) \tag{2}$$

Telle est la puissance impaire x^{2m-1}, telles sont les fonctions $\sin nx$, $x \cos nx$, $\operatorname{tg} x$, etc.

Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe OY, celui d'une fonction impaire par rapport à l'origine O.

REMARQUE 1. Les intégrales $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ et $\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ sont égales pour une fonction paire et diffèrent par leur signe pour une fonction impaire. C'est pourquoi nous avons pour une fonction paire:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \tag{3}$$

et pour une fonction impaire

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0. \tag{4}$$

REMARQUE 2. La série de Fourier d'une fonction paire ne comprend que des termes en cosinus; les coefficients sont

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = 0 \tag{5}$$

(cf. remarque 1). La série de Fourier d'une fonction impaire ne comprend que des termes en sinus, le terme constant étant nul; les coefficients sont

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx. \tag{6}$$

EXEMPLE 1. La fonction $f(x) = x$, considérée dans l'exemple du § 416, est impaire. Sa série de Fourier ne contient pas de termes en cosinus, ni de terme constant. Les coefficients b_n sont

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \ldots\, nx\,dx = 2(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}.$$

EXEMPLE 2. La fonction $f(x) = |x|$ est paire; cela signifie que sa série de Fourier ne contient pas de termes en sinus. Le coefficient a_0 est

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = \pi. \tag{7}$$

Quand $n \neq 0$, nous obtenons:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\,x\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$

$$= 2\,\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi}, \tag{8}$$

c'est-à-dire

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2\,\pi} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots). \tag{9}$$

Par conséquent, la série de Fourier de la fonction $f(x) = |x|$ sera

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \frac{\cos (2n-1)\,x}{(2n-1)^2} + \ldots\right). \tag{10}$$

La fonction $f(x) = |x|$ satisfait aux conditions du théorème du § 416. Par conséquent, la série (10) est partout convergente. Sa somme est égale à $|x|$ pour toute valeur de x à l'intérieur de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. De plus, comme la fonction $f(x) = |x|$ est paire, la somme de sa série de Fourier est aussi égale à $f(x)$ aux extrémités de l'intervalle $(-\pi, \pi)$. En effet, nous avons pour une fonction paire $f(-\pi) = f(\pi)$, de sorte que la moyenne arithmétique des valeurs $f(-\pi)$ et $f(\pi)$ coïncide avec chacune de ces valeurs. Nous avons ainsi:

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \ldots\right) \quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi). \tag{10a}$$

En particulier, portant dans (10a) l'une des valeurs $x = \pm\pi$ ou $x = 0$ nous trouvons que

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{11}$$

La convergence de la série (11) et généralement de la série (10a) est mauvaise, bien que meilleure que celle de la série (5) du § 416 (cf. les graphes des fig. 422 et 424).

La fig. 424 donne le graphe de la somme partielle s_4 de la série (10):

$$s_4 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2}\right)$$

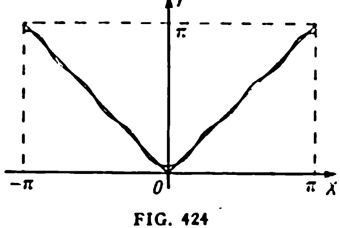


FIG. 424

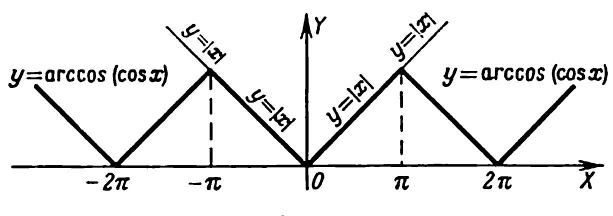


FIG. 425

dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$. La ligne brisée autour de laquelle oscille la courbe $y = s_4(x)$ est le graphe de la somme $f_1(x)$ de la série (10). La fig. 425 représente le graphe de la somme $f_1(x)$ dans l'intervalle $(-3\pi, 3\pi)$, ainsi que (par les deux rayons issus du point O) le graphe de la fonction $f(x) = |x|$. Dans l'intervalle fermé $(-\pi, \pi)$ les fonctions $f(x)$ et $f_1(x)$ coïncident.

REMARQUE 3. La fonction $f_1(x)$ peut être représentée par la formule

$$f_1(x) = \arccos(\cos x).$$

EXEMPLE 3. Développer en série de Fourier la fonction $f(x) = x^2$ (fig. 426).

SOLUTION. La fonction considérée est paire; c'est pourquoi nous avons:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

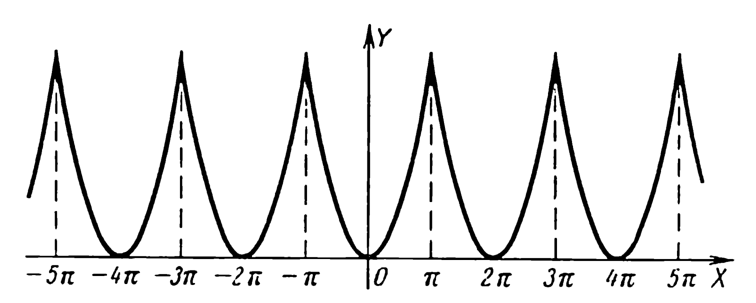


FIG. 426

Pour calculer a_n, quand $n \neq 0$, nous intégrons deux fois par parties:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx\, dx = \frac{2}{\pi}\, x^2 \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi x \sin nx\, dx =$$

$$= \frac{4}{n\pi}\, x \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^\pi - \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \cos nx\, dx = (-1)^n \frac{4}{n^2}. \qquad (12)$$

Nous avons alors dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, *y compris les extrémités* (cf. exemple 2):

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\left[\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \frac{\cos 4x}{4^2} + \ldots\right]. \qquad (13)$$

Pour $x = \pi$ et $x = 0$ nous obtenons respectivement:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}, \qquad (14)$$

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12}. \qquad (15)$$

Ajoutant terme à terme (14) et (15) nous retrouvons (11).

§ 418. Série de Fourier d'une fonction discontinue

On peut généraliser le théorème du § 416 de la façon suivante.

Théorème de Dirichlet. Soit $f(x)$ une fonction continue dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, sauf en un *nombre fini* de points où elle présente des sauts (§ 219a). Si $f(x)$ ne possède dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ qu'un nombre fini d'extréma (ou n'en possède pas du tout), sa série de Fourier est partout convergente. Dans ce cas (*):

1) aux deux extrémités $-\pi$, π la somme de la série est

$$\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)]; \qquad (1)$$

(*) Le texte qui suit permet de donner un énoncé plus bref (cf. remarque 2).

2) en chaque point de discontinuité $x = x_i$ la somme de la série est

$$\frac{1}{2}[f(x_i - 0) + f(x_i + 0)], \tag{2}$$

où le symbole $f(x_i - 0)$ signifie la limite vers laquelle tend $f(x)$ quand x tend vers x_i à gauche et $f(x_i + 0)$ la limite de $f(x)$ quand x tend vers x_i à droite;

3) aux autres points de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la somme est égale à $f(x)$.

REMARQUE 1. Les intégrales

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx,$$

figurant dans les expressions des coefficients de la série de Fourier, sont dans le cas considéré des intégrales impropres (§ 328).

EXEMPLE. Considérons la fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\pi}{4} \quad \text{pour } -\pi \leqslant x < 0, \\ f(x) &= \frac{\pi}{4} \quad \text{pour } 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Cette fonction est discontinue au point $x = 0$ où elle présente un saut. En effet, nous avons (cf. fig. 427, où l'on a représenté la fonction $f(x)$ périodiquement prolongée au-delà de l'intervalle $(-\pi, \pi)$]:

$$f(-0) = -\frac{\pi}{4}, \; f(+0) = \frac{\pi}{4}. \tag{4}$$

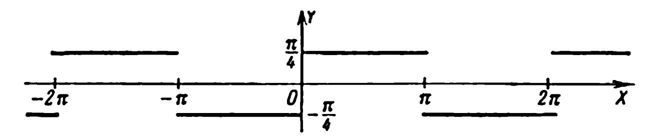


FIG.427

Nous trouvons les coefficients de la série de Fourier [la fonction $f(x)$ est impaire]:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= 0, \\ b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\pi}{4}\sin nx\,dx = \frac{1}{2n}[1-(-1)^n]. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Par conséquent,

$$\left.\begin{aligned} b_{2k-1} &= \frac{1}{2k-1}, \\ b_{2k} &= 0 \end{aligned}\right\} (k = 1, 2, 3, \ldots). \quad (6)$$

En tous les points intérieurs de l'intervalle $(-\pi, \pi)$, sauf le point de discontinuité $x = 0$, la somme de la série de Fourier est égale à $f(x)$, c'est-à-dire que pour $-\pi < x < 0$ nous avons:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots = -\frac{\pi}{4}, \quad (7)$$

et pour $0 < x < \pi$ nous avons:

$$\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots + \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} + \ldots = \frac{\pi}{4}. \quad (8)$$

Au point de discontinuité $x = 0$ la somme de la série de Fourier est égale à

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

(tous les termes de la série sont nuls). Aux extrémités de l'intervalle $(-\pi, \pi)$ la somme est aussi égale à

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

On voit sur la fig. 428 que les sommes partielles $s_1(x)$, $s_2(x)$, $s_3(x)$, $s_4(x)$ se rapprochent progressivement de $f(x)$.

Remarque 2. Dans le théorème de Dirichlet les cas 1 et 3 sont en fait des cas particuliers du cas 2. En effet, si $f(-\pi) \neq f(\pi)$, les extrémités de l'intervalle sont des points de discontinuité de la fonction $f(x)$ périodiquement prolongée. Si par contre x est un point intérieur de continuité, la limite à gauche $f(x-0)$ et la limite à droite $f(x+0)$ sont égales à $f(x)$, de sorte que

$$\frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)] = f(x). \quad (9)$$

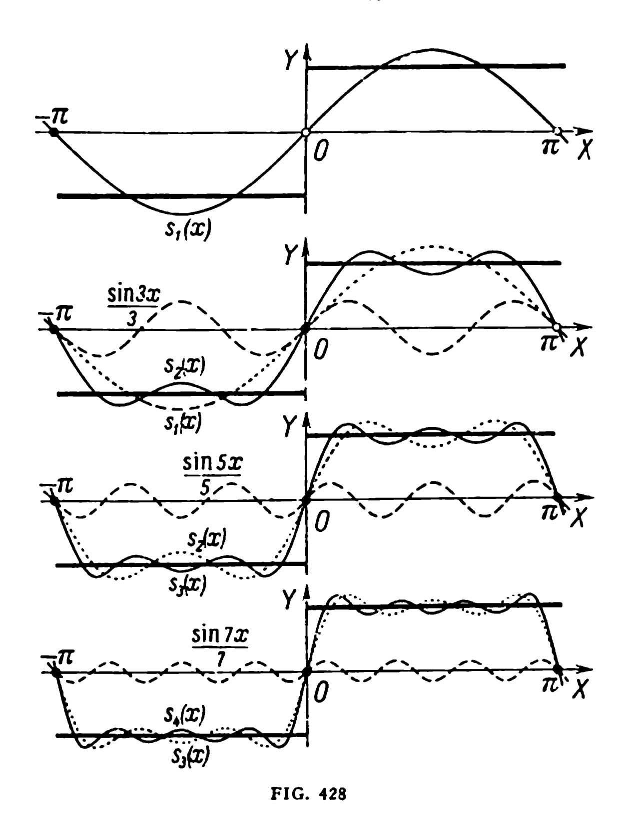


FIG. 428

On peut ainsi énoncer plus succinctement le théorème de Dirichlet :

Soit $f(x)$ une fonction *périodique* continue dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$, sauf en un nombre fini de points où elle présente des sauts. Si $f(x)$ ne possède dans l'intervalle $(-\pi, \pi)$ qu'un nombre fini d'extréma (ou n'en possède pas du tout), sa série de Fourier est partout convergente, et la somme de la série est partout égale à

$$\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)].$$

Dérivation et intégration des fonctions de plusieurs variables

§ 419. Fonctions de deux variables

DÉFINITION. On dit que z est *fonction de deux variables* x, y lorsqu'on peut faire correspondre à tout couple de nombres qui peuvent être (selon les conditions du problème) les valeurs des variables x, y une ou plusieurs valeurs déterminées de z.

On distingue les fonctions uniformes et multiformes de la même façon que dans la définition 2 du § 196.

EXEMPLE 1. L'altitude h d'une localité est fonction des coordonnées géographiques — la latitude φ et la longitude ψ. La latitude peut varier entre $-90°$ et $+90°$, la longitude entre $-180°$ et $+180°$.

EXEMPLE 2. Le produit des facteurs x, y est fonction de deux variables x et y. Les valeurs de x et y peuvent être arbitraires.

PLAN NUMÉRIQUE. Pour plus de clarté le couple de valeurs de x, y est représenté géométriquement par le point $M(x, y)$ rapporté au système de coordonnées rectangulaires XOY. Le plan sur lequel est pris ce système est appelé *plan numérique*.

L'expression « le point M (x, y) » est équivalente à l'expression « le couple de valeurs des variables x et y ». Par exemple, « le point $M(1, -3)$ » signifie le « couple de valeurs $x = 1$, $y = -3$ ». Conformément à cela la fonction de deux variables est appelée *fonction de point* (cf. § 457). Souvent la valeur d'une fonction est définie, par sa signification physique même, par le choix du point dans le plan ou sur une surface courbe (cf. exemple 1).

DOMAINE DE DÉFINITION D'UNE FONCTION. L'ensemble des couples de nombres qui (d'après les conditions du problème) peuvent être les valeurs des variables x, y de la fonction $f(x, y)$ constitue le *domaine de définition* de cette fonction.

Géométriquement, le domaine de définition est représenté par un ensemble de points du plan XOY.

Dans l'exemple 1 le domaine de définition de la fonction h des variables φ et ψ est l'ensemble des points du plan numérique situés à l'intérieur ou sur la frontière d'un rectangle de 360 unités de long et de 180 de large dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées

et le centre coïncide avec l'origine. Dans l'exemple 2 le domaine de définition de la fonction est le plan numérique tout entier.

NOTATION. L'écriture

$$z = f(x, y)$$

signifie que z est une fonction de deux variables x et y. L'écriture $f(3, 5)$ signifie que l'on considère la valeur de la fonction $f(x, y)$ au point $M(3, 5)$, autrement dit la valeur de la fonction qui correspond aux valeurs $x = 3$, $y = 5$ (cf. § 202). D'autres lettres peuvent être utilisées au lieu de f.

Parfois, on désigne la caractéristique d'une fonction et la fonction elle-même par la même lettre, en d'autres termes on écrit: $z = z(x, y)$, $w = w(u, v)$, etc.

REMARQUE. Il n'est pas exclu que la valeur de la fonction $f(x, y)$ varie en fonction de x, mais reste inchangée quand y varie. La fonction de deux variables peut alors être considérée comme une fonction de la seule variable (x). Si par contre la valeur de $f(x, y)$ reste la même pour toutes les valeurs des deux variables, la fonction est une constante.

EXEMPLE 3. La quantité diurne de précipitations (h mm) dans la région de Moscou est une fonction de la longitude ψ et de la latitude φ du lieu d'observation. Toutefois il n'est pas exclu que la quantité de précipitations reste constante dans la direction du sud au nord et varie dans la direction de l'est à l'ouest. On peut alors considérer h comme fonction de la seule variable ψ.

Si au cours de la journée il n'y a pas de précipitations dans toute la région, h est une grandeur constante (égale à zéro).

§ 420. Fonctions de trois et d'un plus grand nombre de variables

Les notions de fonctions de trois, quatre, etc., variables et de domaines de définition sont introduites de la même manière que dans le cas de deux variables (§ 419).

Le domaine de définition d'une fonction de trois variables est représenté par un ensemble de points dans l'espace. Conformément à cela la fonction de trois variables (et par analogie la fonction d'un plus grand nombre de variables) est appelée *fonction de point*. L'écriture

$$u = f(x, y, z)$$

signifie que u est une fonction de trois variables x, y, z.

REMARQUE. Il n'est pas exclu que la valeur de la fonction $f(x, y, z)$ varie en fonction de x et y, mais reste inchangée quand z varie.

La fonction des trois variables x, y, z est alors une fonction de deux variables x, y. La fonction $f(x, y, z)$ peut aussi s'avérer être une fonction d'une seule variable ou même une constante (cf. § 419, remarque).

En général une fonction de n variables peut s'avérer être une fonction d'un plus petit nombre de variables.

§ 421. Formes de définition d'une fonction de plusieurs variables

1. Une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables peut être donnée par une formule (ou par plusieurs formules) sous forme *explicite* ou *implicite* (cf. § 197, c).

EXEMPLE 1. La formule

$$pv = A(273{,}2 + t), \tag{1}$$

où $A = 0{,}02927$ exprime la relation entre le volume v d'un kilogramme d'air (en m^3), sa pression p $\left(\text{en } \frac{\text{t}}{\text{m}^2}\right)$ et sa température t (en degrés Celsius). Chacune des variables p, v, t est une fonction implicite des deux autres.

La formule

$$v = \frac{A(273{,}2 + t)}{p} \tag{2}$$

donne v en tant que fonction explicite de deux variables p et t. Le domaine de définition de cette fonction est l'ensemble des valeurs possibles de la pression et de la température (t ne peut prendre que des valeurs supérieures à $-273°$ et p que des valeurs positives).

REMARQUE. Souvent une fonction de plusieurs variables est donnée par une formule sans indiquer le sens physique des grandeurs qui y figurent. Si aucune indication n'est formulée au sujet du domaine de définition de la fonction, on sous-entend que le domaine de définition contient tous les points pour lesquels la formule a un sens.

EXEMPLE 2. Supposons que la fonction de deux variables x, y soit donnée par la formule

$$z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} \tag{3}$$

sans que le domaine de définition soit indiqué. La formule (3) n'a de sens que si $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Par conséquent, le domaine de définition est l'ensemble de tous les points situés à l'intérieur et sur la frontière du cercle de rayon R et de centre à l'origine des coordonnées.

EXEMPLE 3. La formule $u = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}$ définit une fonction de trois variables. La formule n'a de sens que pour $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$; le domaine de définition est l'ensemble de tous les points situés à l'intérieur et sur la surface d'une boule de rayon a et de centre à l'origine des coordonnées.

2. Une fonction de deux ou d'un plus grand nombre de variables peut être donnée à l'aide d'une table. Dans le cas de deux variables, on note les valeurs de l'une des variables dans la ligne du haut, les valeurs de l'autre dans la colonne de gauche, et la valeur de la fonction à l'intersection des lignes et des colonnes correspondantes *(tables à double entrée)*.

EXEMPLE 4. La table suivante donne le volume de 1 kg d'air en tant que fonction de la pression et de la température (cf. exemple 1):

$p \frac{t}{m^2}$ \ $t°$	− 20	− 10	0	10	20
10,0	0,7411	0,7704	0,7997	0,8289	0,8582
10,1	0,7338	0,7628	0,7918	0,8207	0,8497
10,2	0,7266	0,7553	0,7840	0,8126	0,8414
10,3	0,7195	0,7480	0,7764	0,8048	0,8332
10,4	0,7126	0,7408	0,7689	0,7970	0,8252
10,5	0,7058	0,7337	0,7616	0,7894	0,8173

3. On peut représenter une fonction de deux variables par un *modèle spatial* (graphe spatial). Le modèle spatial de la fonction $f(x, y)$ est une certaine surface S rapportée au système de coordonnées rectangulaires $OXYZ$; la projection du point M de la surface S sur le plan XOY est l'image du couple de valeurs des variables x, y, la cote z de M représente la valeur correspondante de la fonction $f(x, y)$.

Pour une fonction de trois ou d'un plus grand nombre de variables ce procédé est inapplicable.

EXEMPLE 5. La fonction donnée par la formule

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

est représentée par une demi-sphère (fig. 429, cf. exemple 2).

4. On peut représenter une fonction de deux variables dans le plan par la *méthode des cotes*. Le couple des valeurs x, y est représenté par le point M (x, y) et la valeur z par une cote. (Ce procédé est utilisé en cartographie pour marquer l'altitude d'un point.) Les points pour lesquels z a la même valeur sont reliés par une courbe (*ligne ou courbe de niveau*) affectée du chiffre correspondant. Si le point (x, y) est situé sur une courbe de niveau, on lit directement la valeur de la fonction; dans le cas contraire, on prend les deux courbes de niveau es plus proches de part et d'autre du point (x, y) et on effectue une interpolation (au jugé).

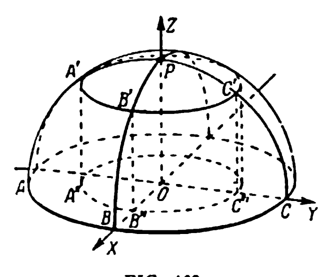


FIG. 429

FIG. 430

EXEMPLE 6. On a représenté sur la fig. 430 les courbes de niveau de la fonction $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, correspondant à la croissance de la fonction de $0{,}2\,a$ $(OB = a)$. La valeur de z au point $M(0, -0{,}8a)$ est lue d'après la cote $0{,}6a$. Pour trouver la valeur de z au point $N\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a\right)$, nous lisons les cotes $0{,}6a$ et $0{,}8a$ des courbes de niveau les plus proches. Comme N se trouve environ à égale distance de ces courbes, nous estimons que $z \approx 0{,}7a$.

REMARQUE. Si l'on coupe la surface $z = f(x, y)$ par le plan $z = k$ et si l'on projette la section sur le plan XOY, on obtient la courbe de niveau de cote k. Ainsi, si l'on coupe la demi-sphère $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ par le plan $z = 0{,}8a$, on obtient la section $A'B'C'$ (fig. 429). Sa projection $A''B''C''$ (fig. 429 et 430) sur le plan XOY est la courbe de niveau de cote $0{,}8a$.

De même, on peut représenter une fonction de trois variables $u = f(x, y, z)$ dans l'espace par la méthode des cotes. Le rôle des courbes de niveau est alors joué par les *surfaces de niveau*.

§ 422. Limite d'une fonction de plusieurs variables

La notion de limite d'une fonction de plusieurs variables est introduite de la même façon que pour une fonction d'une seule variable. Pour fixer les idées considérons le cas d'une fonction de deux variables.

Le nombre l est appelé la limite de la fonction $z = f(x, y)$ au point $M_0(a, b)$ si z se rapproche indéfiniment de l chaque fois que le point $M(x, y)$ se rapproche indéfiniment du point M_0 (cf. § 204).

ECRITURE:

$$\lim_{M \to M_0} f(x, y) = l$$

ou

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = l.$$

REMARQUE 1. On suppose qu'à l'intérieur d'un cercle enveloppant le point M_0 la fonction $f(x, y)$ est définie en tous les points non confondus avec M_0; au point M_0 la fonction $f(x, y)$ est ou bien définie ou bien non définie (cf. § 204, remarque 1).

REMARQUE 2. Le sens mathématique de l'expression « se rapproche indéfiniment » est explicité dans la définition rigoureuse suivante.

DÉFINITION. Le nombre l est appelé la *limite* de la fonction $f(x, y)$ au point $M_0(a, b)$ si la valeur absolue de la différence $f(x, y) - l$ reste inférieure à tout nombre positif ε fixé d'avance dès que la distance $M_0M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ du point $M_0(a, b)$ au point $M(x, y)$ (non confondu avec M_0) est inférieure à un nombre positif δ (dépendant de ε).

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE. La cote de la surface $z = f(x, y)$ diffère de l d'une grandeur inférieure à ε dès que la projection du point situé sur la surface tombe à l'intérieur du cercle de rayon δ et de centre au point $M_0(a, b)$.

REMARQUE 3. Dans le cas d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$ la distance M_0M est donnée par l'expression

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b^2) + (z-c)^2}.$$

Pour le cas de quatre variables, lorsque l'interprétation géométrique de l'expression

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + (u-d)^2}$$

devient impossible, elle est appelée par analogie la *distance* entre les points $M(x, y, z, u)$ et $M_0(a, b, c, d)$.

La notion d'infiniment petit et celle d'infiniment grand sont introduites de la même façon que pour une fonction d'une seule variable (§§ 207, 208). Pour l'ordre de petitesse consulter § 423. La généralisation de la notion de limite est réalisée comme au § 211.

§ 423. Ordre de petitesse d'une fonction de plusieurs variables

Lors de la comparaison de deux infiniment petits α et β, fonctions d'une seule variable, nous avons distingué (§ 217) les cas suivants:

1) si le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ a une limite finie non nulle, les infiniment petits α et β sont du même ordre;

2) si $\lim \frac{\alpha}{\beta} = 0$, α est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à β;

3) si $\lim \frac{\alpha}{\beta} = \infty$, α est un infiniment petit d'ordre inférieur par rapport à β;

4) si le rapport $\frac{\alpha}{\beta}$ n'a pas de limite, α et β ne sont pas comparables.

Le cas 4 est exceptionnel lors de l'étude des fonctions élémentaires d'une seule variable. Pour les fonctions de deux ou d'un plus grand nombre de variables c'est *le cas* 1 *qui est exceptionnel*, et les cas pratiquement importants sont les cas 2, 3, 4.

Ainsi, le rapport de deux infiniment petits, fonctions de plusieurs variables, n'a pas de limite dans le cas typique (cf. exemple 1). Dans d'autres cas l'un des deux infiniment petits (par exemple α) est d'ordre supérieur par rapport à l'autre (cf. exemples 2 et 3). Dans ce cas le dernier est un infiniment petit d'ordre inférieur par rapport au premier.

Exemple 1. Quand $x \to 0$, $y \to 0$, les grandeurs $2x^2 + y^2$ et $x^2 + y^2$ sont des infiniment petits, mais leur rapport n'a pas de limite.

En effet, le point $M(x, y)$ peut tendre vers le point $M_0(0, 0)$ suivant une courbe tangente au point M_0 à la droite $y = \frac{1}{2}x$ (la courbe BM_0 sur la fig. 431) ou à la droite $y = 3x$, ou à la droite $y = x$, etc. Dans le premier cas le rapport $\frac{y}{x}$ tend vers $\frac{1}{2}$, dans le second cas vers 3, dans le troisième vers 1. Cela signifie que le rapport

$$(2x^2 + y^2) : (x^2 + y^2) = \left[2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] : \left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$

tend dans le premier cas vers $\frac{9}{5}$, dans le second vers $\frac{11}{10}$, dans le troisième vers $\frac{3}{2}$, etc.

Remarque. L'infiniment petit $x^2 + y^2$ est le carré de la distance M_0M du point M_0 au point M tendant vers M_0 (0, 0). En général, les cas où l'un des infiniment petits que l'on compare est une puissance quelconque de la distance du point M à sa limite M_0 sont particulièrement importants (cf. §§ 430, 444).

FIG. 431

Exemple 2. La fonction $2x^2 - y^2$ est, quand $M \to M_0(0, 0)$, un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à la distance

$$MM_0 = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

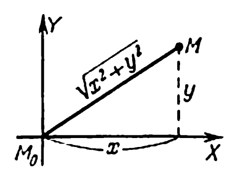


FIG. 432

En effet, le rapport $(2x^2 - y^2):\sqrt{x^2+y^2}$ peut s'écrire:

$$\frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \quad (1)$$

Chacune des grandeurs $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'est pas supérieure à l'unité en valeur absolue (cf. fig. 432), et chacune des grandeurs $2x$, y tend vers zéro. Par conséquent, les deux termes du second membre de (1) tendent vers zéro. Cela signifie que le rapport $(2x^2 - y^2):\sqrt{x^2+y^2}$ tend également vers zéro.

EXEMPLE 3. La fonction $f(x, y) = (x - x_0)^2 (y - y_0)$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport au carré de la distance MM_0, c'est-à-dire par rapport à $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. En effet,

$$\frac{f(x, y)}{MM_0^2} = (x - x_0)\cdot\frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}\,\frac{y - y_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}.$$

Le premier facteur tend vers zéro, et chacun des deux autres n'est pas supérieur à l'unité (cf. exemple 2).

§ 424. Continuité d'une fonction de plusieurs variables

DÉFINITION 1. La fonction $f(x, y)$ est dite *continue* au point $M_0(x_0, y_0)$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

1) au point M_0 la fonction $M(x, y)$ possède une valeur déterminée l,

2) au point M_0 cette fonction a une limite qui est aussi égale à l.

Quand l'une au moins de ces conditions n'est pas vérifiée, la fonction est dite *discontinue au point* M_0.

Il en est de même pour le cas de trois ou d'un plus grand nombre de variables.

DÉFINITION 2. La fonction $f(x, y)$ est dite *continue dans un certain domaine* si elle est continue en tout point de ce domaine.

EXEMPLE 1. La fonction $f(x, y)$ donnée par les formules

$$f(0, 0) = 0,$$

$$f(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

est continue au point $M_0(0, 0)$. En effet, elle possède au point M_0 la valeur zéro; en outre elle a en ce point une limite égale à zéro (cf. exem-

ple 2 § 423). En tous les autres points du plan numérique la fonction $f(x, y)$ est aussi continue. C'est pourquoi elle est continue dans tout domaine du plan.

EXEMPLE 2. La fonction $\varphi(x, y)$ donnée par les formules

$$\varphi(0, 0) = 0,$$

$$\varphi(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + y^2} \qquad (x^2 + y^2 \neq 0)$$

est discontinue au point $M_0(0, 0)$. La première condition de la définition 1 est ici vérifiée, mais la seconde ne l'est pas: la fonction $\varphi(x, y)$ n'a pas de limite quand $M \to M_0$ (cf. exemple 1 § 423).

§ 425. Dérivées partielles

DÉFINITION. On appelle *dérivée partielle* de la fonction $u = f(x, y, z)$ par rapport à x la limite du rapport

$$\frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \qquad \text{quand } \Delta x \to 0.$$

Notations:

$$u'_x, \qquad f'_x(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}. \tag{1}$$

Au sujet des symboles ∂u, ∂x cf. § 429.

REMARQUE 1. Les variables x, y, z sont considérées constantes *lors de la recherche de la limite*; la dérivée partielle obtenue est une fonction de x, y, z (cf. § 224).

Les dérivées partielles par rapport à y et z sont définies et notées de manière analogue, par exemple

$$u'_y = \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y(x, y, z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}. \tag{2}$$

REMARQUE 2. Pour obtenir la dérivée partielle u'_x il suffit de trouver la dérivée ordinaire de la fonction u en considérant que cette dernière n'est fonction que d'une seule variable x. S'il faut trouver les trois dérivées partielles, il est plus pratique d'utiliser le procédé du § 438.

EXEMPLE. Trouver les valeurs des dérivées partielles de la fonction

$$u = f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 3z^2 - 3xy - 2xz \tag{3}$$

au point $M_0(0, 0, 1)$.

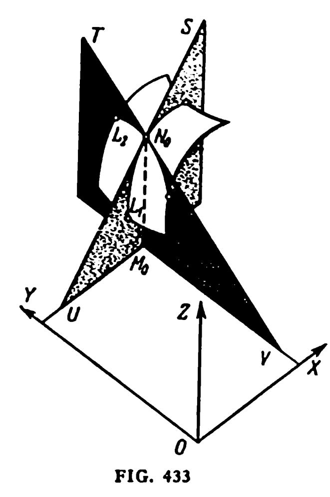


FIG. 433

SOLUTION. En considérant u comme fonction d'une seule variable x, nous trouvons que sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ est égale à $4x - 3y - 2z$. Au point (0, 0, 1) cette valeur de la dérivée est — 2.

ECRITURE:

$$f'_x(0, 0, 1) = 4x - 3y - 2z \Big|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = -2,$$

$$f'_y(0, 0, 1) = 2y - 3x \Big|_{x=0,\ y=0,\ z=1} = 0,$$

$$f'_z(0\ 0, 1) = -6.$$

§ 426. Interprétation géométrique des dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Supposons qu'au point $M_0(x_0, y_0)$ (fig. 433) correspond le point N_0 de la surface $z = f(x, y)$ (§ 421). Menons par N_0 le plan N_0M_0U parallèle au plan XOZ. La section est la courbe L_1N_0 le long de laquelle y reste constante ($y = y_0$). La cote z de la courbe L_1N_0 est fonction d'une seule variable x. La dérivée partielle $f'_x(x_0, y_0)$ est numériquement égale au coefficient angulaire de la tangente UN_0, autrement dit à la tangente de l'angle M_0UN_0 formé par la tangente US et le plan de coordonnées XOY.

Menant le plan N_0M_0V parallèle à YOZ, nous obtenons la section L_2N_0. La dérivée partielle $f'_y(x_0, y_0)$ est égale à la tangente de l'angle M_0VN_0 formé par la tangente VT et le plan XOY.

§ 427. Accroissement total et accroissement partiel

Prenons des valeurs quelconques x_0, y_0, z_0 des variables x, y, z et donnons-leur des accroissements Δx, Δy, Δz. La fonction $u = f(x, y, z)$ reçoit un *accroissement total*

$$\Delta u = \Delta f(x, y, z) = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y,\ z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Il peut arriver que les accroissements Δy, Δz soient nuls, c'est-à-dire que y et z restent constants; la fonction $f(x, y, z)$ reçoit alors un *accroissement partiel*

$$\Delta_x u = \Delta_x f(x, y, z) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Les autres accroissements partiels s'obtiennent de façon analogue

$$\Delta_y u = \Delta_y f(x, y, z) = f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0),$$

$$\Delta_z u = \Delta_z f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

REMARQUE. Dans le cas de deux variables, l'accroissement total de la fonction est représenté géométriquement par l'accroissement de la cote M_0N_0 (fig. 433) pour tout déplacement du point N_0 sur la surface $z = f(x, y)$. L'accroissement partiel $\Delta_x f(x, y)$ s'obtient lors du déplacement du point N_0 le long de la section L_1N_0, l'accroissement partiel $\Delta_y f(x, y)$ lors du déplacement le long de L_2N_0.

EXEMPLE. L'accroissement total de la fonction

$$u = 2x^2 - y^2 - z$$

est égal à

$$\Delta u = \Delta(2x^2 - y^2 - z) = 2(x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 - (z + \Delta z) - 2x^2 + $$
$$+ y^2 + z = 4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z + 2\Delta x^2 - \Delta y^2.$$

Les accroissements partiels sont

$$\Delta_x u = 4x\Delta x + 2\Delta x^2, \quad \Delta_y u = -2y\Delta y - \Delta y^2, \quad \Delta_z u = -\Delta z.$$

§ 428. Différentielle partielle

DÉFINITION. Si l'accroissement partiel $\Delta_x u$ (§ 427) de la fonction $u = f(x, y, z)$ peut être mis sous forme de somme de deux termes:

$$\Delta_x u = A\Delta x + \alpha, \tag{1}$$

où A ne dépend pas de Δx et α est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à Δx, le premier terme $A\Delta x$ est appelé la *différentielle partielle* de la fonction $f(x, y, z)$ par rapport à x et noté $d_x f(x, y, z)$ ou $d_x u$:

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\Delta x. \tag{2}$$

En d'autres termes, la différentielle partielle est la différentielle (§ 228) de la fonction $f(x, y, z)$ en supposant que les grandeurs y et z ne varient pas ($\Delta y = \Delta z = 0$). Avec cette hypothèse x est l'unique variable, de sorte que l'on peut écrire dx au lieu de Δx (cf. § 234), ce qui donne

$$d_x u = d_x f(x, y, z) = A\,dx.$$

On définit de même les différentielles partielles $d_y f(x, y, z)$, $d_z f(x, y, z)$ par rapport aux y, z.

Le coefficient A est égal à la dérivée partielle u'_x, autrement dit la différentielle partielle de la fonction est égale au produit de la dérivée partielle correspondante par l'accroissement de la variable (§ 228, théorème 1)

$$d_x u = u'_x dx. \tag{3}$$

D'une manière analogue on a

$$d_y u = u'_y dy, \tag{4}$$

$$d_z u = u'_z dz. \tag{5}$$

EXEMPLE. Trouver les différentielles partielles de la fonction

$$u = x^2 y + y^2 x.$$

SOLUTION. Considérant d'abord y, puis x constants, nous trouvons:

$$d_x u = (2xy + y^2)\, dx,$$

$$d_y u = (x^2 + 2xy)\, dy.$$

§ 429. Expression de la dérivée partielle à l'aide de la différentielle

La dérivée partielle u'_x de la fonction $u = f(x, y, z)$ est égale au rapport de la différentielle partielle $d_x u$ à la différentielle dx:

$$u'_x = \frac{d_x u}{dx}. \tag{1}$$

Cela découle du § 428 (cf. § 235).

Dans la notation $\frac{\partial u}{\partial x}$ il ne faut pas comprendre le symbole ∂u comme la *différentielle partielle* $d_x u$ par rapport à x, car dans la notation $\frac{\partial u}{\partial y}$ *le même symbole* ∂u aurait dû être compris comme la différentielle partielle $d_y u$ et dans la notation $\frac{\partial u}{\partial z}$ comme $d_z u$.

C'est pourquoi on doit considérer l'expression $\frac{\partial u}{\partial x}$ comme un *symbole* et non comme un quotient.

EXEMPLE. Soit $u = xy$; alors $x = \frac{u}{y}$ et $y = \frac{u}{x}$.

Nous avons:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{u}{y^2}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{x}.$$

Nous en tirons:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = y \cdot \left(-\frac{u}{y^2}\right) \cdot \frac{1}{x} = -\frac{u}{xy} = -1.$$

Si nous avions considéré ∂u, ∂x, ∂y comme des grandeurs indépendantes, nous aurions obtenu au lieu de -1 le résultat erroné $+1$.

§ 430. Différentielle totale

DÉFINITION. Supposons que l'accroissement total $\Delta f(x, y, z)$ (§ 427) de la fonction $f(x, y, z)$ puisse être mis sous forme de somme de deux termes:

$$\Delta f(x, y, z) = (A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z) + \varepsilon, \tag{1}$$

où les coefficients A, B, C ne dépendent pas de Δx, Δy et Δz et la grandeur ε (considérée comme une fonction de Δx, Δy, Δz) est un infiniment petit d'ordre supérieur (§ 423) par rapport à la distance $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$.

Dans ce cas le premier terme

$$A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z \tag{2}$$

est appelé *différentielle totale* (ou *différentielle*) de la fonction $f(x, y, z)$ et noté $df(x, y, z)$ (cf. §§ 228, 428).

EXEMPLE 1. Prenons la fonction

$$f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - z. \tag{3}$$

Nous avons (§ 427, exemple):

$$\Delta f(x, y, z) = (4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z) + (2\Delta x^2 - \Delta y^2).$$

Les coefficients $A = 4x$, $B = -2y$, $C = -1$ ne dépendent pas de Δx, Δy, Δz, la grandeur $\varepsilon = 2\Delta x^2 - \Delta y^2$ est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ (cf. § 423, exemple 2). Par conséquent, l'expression $4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z$ est la différentielle totale de la fonction $2x^2 - y^2 - z$:

$$d(2x^2 - y^2 - z) = 4x\Delta x - 2y\Delta y - \Delta z. \tag{4}$$

THÉORÈME. Les coefficients A, B, C sont les dérivées partielles respectives de la fonction $f(x, y, z)$:

$$A = f'_x(x, y, z), \quad B = f'_y(x, y, z), \quad C = f'_z(x, y, z). \tag{5}$$

En d'autres termes, *la différentielle totale est égale à la somme des différentielles partielles* (§ 428):

$$df(x, y, z) = d_x f(x, y, z) + d_y f(x, y, z) + d_z f(x, y, z) \tag{6}$$

ou encore

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,\Delta x + f'_y(x, y, z)\,\Delta y + f'_z(x, y, z)\,\Delta z. \tag{7}$$

EXEMPLE 2. Dans la formule (4) les coefficients $A = 4x$, $B = -2y$, $C = -1$ sont les dérivées partielles de la fonction $2x^2 - y^2 - z$ par rapport aux x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} 4x &= \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 - y^2 - z), \\ -2y &= \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 - y^2 - z), \\ -1 &= \frac{\partial}{\partial z}(2x^2 - y^2 - z). \end{aligned}\right\}$$

REMARQUE 1. En vertu de la formule (7) les différentielles totales dx, dy, dz des variables x, y, z sont respectivement égales à Δx, Δy, Δz. C'est pourquoi nous avons:

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)\,dx + f'_y(x, y, z)\,dy + f'_z(x, y, z)\,dz. \tag{9}$$

Ainsi (cf. exemple 1),

$$d(2x^2 - y^2 - z) = 4x\,dx - 2y\,dy - dz. \tag{10}$$

La formule (9) est invariante (cf. § 432), de sorte qu'elle est préférable à (7).

REMARQUE 2. Si u est une fonction d'une seule variable, la différentielle totale devient la différentielle ordinaire et l'unique dérivée partielle la dérivée ordinaire.

§ 431. Interprétation géométrique de la différentielle totale (fonction de deux variables)

Supposons que le plan P soit tangent (§ 435) au point $M(x, y, z)$ à la surface S représentant la fonction $z = f(x, y)$ (§ 421, 3). Faisons coïncider la projection $M_0(x, y, 0)$ du point M avec $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, 0)$.

La cote du *plan tangent* obtient alors un accroissement égal à la différentielle totale:

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y. \tag{1}$$

L'accroissement correspondant de la cote de la *surface* S est égal à l'accroissement total Δz de la fonction $z = f(x, y)$.

Par conséquent (§ 430, définition), la distance entre la surface S et le plan tangent P (comptée dans la direction de l'axe des z) est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à la distance

$$\rho = M_0M_1 = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

(cf. § 230).

§ 432. Invariance de la différentielle totale première

L'expression $f'_x\Delta x + f'_y\Delta y + f'_z\Delta z$ est (§ 430) la différentielle totale de la fonction $u = f(x, y, z)$ si x, y, z sont considérées comme des variables (*). Si par contre les variables x, y, z sont elles-mêmes des fonctions d'une, de deux ou d'un plus grand nombre de variables, cette expression n'est pas en règle générale la différentielle totale. Au contraire, l'expression

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$$

est toujours la différentielle totale de la fonction $f(x, y, z)$ (cf. § 234).

EXEMPLE 1. Considérons la fonction $u = xy$ des variables x, y. Nous avons

$$du = u'_x dx + u'_y dy = y dx + x dy. \tag{1}$$

Cette formule est vraie également dans le cas où x, y sont des fonctions des variables t, s données par les formules

$$x = t^2 + s^2, \qquad y = t^2 - s^2. \tag{2}$$

En effet, nous avons dans ce cas:

$$u = t^4 - s^4, \tag{3}$$

$$du = u'_t dt + u'_s ds = 4t^3dt - 4s^3ds. \tag{4}$$

Nous obtenons ce même résultat en vertu de la formule (1) si l'on remplace x, y par leurs expressions (2) et dx, dy par les expressions

$$dx = 2t\,dt + 2s\,ds, \qquad dy = 2t\,dt - 2s\,ds, \tag{5}$$

(*) On suppose que la différentielle totale existe. Au sujet des fonctions possédant des dérivées partielles, mais ne possédant pas de différentielle totale, cf. § 434.

trouvées à partir des formules (2). Si au lieu de (1) on prend la formule

$$du = y\Delta x + x\Delta y, \tag{6}$$

elle sera erronée pour les variables t, s.

EXEMPLE 2. La formule (1) est vraie également dans le cas où x et y sont des fonctions d'une seule variable.

EXEMPLE 3. La formule $d \operatorname{arc\,tg} x = \dfrac{dx}{1+x^2}$ reste vraie si l'on pose $x = rst$:

$$d \operatorname{arc\,tg} rst = \frac{d(rst)}{1 + r^2s^2t^2}.$$

§ 433. Procédés de dérivation

Pour obtenir les dérivées partielles, il est commode dans la plupart des cas de trouver *préalablement* la différentielle totale. Cette dernière est calculée d'après les mêmes règles que la différentielle d'une fonction d'une seule variable (cf. §§ 432 et 430, remarque 2).

EXEMPLE 1. Trouver les dérivées partielles de la fonction

$$u = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}.$$

SOLUTION. Calculons la différentielle totale d'après les règles des §§ 247 et 240. Nous obtenons:

$$du = \frac{d\dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y^2}{x^2}} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Les coefficients de dx, dy sont les dérivées partielles $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$. C'est pourquoi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Le calcul direct des dérivées aurait exigé plus de temps et d'attention.

EXEMPLE 2. Trouver les dérivées partielles de la fonction $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUTION.

$$d \ln \sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2} d \ln (x^2+y^2) = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{4}$$

Parfois, pour dériver une fonction d'une seule variable, il est commode d'utiliser la différentielle totale d'une fonction de deux, trois, etc., variables.

Exemple 3. Trouver la différentielle de la fonction $u = x^x$.

Solution. Cherchons dy^z (y et z sont les variables indépendantes); à cette fin trouvons d'abord les dérivées partielles. Posons ensuite $y = x$, $z = x$:

$$dy^z = \frac{\partial u}{\partial y}\,dy + \frac{\partial u}{\partial z}\,dz = zy^{z-1}dy + y^z \ln y\, dz, \tag{5}$$

$$dx^x = xx^{x-1}\,dx + x^x \ln x\, dx = x^x(1 + \ln x)\, dx. \tag{6}$$

Ayant une certaine habitude on se borne à écrire la formule (6) en effectuant le reste mentalement.

§ 434. Fonctions différentiables

Une fonction $u = f(x, y, z)$ possédant au point M_0 une différentielle totale est dite *différentiable* en ce point.

Une fonction différentiable possède toujours les dérivées partielles finies $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ et les différentielles partielles

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x, \qquad d_y u = \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y, \qquad d_z u = \frac{\partial u}{\partial z}\,\Delta z$$

dont la somme donne la différentielle totale (§ 430).

Toutefois, l'existence des différentielles partielles (ou des dérivées partielles finies) n'assure pas l'existence de la différentielle totale.

Exemple. Considérons la fonction $f(x, y)$ définie au point $M_0(0, 0)$ par la formule

$$f(0, 0) = 4, \tag{1}$$

et aux autres points par la formule

$$f(x, y) = 4 + 2x + y + \frac{x^2y}{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Cette fonction est continue au point $M_0(0, 0)$ et possède en ce point des dérivées partielles

$$f'_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - 4}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - 4}{\Delta y} = 1.$$

Toutefois, l'expression $f'_x(0, 0)\,\Delta x + f'_y(0, 0)\,\Delta y = 2\Delta x + \Delta y$ n'est pas la différentielle totale. En effet, l'accroissement total est de la forme

$$\Delta f(0, 0) = f(\Delta x, \Delta y) - 4 = (2\Delta x + \Delta y) + \frac{\Delta x^2\,\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}.$$

Le premier terme n'est pas la différentielle totale, car le second terme $\varepsilon = \frac{\Delta x^2 \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ n'est pas un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à

$$\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

autrement dit, le rapport $\varepsilon : \rho$ ne tend pas vers zéro quand $M(\Delta x, \Delta y) \to 0$. Ainsi, si M tend vers M_0 suivant le rayon $y = 3t$, $x = 4t$, alors $\varepsilon : \rho$ conserve la valeur $\frac{36}{125}$.

Un autre exemple de fonction non différentiable est considéré au § 442 (exemple 2).

REMARQUE 1. Si toutes les dérivées partielles sont continues au point considéré, la fonction est différentiable en ce point. Dans l'exemple précédent les deux dérivées partielles étaient discontinues au point M_0 (0, 0).

REMARQUE 2. En règle générale les fonctions élémentaires sont différentiables. La différentielle totale peut ne pas exister qu'en certains points ou le long de certaines courbes.

§ 435. Plan tangent et normale à une surface

DÉFINITION 1. Menons sur la surface S, par le point M de cette surface (fig. 434) des courbes AA', BB', CC', ... possédant au point M des tangentes TT', QQ', SS', ... Le plan P dans lequel se trouvent toutes les tangentes possibles est appelé *plan tangent à la surface S au point M*.

EXEMPLE 1. Supposons que la droite MT soit tangente à une courbe sphérique. Dans ce cas MT est perpendiculaire au rayon, autrement dit elle se trouve dans le plan P passant par le point M et perpendiculaire au rayon. Par conséquent, P est le plan tangent à la sphère.

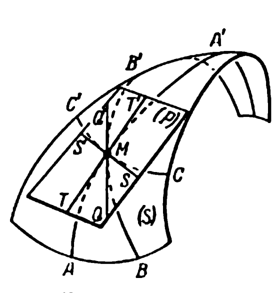


FIG. 434

EXEMPLE 2. La surface conique n'a pas de plan tangent au sommet K. En effet, si on mène par K toutes les courbes possibles, leurs tangentes au point K ne seront pas situées dans un même plan.

REMARQUE. La surface $z = f(x, y)$ n'a pas de plan tangent au point M si, et seulement si, la fonction $f(x, y)$ n'est pas différentiable au point considéré. Les surfaces physiquement réalisées ne peuvent être dépourvues de plan tangent qu'en certains points (*points coniques*) ou le long de certaines courbes (*arêtes*) (cf. § 434, remarque 2).

EXEMPLE 3. La fonction $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + 2x + y + 4$ complétée par la condition $f(0, 0) =$

-4, n'est pas différentiable au point $x = 0$, $y = 0$ (§ 434, exemple). Conformément à cela la surface

$$z = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} + 2x + y + 4 \tag{1}$$

n'a pas de plan tangent au point $A(0, 0, 4)$(*).

Définition 2. On appelle *normale* à la surface S au point M la normale au plan tangent passant par le point M.

Exemple 4. La normale à la surface sphérique en chacun de ses points passe par le centre de la sphère.

§ 436. Equation du plan tangent

1. Le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ est représenté par l'équation

$$Z - z = p(X - x) + q(Y - y), \tag{1}$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes, x, y, z les coordonnées du point de contact, p, q les valeurs correspondantes des dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Explication. Le plan (1) passe par la droite

$$Z - z = p(X - x), \quad Y - y = 0 \tag{Λ}$$

ce que l'on vérifie par substitution dans l'équation (1). La droite (Λ) est tangente à la section menée par le point (x, y, z) parallèlement au plan XOZ (§ 426). Nous nous convainquons de même que le plan (1) passe par la tangente à la section parallèle à ZOY. Cela signifie (§ 435) que le plan (1) coïncide avec le plan tangent (si ce dernier existe; cf. § 435, remarque).

Exemple 1. Trouver l'équation du plan tangent au paraboloïde hyperbolique $z = \frac{x^2 - y^2}{2a}$ au point $\left(2a, a, \frac{3}{2}a\right)$.

(*) Cette surface est un cône (non circulaire) de sommet A. En effet, toute droite

$$y = ax, \quad z = \left(\frac{a}{1 + a^2} + a + 2\right) x + 4 \tag{2}$$

(a est une constante) passe par A et est située sur la surface (1), ce que l'on peut vérifier en portant les expressions (2) dans (1). L'ensemble des droites (2) forme une surface conique.

SOLUTION. Nous avons: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{a} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{a} = -1.$
L'équation cherchée du plan tangent est

$$Z - \frac{3}{2}a = 2(X - 2a) - (Y - a)$$

ou

$$Z = 2X - Y - \frac{3}{2}a.$$

2. Si la surface est représentée par une équation de la forme $F(x, y, z) = 0$, l'équation du plan tangent est

$$F'_x(X - x) + F'_y(Y - y) + F'_z(Z - z) = 0. \tag{2}$$

L'équation (1) est un cas particulier de l'équation (2).

EXEMPLE 2. Trouver l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \tag{3}$$

au point $M(x, y, z)$.

SOLUTION. Nous avons: $F'_x = \frac{2x}{a^2},\quad F'_y = \frac{2y}{b^2},\quad F'_z = \frac{2z}{c^2}.$
L'équation cherchée est

$$\frac{2x}{a^2}(X - x) + \frac{2y}{b^2}(Y - y) + \frac{2z}{c^2}(Z - z) = 0$$

ou, en simplifiant par 2 et en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde,

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} - 1 = 0.$$

REMARQUE. L'équation du plan tangent s'obtient le plus facilement de l'équation de la surface donnée de la manière suivante: nous différentions l'équation donnée et au lieu de dx, dy, dz nous écrivons $X - x$, $Y - y$, $Z - z$. Ainsi, en différentiant l'équation (3) nous obtenons:

$$\frac{2x\,dx}{a^2} + \frac{2y\,dy}{b^2} + \frac{2z\,dz}{c^2} = 0. \tag{4}$$

Remplaçant les différentielles dx, dy, dz par les différences $X - x$, $Y - y$, $Z - z$ nous obtenons l'équation (4).

§ 437. Equations de la normale

La normale à la surface $F(x, y, z) = 0$ au point $M(x, y, z)$ est représentée par les équations

$$\frac{X - x}{F'_x} = \frac{Y - y}{F'_y} = \frac{Z - z}{F'_z} \tag{1}$$

(cf. §§ 436 et 156). En particulier, si la surface est donnée par l'équation $z = f(x, y)$, les équations de la normale sont (avec les notations du § 436)

$$\frac{X - x}{p} = \frac{Y - y}{q} = \frac{Z - z}{-1}. \tag{2}$$

Exemple. L'équation de la normale à l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (cf. § 436, exemple 2) est

$$\frac{a^2(X - x)}{x} = \frac{b^2(Y - y)}{y} = \frac{c^2(Z - z)}{z}.$$

§ 438. Dérivation d'une fonction composée

La grandeur w est appelée *fonction composée* si elle est considérée comme une fonction des variables (auxiliaires) $x, y, \ldots$ qui à leur tour dépendent d'une ou de plusieurs variables $u, v, \ldots$ (cf. § 236).

La recherche de la différentielle totale d'une fonction composée n'exige pas de règles spéciales (du fait de l'invariance de l'expression de la différentielle; § 432). Après que l'on a trouvé la différentielle totale, on obtient automatiquement les expressions des dérivées partielles (§ 433). La forme générale de ces expressions est donnée au § 440.

Exemple. Trouver la différentielle totale et les dérivées partielles de la fonction

$$w = e^{uv} \sin (u + v). \tag{1}$$

Si l'on met w sous la forme $e^x \sin y$, où $x = uv$ et $y = u + v$, w est une fonction composée des variables u et v. On trouve la différentielle totale comme si x et y étaient des variables indépendantes:

$$dw = e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy = e^x(\sin y\, dx + \cos y\, dy).$$

Portant ici $x = uv$, $y = u + v$ nous trouvons:

$$dw = e^{uv}[\sin(u + v)\,(v\, du + u\, dv) + \cos(u + v)\,(du + dv)]. \tag{2}$$

C'est la différentielle totale de la fonction considérée; ses dérivées partielles sont les coefficients de du et dv. Cela donne précisément

$$\frac{\partial w}{\partial u} = e^{uv}[v\sin(u+v) + \cos(u+v)], \tag{3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = e^{uv}[u\sin(u+v) + \cos(u+v)]. \tag{4}$$

REMARQUE. On n'introduit pas en pratique des notations particulières pour les variables auxiliaires. Dans l'exemple 1 on procède ainsi:

$$dw = d[e^{uv}\sin(u+v)] = \sin(u+v)\,de^{uv} + e^{uv}d\sin(u+v) =$$
$$= \sin(u+v)\,e^{uv}d(uv) + e^{uv}\cos(u+v)\,d(u+v).$$

Si l'on explicite les expressions $d(uv)$, $d(u+v)$, on obtient l'égalité (2).

§ 439. Passage des coordonnées rectangulaires aux coordonnées polaires

Soient $z = f(x, y)$ une fonction des coordonnées rectangulaires x, y et f'_x, f'_y les valeurs connues des dérivées partielles au point M. Les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ par rapport aux coordonnées polaires sont trouvées d'après les formules

$$\frac{\partial z}{\partial r} = f'_x\cos\varphi + f'_y\sin\varphi, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = r(f'_y\cos\varphi - f'_x\sin\varphi). \tag{1}$$

EXPLICATION. Comme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ (§ 73), z est une fonction composée de r, φ. Nous trouvons alors d'après le procédé du § 438:

$$dz = f'_x dx + f'_y dy = f'_x d(r\cos\varphi) + f'_y d(r\sin\varphi) =$$
$$= f'_x(\cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi) + f'_y(\sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi).$$

Les dérivées $\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi}$ sont les coefficients de dr, $d\varphi$.

EXEMPLE. D'après les valeurs

$$f'_x(3, 4) = 7, \qquad f'_y(3, 4) = 2$$

trouver les valeurs de $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ au point (3, 4).

SOLUTION. Nous avons au point considéré: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Nous trouvons alors en vertu des formules (1):

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 7 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = 5{,}8; \qquad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 5\left(2 \cdot \frac{3}{5} - 7 \cdot \frac{4}{5}\right) = -22.$$

§ 440. Formules des dérivées d'une fonction composée

Soit w une fonction composée d'un nombre arbitraire de variables $u, v, \ldots, t$ (§ 438) par l'intermédiaire des variables $x, y, \ldots, z$ (en nombre quelconque). Nous avons alors

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial w}{\partial u} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} + \ldots + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}, \\
\dfrac{\partial w}{\partial v} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \ldots + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial v}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial t} + \ldots + \dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial t},
\end{array}\right\} \qquad (1)$$

autrement dit, la dérivée partielle par rapport à n'importe quelle variable est égale à la somme des produits des dérivées partielles par rapport à toutes les variables auxiliaires par les dérivées de ces variables auxiliaires par rapport à la variable correspondante.

EXPLICATION. Les formules (1) s'obtiennent à partir del 'expression de la différentielle totale

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\partial z, \qquad (2)$$

à l'aide de la substitution de l'expression de dx

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \ldots + \frac{\partial x}{\partial t}dt \qquad (3)$$

et des expressions analogues de $dy, \ldots, dz$ (cf. § 438).

§ 441. Dérivée totale

Soit w une fonction des variables $x, y, \ldots, z$:

$$w = f(x, y, \ldots, z), \qquad (1)$$

où x est la variable indépendante et toutes les autres variables dépendent de x(*). La dérivée de w par rapport à x, calculée en tenant compte de cette relation, est appelée *dérivée totale* et notée $\frac{dw}{dx}$ à la différence de la dérivée partielle $\frac{\partial w}{\partial x}$ (§ 425). La dérivée totale s'exprime à l'aide de la formule

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \ldots + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}. \tag{2}$$

Elle s'obtient de l'expression de la différentielle totale dw (en divisant par dx).

EXEMPLE 1. Trouver la dérivée totale de la fonction $w = x^3 e^{y^2}$, où y est une fonction de x.

SOLUTION.

$$dw = e^{y^2} d(x^3) + x^3 de^{y^2} = 3e^{y^2}x^2dx + x^3e^{y^2}d(y^2) = 3e^{y^2}x^2dx + 2x^3e^{y^2}y\,dy,$$

$$\frac{dw}{dx} = 3e^{y^2}x^2 + 2x^3ye^{y^2}\frac{dy}{dx}.$$

EXEMPLE 2. Trouver la dérivée totale de la fonction $w = xy'$.

SOLUTION. Le rôle de la variable y est ici joué par la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$. Nous trouvons, en vertu de la formule (2):

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = y' + x\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Nous obtenons la même expression en divisant terme à terme l'égalité

$$dw = y'dx + x\,dy' = y'dx + xy''dx$$

par dx.

§ 442. Dérivation d'une fonction implicite de plusieurs variables

RÈGLE 1. L'équation

$$F(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

définit sous certaines conditions (**) la variable z en tant que fonction implicite des variables x, y. Pour trouver la différentielle totale de cette

(*) C'est un cas particulier de la fonction composée (§ 438) d'une seule variable u (les variables $y, \ldots, z$ dépendent de u de façon arbitraire, et x est lié avec u par la relation $x = u$).

(**) Cf. plus bas remarque 1.

fonction, il faut différentier l'équation (1), c'est-à-dire égaler à zéro la différentielle totale du premier membre. L'égalité obtenue doit ensuite être résolue par rapport à dz, ce qui donnera la différentielle totale de la fonction z. Les coefficients de dx et dy donneront les dérivées partielles correspondantes.

Nous procéderons de même pour un nombre quelconque de variables.

EXEMPLE 1. Trouver la différentielle totale et les dérivées partielles de la fonction implicite z des variables x, y donnée par l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \tag{2}$$

au point $x = 1$, $y = -2$, $z = -2$.

SOLUTION. Nous trouvons en différentiant:

$$2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz = 0.$$

Résolvant cette égalité par rapport à dz, nous obtenons la différentielle totale de la fonction z (en un point arbitraire)

$$dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dy. \tag{3}$$

Au point considéré (1, — 2, — 2) nous avons:

$$dz = \frac{1}{2}\,dx - dy. \tag{4}$$

Les coefficients de dx et dy donnent les valeurs des dérivées partielles en ce point:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -1. \tag{5}$$

VÉRIFICATION. Résolvant l'équation (2) par rapport à z, nous obtenons:

$$z = -\sqrt{9 - x^2 - y^2} \tag{6}$$

(nous prenons le signe moins devant le radical, car pour $x = 1$, $y = -2$ nous devons avoir $z = -2$). Nous trouvons de (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}.$$

Portant ici les valeurs $x = 1$, $y = -2$, nous retrouvons (5).

REMARQUE 1. On suppose dans la règle 1 que la fonction $F(x, y, z)$ est différentiable en un certain point M_0 (x_0, y_0, z_0) vérifiant l'équation (1) et dans un voisinage suffisamment petit de ce point (c'est-à-dire en tous les points d'une boule de centre en M_0). On suppose, en outre, que l'équation obtenue par différentiation est univoquement résoluble par rapport à dz (autrement dit, le coefficient de dz est différent de zéro). On peut affirmer dans ces conditions:

1) que l'équation (1) définit effectivement z en tant que fonction implicite des variables x, y, celle-ci est déterminée dans un certain cercle de centre (x_0, y_0) et prend la valeur z_0 quand $x = x_0$, $y = y_0$;

2) que la fonction z est différentiable dans le cercle mentionné et, en particulier, au point (x_0, y_0).

Dans l'exemple 1 les conditions susmentionnées étaient vérifiées. Dans l'exemple suivant on considère l'un des cas où elles ne le sont pas.

EXEMPLE 2. L'équation

$$x^3 + 8y^3 - z^3 = 0 \tag{7}$$

définit z en tant que fonction implicite de x et y. L'expression explicite de cette fonction est

$$z = \sqrt[3]{x^3 + 8y^3}. \tag{8}$$

Si nous avions appliqué la règle 1 pour trouver la différentielle totale de la fonction z au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, nous aurions obtenu de (7) l'égalité

$$3x^2dx + 24y^2dy - 3z^2dz = 0. \tag{9}$$

Au point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ cette égalité n'admet pas une solution univoque par rapport à dz, car elle devient l'identité $0 = 0$. Ainsi, la règle 1 ne permet de trouver ni la différentielle totale ni les dérivées partielles de la fonction z au point considéré. Une étude complémentaire montre qu'en ce point la fonction z n'est pas différentiable (§ 434), mais possède les dérivées partielles

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2\ (^*)$$

RÈGLE 2. Le système de deux équations

$$F_1(x, y, z, u, v) = 0, \quad F_2(x, y, z, u, v) = 0 \tag{10}$$

définit sous certaines conditions connues (**) deux variables u, v en tant que fonctions implicites de x, y, z. Pour trouver les différentielles totales de ces fonctions il faut différentier les équations (10). Le système obtenu d'égalités doit être résolu par rapport à du, dv, et nous trouverons les différentielles totales des fonctions u, v. Les coefficients de dx, dy, dz seront les dérivées partielles correspondantes.

(*) En effet, en posant $y = 0$, nous obtenons $z = \sqrt[3]{x^3} = x$, de sorte que $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y=0} = 1$; posant $x = 0$, nous obtenons $z = \sqrt[3]{8y^3} = 2y$, de sorte que $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = 2$. Or l'expression $\Delta x + 2\Delta y$ n'est pas la différentielle totale car la différence

$$\Delta z - (\Delta x + 2\Delta y) =$$

n'est pas un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Ains s le point (x, y) tend vers le point $(0, 0)$, disons, suivant la bissectrice du premier quadran le rapport $\frac{\varepsilon}{\rho}$ admet la valeur

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x^3 + 8\Delta y^3} - (\Delta x + 2\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \quad \frac{\sqrt[3]{9} - 3}{\sqrt{2}},$$

autrement dit, ne tend pas vers zéro.

(**) Cf. plus bas remarque 2.

Nous procéderons de même quand le nombre d'équations du système sera supérieur à deux (pour un nombre arbitraire de variables).

EXEMPLE 3. Trouver les différentielles totales et les dérivées partielles des fonctions implicites u, v définies par le système d'équations

$$x + y + u + v = a, \qquad x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = b^2. \tag{11}$$

SOLUTION. Nous trouvons en différentiant

$$dx + dy + du + dv = 0,$$
$$x\,dx + y\,dy + u\,du + v\,dv = 0. \tag{12}$$

Résolvant le système (12) par rapport à du, dv nous obtenons les différentielles totales des fonctions u, v:

$$du = \frac{(v-x)\,dx + (v-y)\,dy}{u-v}, \qquad dv = \frac{(u-x)\,dx + (u-y)\,dy}{v-u}. \tag{13}$$

Les coefficients de dx, dy donnent les dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v-x}{u-v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v-y}{u-v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u-x}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u-y}{v-u}. \tag{14}$$

REMARQUE 2. On suppose dans la règle 2 que les fonctions $F_1(x, y, z, u, v) = 0$, $F_2(x, y, z, u, v) = 0$ sont différentiables en un certain point $M_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ et dans un voisinage suffisamment petit de ce point. On suppose en outre que le système d'équations obtenu par différentiation est univoquement résoluble en du, dv (autrement dit, le déterminant formé des coefficients de du, dv est non nul). On peut affirmer dans ces conditions:

1) que le système (10) définit en effet u, v en tant que fonctions implicites des variables x, y, z; ces fonctions sont définies dans une certaine boule de centre (x_0, y_0, z_0) et prennent les valeurs u_0, v_0 pour $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$;

2) que les fonctions u, v sont différentiables dans la boule mentionnée et en particulier au point (x_0, y_0, z_0).

§ 443. Dérivées partielles d'ordres supérieurs

DÉFINITION 1. *On appelle dérivées partielles secondes (du second ordre)* de la fonction $z = f(x, y)$ les dérivées partielles des fonctions

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y), \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y). \tag{1}$$

Il existe quatre dérivées partielles secondes. La dérivée partielle de $\frac{\partial z}{\partial x}$ par rapport à x est notée $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, ou $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$, ou $f''_{xx}(x, y)$. On

note les autres dérivées de manière analogue, autrement dit, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}=f''_{xx}(x, y), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\,\partial y}=f''_{xy}(x, y), \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y\,\partial x}=f''_{yx}(x, y), \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}=f''_{yy}(x, y). \tag{5}$$

Les dérivées secondes (3) et (4) sont dites *croisées*.

THÉORÈME 1. Les dérivées croisées du second ordre (elles diffèrent l'une de l'autre par l'ordre de dérivation) sont égales (à condition qu'elles soient continues au point considéré).

EXEMPLE 1. Trouvons les dérivées partielles du second ordre de la fonction $z = x^3y^2 + 2x^2y - 6$. Nous avons:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2+4xy, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y+2x^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2+4y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x^3,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=6x^2y+4x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}=6x^2y+4x.$$

Les dérivées croisées $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ sont égales.

REMARQUE 1. En vertu du théorème 1 les quatre dérivées partielles du second ordre se ramènent à trois:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

DÉFINITION 2. Les dérivées partielles des dérivées partielles secondes sont appelées *dérivées partielles troisièmes* (ou *du troisième ordre*) et notées f'''_{xxx}, f'''_{yyy}, f'''_{xxy}, f'''_{xyx}, f'''_{xyy}, etc., ou $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$, etc.

THÉORÈME 2. Les dérivées troisièmes croisées ne diffèrent que par l'ordre de dérivation et sont égales (si elles sont continues au point considéré).

Par exemple, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \dfrac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial x}$.

EXEMPLE 2. Les dérivées partielles du troisième ordre de la fonction $z = x^3y^2 + 2x^2y - 6$ (cf. exemple 1) sont:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = 6y^2, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = 12xy + 4,$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 6x^2.$$

REMARQUE 2. En vertu du théorème 2 les huit dérivées partielles du troisième ordre se ramènent à quatre:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}.$$

REMARQUE 3. On définit et on note de manière analogue les dérivées partielles du quatrième ordre et d'ordres supérieurs de la fonction $f(x, y)$, ainsi que des fonctions de trois, quatre et d'un plus grand nombre de variables. Pour tous ces cas on a des théorèmes analogues aux théorèmes 1 et 2.

§ 444. Différentielles totales d'ordres supérieurs

Donnons l'accroissement total (§ 427) Δz à la fonction $z = f(x, y)$; puis *en conservant les valeurs* Δx, Δy, donnons l'accroissement total $\Delta(\Delta z)$ à la grandeur Δz (en la considérant comme une fonction de x, y). Nous obtenons la *différence seconde* $\Delta^2 z$ de la fonction z.

Supposons que $\Delta^2 z$ peut être mise sous forme de somme de deux termes:

$$\Delta^2 z = (r\Delta x^2 + 2s\Delta x\,\Delta y + t\Delta y^2) + \alpha, \tag{1}$$

où r, s, t ne dépendent ni de Δx ni de Δy et α est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\rho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Le premier terme est alors appelé *différentielle* (totale) *seconde* de la fonction z et noté d^2z.

EXEMPLE 1. Considérons la fonction $z = x^3y^2$. Nous trouvons:

$$\Delta z = (x + \Delta x)^3 (y + \Delta y)^2 - x^3y^2,$$

$$\Delta^2 z = (x + 2\Delta x)^3 (y + 2\Delta y)^2 - 2(x + \Delta x)^3 (y + \Delta y)^2 +$$
$$+ x^3y^2 = (6xy^2\Delta x^2 + 12x^2y\Delta x\,\Delta y + 2x^3\Delta y^2) + \alpha, \tag{2}$$

où α est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à ρ^2. Le premier terme de la somme (2) est de la forme $r\Delta x^2 + 2s\Delta x\,\Delta y + t\Delta y^2$, et les grandeurs $r = 6xy^2$, $s = 6x^2y$, $t = 2x^3$ ne dépendant ni de Δx ni de Δy. Par conséquent, le premier terme est la différentielle seconde de la fonction $z = x^3y^2$:

$$d^2z = 6xy^2\,\Delta x^2 + 12x^2y\,\Delta x\,\Delta y + 2x^3\Delta y^2. \tag{3}$$

THÉORÈME 1. Les grandeurs r, s, t dans la formule (1) sont égales aux dérivées partielles secondes correspondantes de la fonction z:

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

EXEMPLE 2. Nous avions dans l'exemple précédent

$$r = 6xy^2 = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad s = 6x^2y = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}, \qquad t = 2x^3 = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

EXPRESSION DE LA DIFFÉRENTIELLE SECONDE. Nous avons en vertu du théorème 1:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\Delta x^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\Delta x\,\Delta y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\Delta y^2. \tag{4}$$

REMARQUE. Comme

$$\Delta x = dx, \qquad \Delta y = dy$$

(§ 430, remarque 1), nous pouvons écrire au lieu de (4):

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \tag{5}$$

A la différence de l'expression correspondante de la différentielle première (cf. § 432) la formule n'est généralement pas vraie si x et y ne sont pas des variables indépendantes (cf. renvoi du § 258).

THÉORÈME 2. Si l'on considère que les différentielles dx, dy ne dépendent ni de x, ni de y, la différentielle seconde d^2z est égale à la différentielle de la différentielle première dz (cf. § 258, théorème 2):

$$d[df(x, y)] = d^2f(x, y). \tag{6}$$

EXEMPLE 3. Soit $z = x^3y^2$. Nous avons:

$$dz = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy.$$

Dérivons encore une fois en supposant dx, dy constants. Nous obtenons:

$$d(dz) = d(3x^2y^2)\,dx + d(2x^3y)\,dy = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2.$$

Or, nous avons obtenu la différentielle totale seconde de la fonction x^3y^2 (cf. exemple 1).

Les différentielles totales secondes, troisièmes, quatrièmes, etc. (d^3z, d^4z, etc.) sont définies de manière analogue et s'expriment par les formules suivantes:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\,\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3, \tag{7}$$

$$d^4z = \frac{\partial^4 z}{\partial x^4}\,dx^4 + 4\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^3\,\partial y}\,dx^3\,dy + 6\,\frac{\partial^4 z}{\partial x^2\,\partial y^2}\,dx^2\,dy^2 + 4\,\frac{\partial^4 z}{\partial x\,\partial y^3}\,dx\,dy^3 + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\,dy^4. \tag{8}$$

Les facteurs numériques sont égaux aux coefficients binomiaux correspondants.

Les formules (7), (8), etc., ne sont pas vraies en règle générale si x et y ne sont pas les variables indépendantes.

Tout ce qui vient d'être dit peut être étendu aux fonctions de rois, quatre et d'un plus grand nombre de variables.

445. Différentiation répétée

'our rechercher les dérivées partielles d'ordre supérieur il est com- iode de trouver au préalable la différentielle totale d'ordre corres- ondant.

Exemple. Trouver les dérivées partielles de la fonction $z = x^3y^2$ isqu'au troisième ordre inclus.

Solution. Nous trouvons d'abord la différentielle première dz:

$$dz = 3x^2y^2\,dx + 2x^3y\,dy, \tag{1}$$

iis la différentielle seconde, en différentiant (1), dx, dy étant pposés constants:

$$d^2z = 6xy^2\,dx^2 + 12x^2y\,dx\,dy + 2x^3\,dy^2 \tag{2}$$

. § 444, exemple 3). En différentiant (2), tout en considérant de nou- ıu dx, dy constants, nous obtenons:

$$d^3z = (6y^2\,dx^3 + 12xy\,dx^2\,dy) + (24xy\,dx^2\,dy + 12x^2\,dx\,dy^2) + 6x^2\,dx\,dy^2,$$

$$d^3z = 6y^2\,dx^3 + 3\cdot 12xy\,dx^2\,dy + 3\cdot 6x^2\,dx\,dy^2. \tag{3}$$

Nous trouvons alors d'après les coefficients des expressions (1), (2), (3), compte tenu des formules (5) et (7) du § 444:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6xy^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x^3;$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 6y^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y} = 12xy, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2} = 6x^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = 0.$$

§ 446. Notation conventionnelle des différentielles

Les expressions des différentielles se compliquent avec la croissance de leur ordre. Pour simplifier on introduit la *notation conventionnelle* suivante de la différentielle d'ordre k de la fonction $z = f(x, y)$:

$$d^kz = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^k z. \qquad (1)$$

On la comprend de façon suivante: tout d'abord «nous élevons à la $k^{\text{ième}}$ puissance» le binôme $\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy$ comme si les symboles ∂x, ∂y, ∂ étaient des grandeurs algébriques indépendantes. Puis «nous ouvrons les parenthèses», en affectant à chaque symbole ∂^k le facteur z. Après cela chaque symbole acquiert son sens véritable.

EXEMPLE. L'écriture $d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^3 z$ veut dire: «en élevant au cube» nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}\,dy^3\right) z,$$

«en ouvrant les parenthèses» nous trouvons:

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\,dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\,dx^2\,dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\,dx\,dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\,dy^3$$

(cf. (7) § 444).

REMARQUE. Pour le cas de trois, quatre ou d'un plus grand nombre de variables l'écriture conventionnelle est la même; par exemple l'écriture

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\,dz\right)^2 u$$

signifie que

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \partial y^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx\, dy +$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy\, dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} dz\, dx.$$

§ 447. Formule de Taylor pour les fonctions de plusieurs variables

Pour une fonction d'une seule variable on peut écrire la formule de Taylor (§ 271) sous la forme:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{1}{1!} f'(x)\, \Delta x + \frac{1}{2!} f''(x)\, \Delta x^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x)\, \Delta x^n +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x + \theta \Delta x)\, \Delta x^{n+1}, \qquad (1)$$

où θ est un certain nombre positif inférieur à l'unité (*):

$$0 < \theta < 1. \qquad (2)$$

Ici les expressions $f'(x)\, \Delta x,\ f''(x)\, \Delta x^2, \ldots$ sont les différentielles premières, secondes, etc.

Pour les fonctions de plusieurs variables la formule de Taylor (**) est construite de manière analogue, seulement on prend les différentielles *totales*. Ainsi, pour le cas de deux variables nous avons pour $n = 2$:

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{1}{1!} [f'_x(x, y)\, \Delta x + f'_y(x, y)\, \Delta y] +$$

$$+ \frac{1}{2!} [f''_{xx}(x, y)\, \Delta x^2 + 2 f''_{xy}(x, y)\, \Delta x\, \Delta y + f''_{yy}(x, y)\, \Delta y^2] +$$

$$+ \frac{1}{3!} [f'''_{xxx}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\, \Delta x^3 + 3 f'''_{xxy}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\, \Delta x^2 \Delta y +$$

$$+ 3 f'''_{xyy}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)\, \Delta x\, \Delta y^2 + f'''_{yyy}(x + \theta\, \Delta x,\ y + \theta\Delta y)\, \Delta y^3], \qquad (3)$$

où θ vérifie l'inégalité (2).

(*) Le nombre ξ figurant dans (1) § 271 est compris entre x et $x + \Delta x$; c'est pourquoi la différence $\xi - x$ a le même signe que Δx et est inférieur à Δx en valeur absolue. Cela signifie que le quotient $(\xi - x) : \Delta x$ est un certain nombre positif θ inférieur à l'unité. Nous trouvons de l'égalité $(\xi - x) : \Delta x = \theta$ que $\xi = x + \theta\, \Delta x$.

(**) Les conditions de validité de la formule sont spécifiées dans la remarque.

Les expressions entre crochets sont (§ 444) les différentielles totales. Dans le dernier terme les dérivées partielles sont prises pour les valeurs intermédiaires des variables (*).

La formule de Taylor pour un nombre arbitraire de termes ne peut être présentée sous une forme compacte (même dans le cas de deux variables) qu'à l'aide des notations conventionnelles du § 446. Elle s'écrit alors

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right) f(x, y) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial}{\partial y}\Delta y\right)^{n+1} f(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \quad (4)$$

ou

$$\Delta f(x, y) = \frac{1}{1!} df(x, y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x, y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y) \quad (5)$$

et de manière analogue pour un plus grand nombre de variables.

REMARQUE. La formule de Taylor est vraie à condition que la fonction $f(x, y)$ possède une différentielle totale du $(n + 1)^{\text{ième}}$ ordre en tous les points du segment reliant $M(x, y)$ et $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

EXEMPLE. Vérifions la formule (3) sur l'exemple de la fonction

$$f(x, y) = xy^2$$

pour $x = y = 1$, $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$. Nous aurons:

$$(x + \Delta x)(y + \Delta y)^2 = xy^2 + [y^2\Delta x + 2xy\Delta y] + \frac{1}{2}[4(y + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y + 2(x + \theta\Delta x)\Delta y^2].$$

En substituant les valeurs données nous obtenons l'équation $0{,}004 = 0{,}012\,\theta$, d'où $\theta = \frac{1}{3}$, autrement dit θ est effectivement compris entre zéro et l'unité.

(*) Le point $\overline{M}(x + \theta\Delta x, y + \theta\Delta y)$ se trouve sur le segment reliant les points $M(x, y)$ et $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$. Le nombre θ donne le rapport

$$M\overline{M} : MM_1.$$

§ 448. Extrémum (maximum et minimum) d'une fonction de plusieurs variables

DÉFINITION. La fonction $f(x, y)$ admet un *maximum* (un *minimum*) au point $P_0(a, b)$ si en tous les points suffisamment proches de P_0 la valeur de $f(x, y)$ est plus petite (plus grande) que la valeur $f(a, b)$ (cf. § 275).

GÉOMÉTRIQUEMENT, au point P_0 (fig. 435) le point M_0 de la surface $z = f(x, y)$ est plus haut (plus bas) que les points voisins.

CONDITION NÉCESSAIRE D'EXISTENCE DE L'EXTRÉMUM. Si la fonction $f(x, y)$ admet un extrémum au point $P_0(a, b)$, alors en ce point la différentielle totale est identiquement nulle ou bien elle n'existe pas.

REMARQUE 1. La condition $df(x, y) = 0$ est équivalente au système de deux égalités:

$$f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0.$$

L'égalité $f'_x(x, y) = 0$ prise séparément est la condition nécessaire d'existence de l'extrémum quand y est constant (§ 276). Géométriquement elle signifie que la section de la surface parallèle au plan XOZ possède au point M_0 une tangente parallèle à l'axe OX (cf. § 426). L'égalité $f'_y(x, y) = 0$ possède un sens analogue.

GÉOMÉTRIQUEMENT, au point M_0 situé plus haut (plus bas) que les points voisins, la surface $z = f(x, y)$ admet un plan tangent horizontal (fig. 435), ou bien le plan tangent n'existe pas (fig. 436).

REMARQUE 2. La définition de l'extrémum et la condition nécessaire restent les mêmes pour un nombre arbitraire de variables.

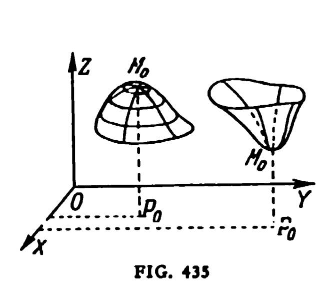


FIG. 435

FIG. 436

§ 449. Règle de recherche de l'extrémum

Soit $f(x, y)$ une fonction différentiable dans un domaine de définition. Pour trouver ses extréma dans ce domaine il faut:

1) Résoudre le système d'équations

$$f'_x(x, y) = 0, \qquad f'_y(x, y) = 0. \tag{1}$$

La solution donne les *points critiques*.

2) Pour chaque point critique $P_0(a, b)$ étudier si le signe de la différence

$$f(x, y) - f(a, b) \tag{2}$$

reste constant pour tous les points (x, y) suffisamment proches de P_0. Si la différence (2) conserve le signe positif, nous avons un minimum au point P_0, si elle conserve le signe négatif, nous avons un maximum. Si la différence (2) ne conserve pas son signe, il n'y a pas d'extrémum au point P_0.

Nous trouvons de façon analogue les extréma des fonctions d'un plus grand nombre de variables.

REMARQUE. Dans le cas de deux variables l'étude est parfois facilitée par l'application de la condition suffisante du § 450. Pour un plus grand nombre de variables indépendantes cette condition se complique. Aussi s'efforce-t-on d'utiliser en pratique les propriétés particulières de la fonction donnée.

EXEMPLE. Trouver les extréma de la fonction

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1.$$

SOLUTION. 1) Annulant les dérivées partielles $f'_x = 3x^2 - 3y$, $f'_y = 3y^2 - 3x$, nous obtenons le système d'équations

$$x^2 - y = 0, \qquad y^2 - x = 0. \tag{3}$$

Il possède deux solutions:

$$x_1 = y_1 = 0, \qquad x_2 = y_2 = 1. \tag{4}$$

Etudions le signe de la différence (2) pour chacun des points critiques $P_1(0, 0)$, $P_2(1, 1)$.

2a) Pour le point $P_1(0, 0)$ nous avons:

$$f(x, y) - f(0, 0) = x^3 + y^3 - 3xy. \tag{5}$$

La différence (5) ne conserve pas son signe, autrement dit *dans un voisinage arbitraire* de P_1 il y a des points de deux types: pour les uns la différence (5) est positive, et pour les autres elle est négative. Ainsi, si l'on prend le point $P(x, y)$ sur la droite $y = x$, la différence (5) est $2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3)$. A proximité de P_1 $\left(\text{pour } x < \frac{3}{2}\right)$ cette diffé-

rence est négative. Si par contre on prend le point $P(x, y)$ sur la droite $y = -x$, la différence (5) est $3x^2$, et cette grandeur est toujours positive.

Comme la différence (5) ne conserve pas son signe, il n'y a pas d'extrémum au point $P_1(0, 0)$. Au point $(0, 0, 1)$ la surface

$$z = x^3 + y^3 - 3xy + 1$$

a la forme d'une selle (comme le paraboloïde hyperbolique).

2b) Pour le point $P_2(1, 1)$ nous avons:

$$f(x, y) - f(1, 1) = x^3 + y^3 - 3xy + 1. \qquad (6$$

Démontrons que cette différence conserve dans un voisinage suffisamment petit du point $(1, 1)$ le signe positif. Posons:

$$x = 1 + \alpha, \qquad y = 1 + \beta. \qquad (7)$$

La différence (6) devient alors

$$3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^3 + \beta^3). \qquad (8)$$

Le premier terme est positif pour toutes les valeurs non nulles de α, β et de plus supérieur (*) à $\frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$. Le second terme peut être négatif, mais quand $|\alpha|$ et $|\beta|$ sont suffisamment petits, il est inférieur à $\alpha^2 + \beta^2$ en valeur absolue (**). Par conséquent, la différence (8) est positive.

Ainsi, la fonction donnée admet un minimum au point $(1, 1)$.

450. Conditions suffisantes d'extrémum (cas de deux variables)

THÉORÈME 1. Soit

$$A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2 \qquad (1)$$

la différentielle seconde de la fonction $f(x, y)$ en son point critique (n° 449) $P_0(a, b)$ (de sorte que les nombres A, B, C donnent les valeurs des dérivées secondes f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{yy} au point P_0). Si l'on a l'inégalité

$$AC - B^2 > 0, \qquad (2)$$

alors la fonction $f(x, y)$ admet au point P_0 un extrémum: un maximum si A (ou C) est négatif, un minimum si A (ou C) est positif.

(*) Nous avons l'identité $3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \frac{3}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{3}{2}(\alpha - \beta)^2$. La grandeur $(\alpha - \beta)^2$ est positive ou nulle.

(**) Pour $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$ nous avons: $|\alpha^3| < \alpha^2$, $|\beta^3| < \beta^2$.

REMARQUE 1. Lorsque la condition (2) est vérifiée, les nombres A et C sont toujours de même signe.

Le théorème 1 donne la *condition suffisante d'existence de l'extrémum.*

EXEMPLE 1. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ (cf. exemple § 449) admet au point (1, 1) un extrémum, car en ce point les dérivées premières sont nulles et les valeurs des dérivées secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$ sont $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$, de sorte que l'inégalité (2) est vérifiée. On a un minimum, car A et C sont positifs.

THÉORÈME 2. Si au point critique $P_0(a, b)$ l'inégalité (avec les notations du théorème 1)

$$AC - B^2 < 0 \tag{3}$$

est vérifiée, la fonction $f(x, y)$ n'a pas d'extrémum au point P_0.

Le théorème 2 donne la *condition suffisante d'absence de l'extrémum.*

EXEMPLE 2. La fonction $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 1$ (cf. exemple § 449) n'a pas d'extrémum au point (0, 0): bien que les dérivées premières s'annulent en ce point, nous avons à présent:

$$A = 0, \quad B = -3, \quad C = 0,$$

de sorte que

$$AC - B^2 = -9 < 0.$$

REMARQUE 2. Si au point critique on a l'égalité

$$AC - B^2 = 0, \tag{4}$$

la fonction peut avoir ici un extrémum (maximum ou minimum) ou peut ne pas en avoir. Ce cas exige une étude complémentaire.

§ 451. Intégrale double (*)

Soit $f(x, y)$ une fonction continue à l'intérieur d'un certain domaine D (fig. 437) et sur sa frontière. Partageons le domaine D en n domaines partiels $D_1, D_2, \ldots, D_n$; désignons leurs aires par $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_n$ (**). Appelons *diamètre* du domaine partiel sa plus grande corde.

(*) La notion d'intégrale double est une extension de la notion d'intégrale définie au cas de deux variables. C'est pourquoi nous recommandons de lire au préalable le § 314.

(**) Par analogie avec les notations $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ pour les longueurs des intervalles partiels. Toutefois cette analogie n'est que superficielle, car $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ ne sont pas les accroissements de la variable. Les grandeurs $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots$ sont toujours positives, alors que $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots$ peuvent être aussi négatives (si la limite supérieure est plus petite que la limite inférieure).

Dans chaque domaine partiel (à l'intérieur ou sur la frontière) prenons un point [le point $P_1(x_1, y_1)$ dans le domaine D_1, le point $P_2(x_2, y_2)$ dans le domaine D_2, etc.]. Ecrivons la somme

$$S_n = f(x_1, y_1)\,\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\,\Delta\sigma_2 + \dots$$
$$\dots + f(x_n, y_n)\,\Delta\sigma_n. \qquad (1)$$

FIG. 437

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME. La somme S_n admet, lorsque le nombre des domaines $D_1, D_2, \dots, D_n$ augmente indéfiniment, le plus grand de leurs diamètres tendant vers zéro (*), une limite indépendante du mode de décomposition et du choix des points $P_1, P_2, \dots, P_n$.

DÉFINITION. La limite de la somme (1), quand le plus grand des diamètres des domaines partiels tend vers zéro, est appelée *intégrale double de la fonction $f(x, y)$ étendue au domaine D.*

NOTATION:

$$\iint_D f(x, y)\, d\sigma \qquad (2)$$

ou

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \qquad (3)$$

[On est conduit à cette dernière notation en divisant le domaine D (fig. 439) par des parallèles aux axes (dx est la longueur d'un rectangle ainsi défini, dy sa largeur).]

En ce qui concerne la notation de l'intégrale double étendue à un domaine rectangle cf. § 455.

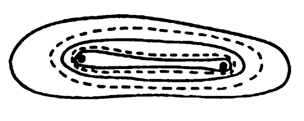


FIG. 438

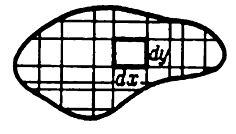


FIG. 439

(*) Les aires de tous les domaines partiels diminuent indéfiniment. Toutefois l'aire d'une figure peut diminuer indéfiniment sans que son diamètre tende vers zéro (la largeur tend vers zéro et la longueur non; cf. fig. 438). Pour de tels domaines partiels le théorème n'est plus valable.

TERMINOLOGIE. Le domaine D est appelé *domaine d'intégration*, la fonction $f(x, y)$ *fonction à intégrer*, $d\sigma$ *élément d'aire*, $dx\,dy$ dans la notation (3) *élément d'aire en coordonnées rectangulaires*.

§ 452. Interprétation géométrique des intégrales doubles

Supposons que la fonction $f(x, y)$ ne prenne dans le domaine D que des valeurs positives. Dans ce cas l'intégrale double

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$$

est numériquement égale au volume V du cylindre (fig. 440) de génératrices parallèles à Oz qui a pour base D et qui est limité supérieurement par la portion correspondante de la surface $z = f(x, y)$.

EXPLICATION. Décomposons l'aire D en aires partielles qui seront les bases d'autant de cylindres tronqués (fig. 440). Le volume du cylindre de base

$$\Delta\sigma_1 = ABCE$$

est approximativement égal à celui du cylindre de même base $\Delta\sigma_1$ et de hauteur

$$P_1M_1 = f(x_1, y_1).$$

Par conséquent, le premier terme $f(x_1, y_1)\,\Delta\sigma_1$ de la somme S_n (§ 451) exprime approximativement le volume du cylindre partiel et la somme

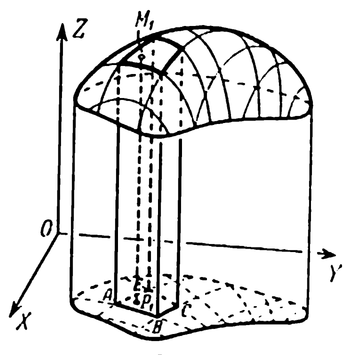


FIG. 440

S_n toute entière le volume V de tout le cylindre. Le degré de précision s'accroît avec l'augmentation du nombre des domaines partiels. La limite de la somme S_n, c'est-à-dire l'intégrale $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$, donne la valeur exacte du volume V.

§ 453. Propriétés des intégrales doubles

PROPRIÉTÉ 1. Si l'on partage le domaine D en deux parties D_1 et D_2, alors

$$\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, d\sigma$$

(cf. § 315, 2). Il en est de même si l'on divise le domaine D en trois, quatre, etc., parties.

PROPRIÉTÉ 2. L'intégrale double de la somme algébrique d'un nombre fixe de fonctions est égale à la somme algébrique des intégrales doubles de chacun des termes (cf. § 315, 3) ; ainsi pour le cas de trois termes nous avons

$$\iint\limits_D [f(x, y) + \varphi(x, y) - \psi(x, y)]\, d\sigma = \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma + \iint\limits_D \varphi(x, y)\, d\sigma - \iint\limits_D \psi(x, y)\, d\sigma.$$

PROPRIÉTÉ 3. On peut sortir un facteur constant de sous le signe de l'intégrale double (cf. § 315, 4):

$$\iint\limits_D mf(x, y)\, d\sigma = m \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \qquad (m \text{ est constant}).$$

§ 454. Evaluation de l'intégrale double

Soient m et M la plus petite et la plus grande valeur de la fonction $f(x, y)$ dans le domaine D, et S l'aire du domaine D. Nous avons alors

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma \leqslant MS.$$

GÉOMÉTRIQUEMENT, le volume du cylindre est compris entre ceux des deux cylindres de base commune; le premier a pour hauteur la cote minima et le second la cote maxima (cf. § 318, théorème 1).

§ 455. Calcul des intégrales doubles (cas simple)

Supposons que le domaine D soit donné à l'aide des inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad c \leqslant y \leqslant d, \tag{1}$$

autrement dit, soit représenté par le rectangle $KLMN$ (fig. 441). L'intégrale double est alors calculée à l'aide de l'une des formules

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\, dx, \tag{2}$$

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy. \tag{3}$$

Les expressions figurant dans les seconds membres sont appelées *intégrales répétées*.

REMARQUE. Dans la formule (2) on calcule d'abord l'intégrale définie $\int_a^b f(x, y)\, dx$, y étant considérée comme une grandeur constante. Toutefois, le *résultat de l'intégration* est considéré comme une fonction de y et la seconde intégration (entre les limites c et d) est effectuée par rapport à y. Dans la formule (3) l'ordre des intégrations est inverse.

EXPLICATION. L'intégrale double $\iint_{(KLMN)} f(x, y)\, dx\, dy$ exprime le volume V du corps prismatique KM' (fig. 442) de base $KLMN$:

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy. \tag{4}$$

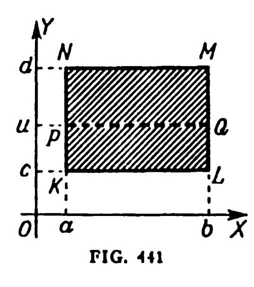


FIG. 441

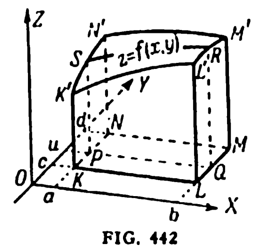


FIG. 442

Le même volume s'obtient de l'aire variable F de la section longitudinale $PQRS$ (elle dépend de l'ordonnée $y = Ou$) à l'aide de la formule (§ 336)

$$V = \int_c^d F(y)\, dy. \tag{5}$$

L'aire $PQRS$ s'exprime par la formule

$$F(y) = \int_a^b z\, dx = \int_a^b f(x, y)\, dx. \tag{6}$$

Comparant (4), (5) et (6) nous obtenons (2). Nous obtiendrons (3) de façon analogue.

NOTATIONS. L'intégrale double $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ étendue au rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes OX, OY est notée

$$\left.\begin{array}{c} \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy \\ \text{ou} \\ \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx \end{array}\right\} \tag{7}$$

(les premiers signes d'intégrale correspondent aux dernières différentielles).

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale double $\int_1^2 \int_3^4 \frac{dx\, dy}{(x+y)^2}$.

SOLUTION. Le domaine d'intégration est défini par les inégalités

$$3 \leqslant x \leqslant 4, \qquad 1 \leqslant y \leqslant 2$$

et représente un rectangle de côtés parallèles aux axes OX, OY. Calculons d'abord l'intégrale définie $\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2}$, en considérant y comme une grandeur constante:

$$\int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}.$$

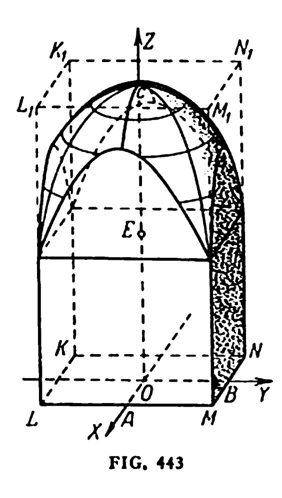


FIG. 443

Nous obtenons maintenant, en vertu de la formule (2),

$$\int_1^2\int_3^4 \frac{dx\,dy}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4}\right) dy = $$

$$= \ln\frac{25}{24} \approx 0{,}0408.$$

Exemple 2. Calculer l'intégrale double

$$I = \int_1^3\int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx\,dy.$$

Solution. Nous trouvons d'après la formule (3):

$$I = \int_1^3 dy \int_2^5 (5x^2y - 2y^3)\,dx = \int_1^3 (195y -$$

$$- 6y^3)\,dy = 660.$$

Exemple 3. Le tronc du parallélépipède rectangle KM_1 (fig. 443) est limité supérieurement par un paraboloïde de révolution de paramètre p. Le sommet du paraboloïde coïncide avec le centre C de la base supérieure, l'axe est vertical. Déterminer le volume V du corps ainsi formé si les côtés de sa base sont

$$KL = a, \qquad KN = b$$

et la hauteur

$$OC = h.$$

Solution. Nous choisissons le système de coordonnées $OXYZ$ comme l'indique la fig. 443. L'équation du paraboloïde sera:

$$z = h - \frac{x^2+y^2}{2p}. \tag{8}$$

Le volume cherché est égal à l'intégrale double $\iint\limits_{(KLMN)} z\,dx\,dy$ étendue au domaine rectangle $KLMN$, autrement dit,

$$V = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{x^2+y^2}{2p}\right) dy\,dx. \tag{9}$$

Au lieu de calculer cette intégrale nous pouvons évaluer le quadruple de l'intégrale étendue au domaine $OAMB$ (grâce à la symétrie du corps par rapport aux plans XOZ, YOZ), autrement dit,

$$V = 4\int_0^{\frac{a}{2}}\int_0^{\frac{b}{2}}\left(h - \frac{x^2+y^2}{2p}\right)dy\,dx.$$

Nous trouvons successivement

$$V = 4\int_0^{\frac{a}{2}}\left[hy - \frac{x^2}{2p}y - \frac{y^3}{6p}\right]_0^{\frac{b}{2}}dx = 4\int_0^{\frac{a}{2}}\left(\frac{bh}{2} - \frac{bx^2}{4p} - \frac{b^3}{48p}\right)dx =$$

$$= abh - \frac{ab}{24p}(a^2 + b^2)$$

§ 456. Calcul des intégrales doubles (cas général)

1. Si le contour du domaine D rencontre toute droite *verticale* qui le coupe au plus en deux points (M_1 et M_2 sur la fig. 444), le domaine D est donné par les inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \qquad \varphi_1(x) \leqslant y \leqslant \varphi_2(x), \tag{1}$$

[a, b sont les abscisses extrêmes du domaine, $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les fonctions exprimant les ordonnées des courbes AM_1B_1, AM_2B_2 limitant le domaine inférieurement et supérieurement].

Dans ce cas l'intégrale double est calculée d'après la formule

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{2}$$

2. Si le contour du domaine rencontre toute droite *horizontale* qui le coupe au plus en deux points, nous avons par analogie (avec les notations de la fig. 445):

$$\iint\limits_D f(x, y)\,d\sigma = \int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx. \tag{3}$$

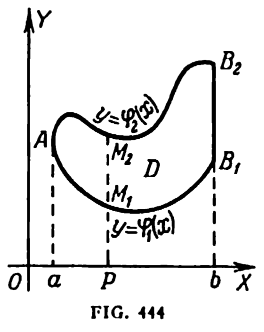


FIG. 444

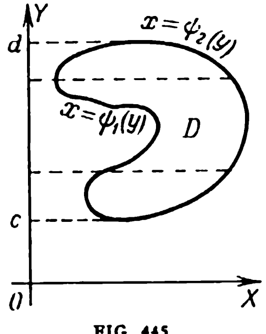


FIG. 445

REMARQUE. Si le domaine d'intégration est de forme moins simple, on le partage en plusieurs parties (D_1, D_2, D_3 sur la fig. 446) de sorte qu'à chacune des parties on puisse appliquer (2) ou (3).

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale $I = \iint\limits_D (y^2 + x)\,dx\,dy$ si le domaine D est limité par les paraboles $y = x^2$, $y^2 = x$ (fig. 447 ; le contour convient pour les deux cas 1 et 2).

PREMIÈRE SOLUTION. Appliquons la formule (2) ; nous devons y poser $a = 0$, $b = 1$, $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$. Nous obtenons :

$$\iint\limits_D (y^2 + x)\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x)\,dy.$$

Calculons l'intégrale $\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x)\,dy$ en considérant x constant :

$$\int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (y^2 + x)\,dy = \left[\frac{y^3}{3} + xy\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}\right) - \left(\frac{1}{3}x^6 + x^3\right).$$

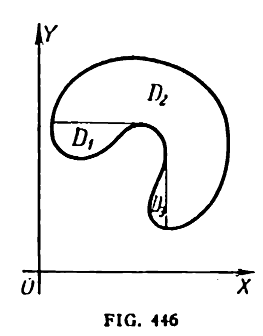


FIG. 446

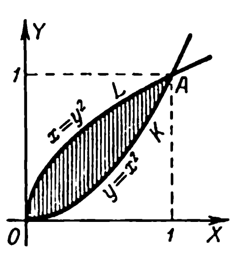


FIG. 447

Intégrons l'expression trouvée par rapport à x; nous obtenons:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^6 - x^3\right) dx = \frac{33}{140}.$$

SECONDE SOLUTION. Appliquons la formule (3); nous devons y poser $c = 0$, $d = 1$, $\psi_1(y) = y^2$, $\psi_2(y) = \sqrt{y}$. Nous obtenons successivement:

$$I = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (y^2 + x)\, dx = \int_0^1 dy \left[xy^2 + \frac{x^2}{2} \right]_{x = y^2}^{x = \sqrt{y}} =$$

$$= \int_0^1 \left(y^{\frac{5}{2}} + \frac{y}{2} - \frac{3}{2} y^4 \right) dy = \frac{33}{140}.$$

EXEMPLE 2. Trouver le volume V de *l'onglet cylindrique*, c'est-à-dire du corps $ACDB$ (fig. 448) isolé d'un demi-cylindre par le plan ABC passant par le diamètre AC de la base. On donne le rayon de la base $R = OA$ et la hauteur de l'onglet $DB = h$.

SOLUTION. Choisissons le système de coordonnées comme sur la fig. 448 (le contour convient alors pour les deux cas 1 et 2). L'équation du plan ABC sera $z = \frac{h}{R} y$. Nous avons:

$$V = \iint_{(ADC)} \frac{h}{R} y\, dx\, dy.$$

PREMIER PROCÉDÉ. Nous posons dans la formule (2) (fig. 448):

$$a = -R, \qquad b = R, \qquad \varphi_1(x) = 0,$$
$$\varphi_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\ (= KL).$$

Nous obtenons:

$$V = \int_{-R}^{+R} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{h}{R} y\, dy.$$

Effectuant l'intégration en y nous trouvons:

$$\int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{h}{R} y\, dy = \frac{h}{2R} (R^2 - x^2).$$

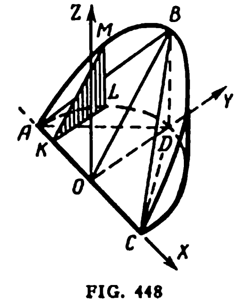


FIG. 448

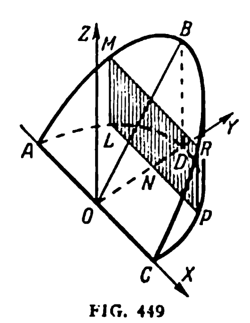


FIG. 449

Cette expression donne l'aire F de la section $KLM\left(F = \frac{1}{2}KL \times LM\right.$ où $KL = \sqrt{R^2 - x^2}$, et l'on trouve LM de la similitude des triangles $\left.KLM,\ ODB\right)$. Nous avons en définitive:

$$V = \int_{-R}^{R} \frac{h}{2R}(R^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}R^2h,$$

autrement dit, *le volume de l'onglet cylindrique est le double de celui de la pyramide BACD* (*).

SECOND PROCÉDÉ. Nous posons dans la formule (3) (fig. 449): $c = 0,\ d = R,\ \psi_1(y) = -\sqrt{R^2 - y^2}\ (=NL),\ \psi_2(y) = \sqrt{R^2 - y^2}\ (=NP)$. Nous obtenons:

$$V = \int_0^R dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{h}{R}\,y\,dx.$$

La première intégration donne:

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \frac{h}{R}\,y\,dx = 2\frac{h}{R}\,y\sqrt{R^2 - y^2}.$$

C'est l'expression de l'aire S de la section $PLMR$. Nous avons en définitive:

$$V = \int_0^R 2\frac{h}{R}\sqrt{R^2 - y^2}\,y\,dy = \frac{2}{3}R^2h.$$

§ 457. Fonction de point

Soit donné un ensemble de points (par exemple, l'ensemble des points d'un segment, d'une portion de surface, d'un corps donné). Si à chaque point P de cet ensemble on fait correspondre une valeur déterminée de la grandeur z (scalaire ou vectorielle), z est appelée *fonction du point P*. L'ensemble considéré de points est appelé *domaine de définition* de la fonction.

(*) Ce résultat est dû à Archimède.

NOTATION. $z = f(P)$.

EXEMPLE 1. La température d'un gaz remplissant un certain récipient est une fonction de point, le domaine de définition de la fonction est l'ensemble des points situés à l'intérieur du récipient.

EXEMPLE 2. La quantité annuelle de précipitations est une fonction d'un point sur la surface du globe terrestre.

Si un ensemble donné de points est rapporté à un certain système de coordonnées, la fonction de point devient une fonction des coordonnées. *La forme de cette dernière dépend du choix du système de coordonnées.*

EXEMPLE 3. La distance du point P à un point fixe O est une fonction $f(P)$ du point P. Si l'on choisit un système de coordonnées rectangulaires d'origine en O, alors $f(P) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Si l'origine des coordonnées est choisie en un autre point, alors $f(P) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, où a, b, c sont les coordonnées du point O.

EXEMPLE 4. La fonction à intégrer $f(x, y)$ de l'intégrale double $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ est une fonction du point $P(x, y)$, de sorte que l'intégrale $\iint\limits_D f(x, y)\, d\sigma$ peut s'écrire $\iint\limits_D f(P)\, d\sigma$.

§ 458. Expression des intégrales doubles en coordonnées polaires

L'intégrale double $\iint\limits_D f(P)\, d\sigma$ s'exprime en coordonnées polaires du point P par la formule

$$\iint\limits_D f(P)\, d\sigma = \iint\limits_D F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi. \qquad (1)$$

Ici $F(r, \varphi)$ est la fonction des coordonnées r, φ qui représente la fonction donnée $f(P)$. L'expression $r\, dr\, d\varphi$ est appelée *élément d'aire en coordonnées polaires*. Elle est équivalente à l'aire du quadrilatère $ABCD$ (fig. 450, où $AD \approx OA \cdot \Delta\varphi = r d\varphi$ et $AB = DC = dr$).

L'intégrale (1) s'exprime à l'aide d'une intégrale répétée (§ 455) de la même manière comme si r et φ étaient des coordonnées rectangulaires [pour une fonction à intégrer $F(r, \varphi) r$].

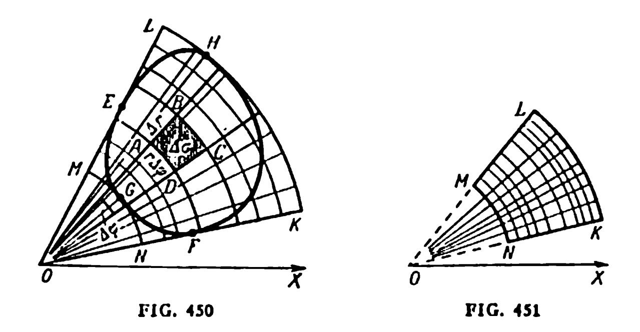


FIG. 450 FIG. 451

Si le pôle est extérieur au contour et si toute demi-droite issue de l'origine coupe celui-ci au plus en deux points (fig. 450), alors

$$\iint_D F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} F(r, \varphi)\, r\, dr. \tag{2}$$

Ici $\varphi_1 = \widehat{XOK}$, $\varphi_2 = \widehat{XOL}$, et r_1 et r_2 sont des fonctions de φ, représentant les arcs frontières *FGE*, *FHE*. En particulier, ces fonctions (l'une ou les deux) peuvent être constantes (fig. 451).

Si le pôle est intérieur au contour (fig. 452) et si chaque rayon rencontre le contour en un seul point, alors on peut poser dans la formule (2) $r_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 2\pi$; si le contour passe par le pôle, alors $r_1 = 0$, $\varphi_1 = \widehat{XOA}$, $\varphi_2 = \widehat{XOB}$ (fig. 453).

Si chaque circonférence de centre au pôle coupe le contour au plus en deux points (fig. 450), on a alors

$$\iint_D F(r, \varphi)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{r_1}^{r_2} r\, dr \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} F(r, \varphi)\, d\varphi. \tag{3}$$

Ici $r_1 = OG$, $r_2 = OH$ et φ_1, φ_2 sont les fonctions de r représentant les arcs frontières *GEH*, *GFH*.

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D r \sin \varphi\, d\sigma, \tag{4}$$

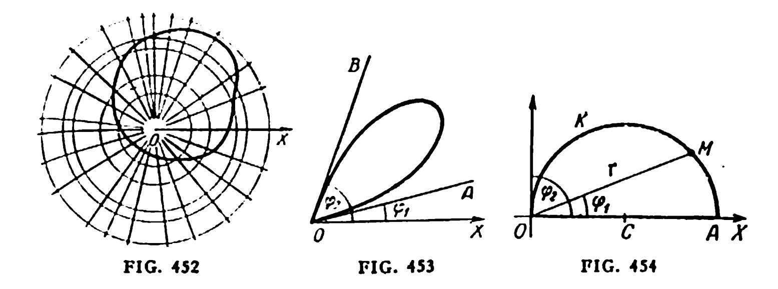


FIG. 452 FIG. 453 FIG. 454

si le domaine D est le demi-cercle de diamètre a représenté sur la fig. 454.

SOLUTION. Nous avons pour les points M de la demi-circonférence AKO (§ 74, exemple 2): $r = a \cos\varphi$. Appliquons la formule (2) en posant $r_1 = 0$, $r_2 = a\cos\varphi$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$:

$$\iint_D r \sin\varphi \, d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \sin\varphi \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r^2 \, dr =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \, \frac{a^3\cos^3\varphi}{3} = \frac{a^3}{12}.$$

REMARQUE 1. Pour exprimer l'intégrale (4) en coordonnées rectangulaires il faut poser:

$$r\sin\varphi = y, \qquad d\sigma = dx\,dy.$$

L'équation de la demi-circonférence AKO étant $y^2 = ax - x^2$, nous obtenons:

$$I = \iint_D y\,dx\,dy = \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} y\,dy = \frac{a^3}{12}.$$

REMARQUE 2. L'intégrale (4) donne le volume de l'onglet cylindrique (cf. § 456, exemple 2) dont la hauteur est égale au rayon de la base.

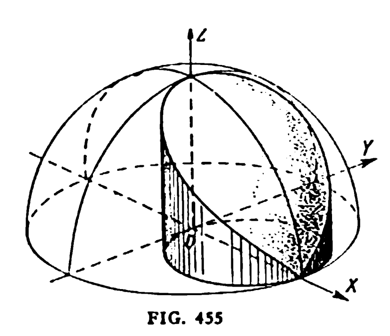


FIG. 455

EXEMPLE 2. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-a}^{+a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

SOLUTION. Le domaine D est le cercle de rayon a et de centre au point $(0, 0)$ (l'intégrale I exprime le volume de la demi-sphère de rayon a). Le calcul en coordonnées rectangulaires est laborieux. Passons aux coordonnées polaires. Prenons pour pôle le centre du cercle, autrement dit l'origine des coordonnées. La fonction à intégrer s'écrit $\sqrt{a^2 - r^2}$. Nous obtenons:

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - r^2}\, d\sigma = \iint_D \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\varphi.$$

Appliquant (2), nous trouvons:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr = \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{3}\, d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

EXEMPLE 3. Trouver le volume V commun à la demi-sphère de rayon a (fig. 455) et au cylindre dont le diamètre est égal au rayon de la sphère et l'une des génératrices coïncide avec l'axe de la demi-sphère *(corps de Viviani)* (*).

SOLUTION. Disposons les axes comme l'indique la fig. 455. Le volume cherché s'exprime à l'aide de l'intégrale

$$I = \iint_D z\, d\sigma = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy.$$

Le calcul en coordonnées rectangulaires est laborieux. Passant aux coordonnées polaires et plaçant le pôle au centre O de la demi-sphère (cf. exemples 1, 2), nous obtenons:

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3(1 - \sin^3\varphi)}{3}\, d\varphi = \frac{2}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

(*) Le contour de la base supérieure était utilisé par Viviani pour les ouvertures dans les coupoles sphériques.

§ 459. Aire d'une portion de surface courbe

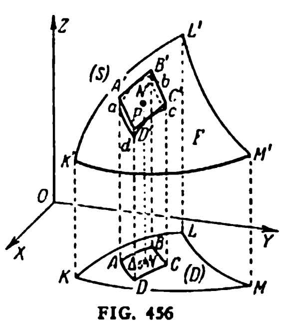


FIG. 456

Soit $K'L'M'$ une portion de la surface S (fig. 456) qui se projette sur le plan XOY suivant le domaine D (KLM sur la fig. 456), de sorte qu'en chaque point N du domaine D soit projeté un seul point N' de la portion de surface considérée.

L'aire F de la portion de surface $K'L'M'$ s'exprime (*) par l'intégrale double:

$$F = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma, \qquad (1)$$

où $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

EXPLICATION. Soit γ l'angle compris entre le plan tangent P au point N' et le plan XOY. Nous avons alors (§§ 127, 436) $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$. Le cylindre dont la base est $\Delta\sigma$ ($ABCD$ sur la fig. 456) intercepte sur le plan P une portion $A'B'C'D'$. L'aire de cette dernière est $\frac{\Delta\sigma}{\cos\gamma} = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\Delta\sigma$. L'aire de l'élément *abcd* de la surface S, qui se projette suivant l'élément $ABCD$ est approximativement égale à l'aire de la portion $A'B'C'D'$, de sorte que la somme des aires des portions $A'B'C'D'$ donne à la limite (**) F:

$$F = \lim \left(\sqrt{1 + p_1^2 + q_1^2}\,\Delta\sigma_1 + \ldots + \sqrt{1 + p_n^2 + q_n^2}\,\Delta\sigma_n\right). \qquad (2)$$

Nous en tirons (§ 456) la formule (1).

EXEMPLE. Trouver l'aire de la fenêtre de Viviani (§ 458, exemple 3).

SOLUTION. Nous avons:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \qquad p = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \qquad \sqrt{1 + p^2 + q^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

(*) On suppose que la surface possède un plan tangent en chaque point de la portion considérée et aussi que le plan tangent varie de façon continue (autrement dit, l'angle compris entre deux plans tangents est infiniment petit avec la distance entre les points de contact).

(**) Cf. plus bas remarque 1.

L'aire cherchée est égale à

$$F = \iint\limits_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, d\sigma = \iint\limits_D \frac{a\, d\sigma}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Le domaine D est limité par la circonférence

$$x^2 + y^2 - ax = 0.$$

Exprimant l'intégrale double en coordonnées polaires (§ 458), nous obtenons:

$$F = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{ar\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = 2a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} \frac{r\, dr}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Effectuant l'intégration, nous trouvons:

$$F = 2a^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right).$$

Remarque 1. Nous avons convenu que la somme des aires $A'B'C'D'$ donne à la limite l'aire F. Cette propriété (elle est conforme à nos représentations concrètes acquises par l'expérience) est souvent adoptée comme définition. Cette dernière est alors formulée comme suit:

Définition. Décomposons la portion de surface en éléments *abcd*; choisissons dans chaque élément un point N'. Menons par les points N' les plans tangents et projetons *abcd* sur le plan tangent correspondant P par des droites parallèles à OZ. L'aire de la portion est la limite de la somme des aires des projections lorsque le nombre d'éléments augmente indéfiniment.

Les conditions mentionnées dans le renvoi de la page 675 assurent l'existence de cette limite.

Remarque 2. Lorsqu'on adopte cette définition, il faut non seulement établir l'existence de la limite, mais encore démontrer qu'elle est indépendante du choix des coordonnées. Ce dernier problème n'a plus de sens si l'on modifie la définition, c'est-à-dire si l'on projette *abcd* sur le plan P suivant la direction perpendiculaire à P. Toutefois, dans ce cas il est difficile d'établir la formule (1).

§ 460. Intégrales triples

Définition (*). Soient D un domaine dans l'espace et $f(x, y, z)$ une fonction du point $P(x, y, z)$ continue à l'intérieur de ce domaine et sur

---

(*) Elle est analogue à la définition de l'intégrale double (§ 451).

sa frontière. Partageons D en n parties; soit Δv_1, Δv_2, ..., Δv_n leurs volumes. Prenons un point dans chaque partie et formons la somme:

$$S_n = f(x_1, y_1, z_1)\,\Delta v_1 + f(x_2, y_2, z_2)\,\Delta v_2 + \ldots + f(x_n, y_n, z_n)\,\Delta v_n. \qquad (1)$$

La limite de S_n, quand le plus grand des diamètres des domaines partiels tend vers zéro [**], est appelée *intégrale triple de la fonction* $f(x, y, z)$ *étendue au domaine* D.

NOTATIONS:

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dv, \quad \text{ou} \quad \iiint\limits_D f(P)\,dv, \quad \text{ou} \quad \iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

L'expression $dx\,dy\,dz$ dans cette dernière notation est appelée *élément de volume en coordonnées rectangulaires.*

INTERPRÉTATION PHYSIQUE. Soient D l'espace occupé par un corps physique et $f(P)$ la densité du corps au point $P(x, y, z)$. La somme (1) donne alors la valeur approchée de la masse M du corps D et l'intégrale triple $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ sa valeur exacte.

Les PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES TRIPLES sont les mêmes que celles des intégrales doubles (§ 453).

§ 461. Calcul des intégrales triples (cas simple)

Supposons que le domaine D soit donné dans l'espace par les inégalités

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad c \leqslant y \leqslant d, \quad e \leqslant z \leqslant f, \qquad (1)$$

autrement dit, soit représenté par un parallélépipède, dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées. L'intégrale triple est alors calculée d'après la formule

$$\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_e^f dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y, z)\,dx \qquad (2)$$

ou d'après l'une des formules analogues (les rôles de x, y, z peuvent être intervertis) (cf. § 455).

L'expression figurant au second membre de (2) est appelée intégrale répétée.

[**] On a un théorème analogue au théorème du § 451.

L'intégrale triple étendue au parallélépipède dont les arêtes sont parallèles aux axes de coordonnées est également notée

$$\int_e^f\int_c^d\int_a^b f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz,\qquad \int_a^b\int_c^d\int_e^f f(x,\ y,\ z)\,dz\,dy\,dx,$$

etc. (le premier signe d'intégration correspond à la dernière différentielle, le dernier à la première).

Exemple. Calculer l'intégrale

$$I=\int_0^1\int_2^4\int_0^3 (x+y+z)\,dx\,dy\,dz.$$

Solution.

$$I=\int_0^1 dz\int_2^4 dy\int_0^3 (x+y+z)\,dx=\int_0^1 dz\int_2^4 dy\left[\frac{x^2}{2}+(y+z)\,x\right]_{x=0}^{x=3}=$$

$$=\int_0^1 dz\int_2^4\left(\frac{9}{2}+3y+3z\right)dy.$$

Les calculs sont ensuite conduits comme au § 455. Nous obtenons $I=30$.

§ 462. Calcul des intégrales triples (cas général)

Nous décomposons (s'il est nécessaire) le volume donné en plusieurs parties (cf. § 456) de sorte que la projection « horizontale » $\bar{D}$ (fig. 457) de chaque partie D soit un domaine plan du type simple (§ 456, 1 et 2) et que chaque droite « verticale » coupe la frontière du domaine D au plus en deux points (M_1 et M_2 sur la fig. 457).

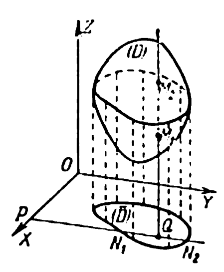


FIG. 457

L'intégrale triple étendue à chaque domaine partiel D se ramène à une intégrale double en vertu de la formule

$$\iiint_D f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz=$$

$$=\iint_{\bar{D}} dx\,dy\int_{z_1(x,\ y)}^{z_2(x,\ y)} f(x,\ y,\ z)\,dz, \qquad (1)$$

où les fonctions $z_1(x, y)$ et $z_2(x, y)$ sont les cotes QM_1 et QM_2. Lors du calcul de l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z)\, dz$$

les grandeurs x, y sont constantes. Le résultat du calcul est considéré comme une fonction des variables x, y.

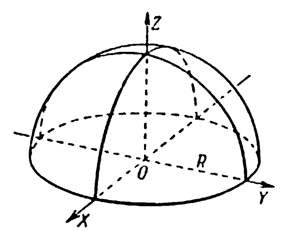


FIG. 458

Après avoir effectué l'intégration par rapport à z, le second membre de (1) se transforme en une intégrale double. Cette dernière est alors calculée comme au § 456. C'est pourquoi en définitive l'intégrale triple se ramène à trois intégrales simples:

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz. \qquad (2)$$

Ici les fonctions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont les ordonnées PN_1, PN_2.

EXEMPLE. Calculer l'intégrale $I = \iiint_D z\, dv$ étendue à la demi-sphère de rayon R représentée sur la fig. 458.

L'intégrale I exprime le moment statique de la demi-sphère par rapport au plan de la base (la densité μ de la demi-sphère est prise pour unité).

SOLUTION. Il n'est pas besoin de décomposer le domaine considéré. Le domaine $\overline{D}$ est le cercle

$$x^2 + y^2 \leqslant R^2,$$

de sorte que $a = -R$, $b = R$, $y_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Les cotes des frontières inférieure et supérieure de la demi-sphère sont $z_1(x, y) = 0$, $z_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Nous trouvons en vertu de la formule (2):

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\, dz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2}\, dy.$$

Le calcul est ensuite conduit comme dans les exemples du § 456.

Nous obtenons

$$I = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R} dx\left[(R^2-x^2)\,y - \frac{y^3}{3}\right]_{y=-\sqrt{R^2-x^2}}^{y=\sqrt{R^2-x^2}} = \frac{2}{3}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{1}{4}x(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}R^2x(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8}R^4\arcsin\frac{x}{R}\right]_{-R}^{+R} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

REMARQUE. La masse de la demi-sphère (pour $\mu = 1$) est numériquement égale à son volume $\frac{2}{3}\pi r^3$. Le quotient $I: \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{3}{8}R$ est la hauteur du centre de gravité au-dessus du plan de la base. Cela signifie que le centre de gravité divise la hauteur de la demi-sphère dans le rapport 5: 3.

§ 463. Coordonnées cylindriques

La position du point P (fig. 459) dans l'espace peut être déterminée par sa cote

$$z = QP$$

et les coordonnées polaires

$$r = OQ, \quad \varphi = \widehat{XOQ}$$

de sa projection Q sur le plan XOY. Les grandeurs r, φ, z sont appelées les *coordonnées cylindriques* ou *semi-polaires* du point P. Les coordonnées rectangulaires et les coordonnées cylindriques du point P sont liées (quand l'origine O coïncide avec le pôle et l'axe OX avec l'axe polaire) par les relations

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$$

(dans les deux systèmes les cotes sont identiques).

§ 464. Expression des intégrales triples en coordonnées cylindriques

L'intégrale triple $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ s'exprime en coordonnées cylindriques du point P à l'aide de la formule

$$\iiint\limits_D f(P)\,dv = \iiint\limits_D F(r,\varphi,z)\,r\,dr\,d\varphi\,dz. \qquad (1)$$

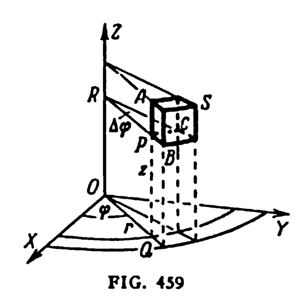


FIG. 459

Ici $F(r, \varphi, z)$ est la fonction des coordonnées cylindriques qui représente la fonction $f(P)$ du point P. L'expression $r\,dr\,d\varphi\,dz$ est appelée *élément de volume en coordonnées cylindriques.* Elle est équivalente au volume du corps PS (fig. 459) pour lequel $PA = dz$, $PB = dr$, $PC = r\,d\varphi$.

L'intégrale (1) s'exprime à l'aide d'une intégrale répétée comme si r, φ, z étaient les coordonnées rectangulaires de la fonction à intégrer $F(r, \varphi, z)\,r$.

EXEMPLE. Calculons en coordonnées cylindriques l'intégrale trouvée dans l'exemple du § 462. Nous avons:

$$I = \iiint\limits_D zr\,dr\,d\varphi\,dz = \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dr \int_0^{2\pi} zr\,d\varphi. \tag{2}$$

Nous obtenons successivement:

$$I = 2\pi \int_0^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} zr\,dr = 2\pi \int_0^R z\,dz \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{R^2-z^2}} = \pi \int_0^R (R^2 - z^2)\,z\,dz = \frac{\pi R^4}{4}. \tag{3}$$

§ 465. Coordonnées sphériques

La position du point P dans l'espace (fig. 460) peut être déterminée par les trois grandeurs suivantes: la distance

$$\rho = OP$$

au point O, l'angle $\theta = \widehat{ZOP}$ compris entre les rayons OZ et OP et l'angle $\varphi = \widehat{XON}$ compris entre les demi-plans ZOX et ZOP. Les grandeurs ρ, θ, φ sont appelées *coordonnées sphériques* ou *polaires* dans l'espace du point P. Les coordonnées rectangulaires et les coordonnées sphériques sont liées (quand les plans principaux des deux systèmes coïncident) par les relations

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad z = \rho \cos\theta.$$

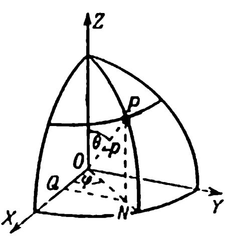


FIG. 460

§ 466. Expression des intégrales triples en coordonnées sphériques

L'intégrale triple $\iiint\limits_D f(P)\,dv$ s'exprime à l'aide des coordonnées sphériques du point P par la formule

$$\iiint\limits_D f(P)\,dv = \iiint\limits_D F(\rho,\ \theta,\ \varphi)\,\rho^2\,d\rho\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi. \qquad (1)$$

Ici $F(\rho,\ \theta,\ \varphi)$ est la fonction des coordonnées sphériques, qui représente la fonction $f(P)$ du point P. L'expression $\rho^2 d\rho \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ est appelée *élément de volume en coordonnées sphériques*. Elle est équivalente au volume du corps (*) PS (fig. 461) pour lequel $BA = d\rho$, $PB = OP\,d\theta = \rho\,d\theta$, $PC = EP\,d\varphi = \rho\sin\theta\,d\varphi$. Le facteur $\rho^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ ($\approx PC\cdot PB$) dans l'expression de l'élément dv est équivalent à l'aire de la figure sphérique $PCDB$. Le facteur $\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$ est équivalent à l'angle solide sous lequel on voit du centre (**) le quadrilatère $PCDB$.

EXEMPLE. Calculer l'intégrale $I = \iiint\limits_D r^2\,dv$, où la fonction $f(P) = r^2$ est le carré de la distance de P à l'axe OZ (KP sur la fig. 462)

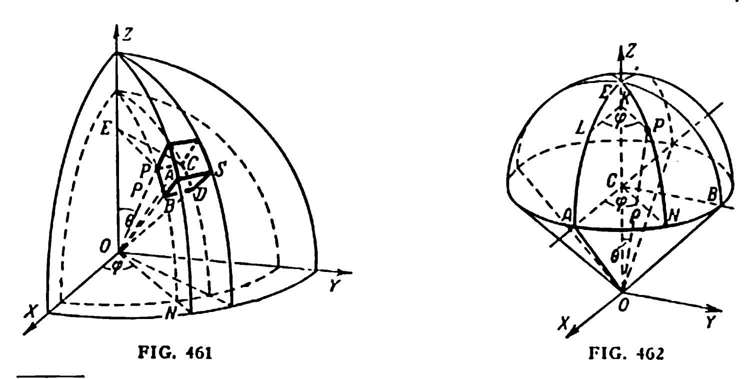


FIG. 461 FIG. 462

(*) Ce corps est limité par deux surfaces sphériques (de rayon r et $r + dr$), deux plans passant par l'axe OZ, deux surfaces coniques dont les axes coïncident avec l'axe OZ.

(**) L'angle solide est la portion d'espace comprise à l'intérieur d'une cavité d'une certaine surface conique (à directrice fermée). On adopte en qualité d'unité d'angle solide le rapport de l'aire isolée par l'angle solide sur la sphère (de centre au sommet de l'angle solide) au carré du rayon de la sphère.

et le domaine D le corps limité inférieurement par un cône (de hauteur OC égale au rayon de la base $CA = R$) et supérieurement par la demi-sphère de rayon R.

L'intégrale I exprime le moment d'inertie du corps D par rapport à l'axe OZ (§ 468).

SOLUTION. Introduisons les coordonnées sphériques $\rho = OP$, $\theta = \widehat{EOP}$, $\varphi = \widehat{ACN} = \widehat{LKP}$. Comme $r = KP = \rho \sin \theta$, l'intégrale cherchée est de la forme

$$I = \iiint\limits_D \rho^2 \sin^2 \theta \, dv = \iiint\limits_D \rho^4 \sin^3 \theta \, d\rho \, d\theta \, d\varphi.$$

Nous intégrons d'abord par rapport à φ (entre les limites zéro et 2π), puis par rapport à ρ (entre les limites $\rho_1 = 0$ et $\rho_2 = OP = OE \times \times \cos \theta$) et enfin par rapport à θ $\left(\text{entre les limites } \theta_1 = 0 \text{ et } \theta_2 = \widehat{EOA} = \frac{\pi}{4}\right)$. Nous obtenons:

$$I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} \rho^4 \sin^3 \theta \, d\rho = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 \theta \, d\theta \, \frac{32 R^5 \cos^5 \theta}{5} =$$

$$= \frac{64\pi R^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5 \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d(-\cos \theta) = \frac{11}{30} \pi R^5.$$

§ 467. Schéma d'application des intégrales doubles et triples

De nombreuses grandeurs géométriques et physiques s'expriment à l'aide d'une intégrale double ou triple suivant qu'elles se rapportent à une surface (plane ou gauche) ou à un corps dans l'espace (*). Le schéma est le même que pour les grandeurs s'exprimant à l'aide d'une intégrale ordinaire (simple), à savoir (cf. § 334):

1) La grandeur cherchée U est mise en correspondance avec un certain domaine D (sur une surface ou dans l'espace).

2) Le domaine D est partagé en parties $\Delta\sigma_k$ (ou Δv_k) ; leur nombre tendra par la suite vers l'infini et leurs diamètres vers zéro.

(*) Les grandeurs correspondantes se rapportant aux lignes s'expriment par une intégrale ordinaire.

Supposons que la grandeur cherchée U se décompose alors en parties $u_1, u_2, \ldots, u_n$ dont la somme donne U (*).

3) On considère l'une des parties $u_1, u_2, \ldots$; elle s'exprime approximativement par une formule de la forme

$$u_k \approx f(P_k)\,\Delta\sigma_k$$

$$[\text{ou } u_k \approx f(P_k)\,\Delta v_k],$$

et l'erreur commise doit être un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à $\Delta\sigma_k$ (ou à Δv_k).

4) L'égalité approchée nous donne l'égalité exacte:

$$U = \iint\limits_D f(P)\,d\sigma$$

$$\left[\text{ou } U = \iiint\limits_D f(P)\,dv\right].$$

Un exemple d'application du schéma est fourni par le calcul du moment d'inertie (§ 468).

§ 468. Moment d'inertie

L'énergie cinétique T d'un corps tournant autour de l'axe AB est proportionnelle (pour la position donnée de l'axe par rapport au corps) au carré de la vitesse angulaire ω:

$$T = \frac{1}{2} I\omega^2. \tag{1}$$

Le double du coefficient de proportionnalité, c'est-à-dire la grandeur I, s'appelle *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe AB. Si le corps se compose de n points matériels de masses $m_1, m_2, \ldots, m_n$ situés à une distance $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'axe, le moment d'inertie s'exprime par la formule

$$I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots + m_nr_n^2. \tag{2}$$

L'expression du moment d'inertie d'un corps continu s'obtient de (2) en appliquant le schéma du § 467. Nous procédons précisément comme suit:

1) le moment d'inertie I est mis en correspondance avec le domaine D occupé par le corps;

2) le domaine D est partagé en parties $D_1, D_2, \ldots, D_n$. Dans ce cas I se décompose en $I_1, I_2, \ldots, I_n$ dont la somme donne I;

(*) Les grandeurs jouissant de cette propriété sont dites additives (cf. passage en petits caractères, p. 489).

3) convenons que dans la partie D_k la densité μ_k a partout la même valeur qu'en l'un des points P_k. Nous obtenons l'égalité approchée

$$m_k \approx \mu_k \Delta v_k, \tag{3}$$

et le moment d'inertie I_k s'exprime à l'aide de la formule approchée

$$I_k \approx \mu_k r_k^2 \Delta v_k, \tag{4}$$

4) de l'égalité approchée (4) nous obtenons l'égalité exacte

$$I = \iiint\limits_D \mu r^2 dv. \tag{5}$$

Cf. exemple § 466.

Si l'on prend l'axe AB comme axe des cotes, la formule (5) s'écrit

$$I = \iiint\limits_D \mu(x, y, z)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz. \tag{6}$$

Si le corps considéré est une plaque dont le plan est perpendiculaire à l'axe AB, nous aurons, au lieu d'une intégrale triple (6), l'intégrale double:

$$I = \iint\limits_D \mu(x, y)\,(x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{7}$$

où $\mu(x, y)$ est la densité surfacique de la plaque.

Si le corps donné est une barre rectiligne coupant l'axe AB sous un angle droit, alors en la faisant coïncider avec l'axe OX (nous aurons alors $y = 0$) nous obtenons au lieu de l'intégrale triple (6) l'intégrale ordinaire

$$I = \int\limits_a^b \mu(x)\,x^2 dx, \tag{8}$$

où $\mu(x)$ est la densité linéique de la barre.

REMARQUE. On appelle moment d'inertie d'un corps géométrique le moment d'inertie d'un corps matériel occupant la même portion d'espace et ayant partout une densité unité.

Les formules (6), (7), (8) s'écrivent alors:

$$I = \iiint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz, \tag{6a}$$

$$I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \tag{7a}$$

$$I = \int\limits_a^b x^2 dx \left(= \frac{b^3 - a^3}{3}\right). \tag{8a}$$

§ 469. Expression de certaines grandeurs physiques et géométriques à l'aide des intégrales doubles

Grandeur	Expression générale	Expression en coordonnées rectangulaires	Expression en coordonnées polaires
Aire d'une figure plane	$S = \iint\limits_D d\sigma$	$\iint dx\, dy$	$\iint r\, dr\, d\varphi$
Aire d'une portion de surface courbe (§ 459) (*)	$S = \iint\limits_D \frac{d\sigma}{\cos\gamma}$	$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$	$\iint \sqrt{r^2 + r^2\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}\, dr\, d\varphi$
Volume d'un cylindre dont la base est le plan XOY (§ 452)	$V = \iint\limits_D z\, d\sigma$	$\iint z\, dx\, dy$	$\iint zr\, dr\, d\varphi$
Moment d'inertie d'une figure plane (**) par rapport à l'axe OZ (***)	$I_z = \iint\limits_D r^2\, d\sigma$	$\iint (x^2 + y^2)\, dx\, dy$	$\iint r^3\, dr\, d\varphi$
Moment d'inertie d'une figure plane (**) par rapport à l'axe OX	$I_x = \iint\limits_D y^2\, d\sigma$	$\iint y^2\, dx\, dy$	$\iint r^3 \sin^2\varphi\, dr\, d\varphi$
Coordonnées du centre de gravité d'une plaque homogène	$x_c = \frac{\iint\limits_D x\, d\sigma}{S}$	$\frac{\iint x\, dx\, dy}{S}$	$\frac{\iint r^2 \cos\varphi\, dr\, d\varphi}{S}$
	$y_c = \frac{\iint\limits_D y\, d\sigma}{S}$	$\frac{\iint y\, dx\, dy}{S}$	$\frac{\iint r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi}{S}$

(*) Elle se projette sur le plan XOY suivant le domaine D; en chaque point du domaine est projeté un seul point de la surface; γ est l'angle compris entre le plan tangent et le plan XOY.

(**) Confondue avec le plan XOY.

(***) Ou, ce qui revient au même, par rapport au centre O.

§ 470. Expression de certaines grandeurs physiques et géométriques à l'aide des intégrales triples

Grandeur	Expression générale	Expression en coordonnées rectangulaires	Expression en coordonnées cylindriques	Expression en coordonnées sphériques
Volume d'un corps	$V = \iiint\limits_D dv$	$\iiint dx\,dy\,dz$	$\iiint r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$
Moment d'inertie d'un corps géométrique par rapport à l'axe OZ	$I_z = \iiint\limits_D r^2\,dv$	$\iiint (x^2 + y^2)\,dx\,dy\,dz$	$\iiint r^3\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \rho^4 \sin^3\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$
Masse d'un corps physique(*)	$M = \iiint\limits_D \mu\,dv$	$\iiint \mu\,dx\,dy\,dz$	$\iiint \mu r\,dr\,d\varphi\,dz$	$\iiint \mu\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$
Coordonnées du centre de gravité d'un corps homogène	$x_c = \dfrac{\iiint\limits_D x\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$y_c = \dfrac{\iiint\limits_D y\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{V}$		
	$z_c = \dfrac{\iiint\limits_D z\,dv}{V}$	$\dfrac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{V}$		

(*) On désigne par μ la densité (fonction de point).

§ 471. Intégrales curvilignes

Soit $P(x, y)$ une fonction continue dans un certain domaine du plan numérique XOY. Prenons dans ce domaine une courbe quelconque (*) d'origine au point A (fig. 463, 464) et d'extrémité au point B (l'extrémité peut coïncider avec l'origine).

Partageons AB (fig. 463) en n arcs partiels $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}B$ et pour unifier notons les points A, B respectivement A_0, A_n. Sur chacun des arcs partiels A_iA_{i+1} prenons un point $M_i(x_i, y_i)$ et formons la somme:

$$S_n = P(x_1, y_1)\,\Delta x_1 + P(x_2, y_2)\,\Delta x_2 + \ldots + P(x_n, y_n)\,\Delta x_n, \quad (1)$$

où Δx_i est l'accroissement de l'abscisse correspondant au passage du point A_{i-1} au point A_i (**).

On a alors le théorème suivant:

THÉORÈME. Si, n augmentant indéfiniment, la plus grande des grandeurs $|\Delta x_i|$ tend vers zéro, la somme (1) tend vers une limite indépendante du mode de formation des arcs A_iA_{i+1} et du choix des points intermédiaires M_i.

DÉFINITION. La limite vers laquelle tend la somme S_n, lorsque la plus grande des grandeurs $|\Delta x_i|$ tend vers zéro, est appelée *intégrale curviligne* de l'expression $P(x, y)\,dx$ *prise le long du chemin* AB.

NOTATION:

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx. \quad (2)$$

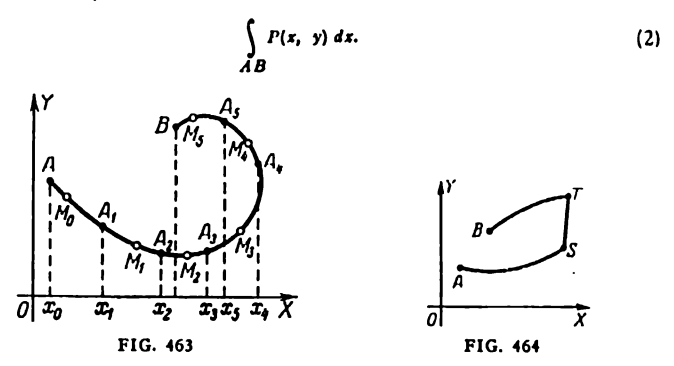


FIG. 463 FIG. 464

(*) On suppose que la courbe AB possède une tangente variant de façon continue, mais on admet des exceptions pour certains points (en nombre fini), où la tangente peut avoir un saut, comme aux points S, T sur la fig. 464.

(**) Cet accroissement peut être positif (comme sur le tronçon AA_1) et négatif (comme sur le tronçon A_4A_5).

On définit de même l'intégrale curviligne de l'expression $Q(x, y)\,dy$ notée

$$\int_{AB} Q(x, y)\,dy, \tag{3}$$

ainsi que l'intégrale curviligne de l'expression $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$, notée

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy. \tag{4}$$

Les intégrales (2) et (3) sont les formes particulières de l'intégrale (4) (pour $Q = 0$ et $P = 0$).

On définit de même l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \tag{5}$$

le long d'une courbe gauche AB.

REMARQUE 1. Si, tout en conservant la courbe AB, on la décrit dans le sens opposé, on obtient l'intégrale curvilligne égale et de signe contraire. Pour A, B différents, la direction du chemin d'intégration est précisée par l'ordre des lettres A, B dans les notations (2)-(5) et nous avons:

$$\int_{BA} P\,dx + Q\,dy = -\int_{AB} P\,dx + Q\,dy,$$

$$\int_{BA} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Quand les points A et B coïncident, la direction du chemin d'intégration peut être précisée par l'indication des points intermédiaires dans l'ordre correspondant.

On peut omettre une telle indication dans le cas où le chemin d'intégration est le contour K d'un domaine plan. Dans ce cas l'écriture $\int_{+K} P\,dx + Q\,dy$ signifie que le contour du domaine est parcouru dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (pour la disposition habituelle des axes). Si le contour du domaine est parcouru dans le sens inverse, l'intégrale curviligne est notée $\int_{-K} P\,dx + Q\,dy$.

REMARQUE 2. L'intégrale curviligne est la généralisation de l'intégrale ordinaire (*) et possède toutes ses propriétés (§ 315).

§ 472. Signification mécanique de l'intégrale curviligne

Supposons que le point matériel M de masse m se déplace le long du chemin AB dans un champ de forces. Soient $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$ les coordonnées du *vecteur tension* au point $M(x, y, z)$, c'est-à-dire de la force F agissant au point (x, y, z) sur une masse unité. Le travail de la force sollicitant le point M est alors exprimé par l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \qquad (1)$$

EXPLICATION. Soit A_iA_{i+1} un tronçon du chemin AB. Le travail sur ce tronçon est approximativement égal (**) au produit scalaire (§ 104, *a*) $m\mathbf{F}_i\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, où $\mathbf{F}_i$ est le vecteur tension au point A_i. Nous obtenons sous forme de coordonnées (§ 107) l'expression $m[X_i\Delta x_i + Y_i\Delta y_i + Z_i\Delta z_i]$. Faisant la somme, nous trouvons la valeur approchée du travail le long du chemin AB. La limite de la somme, c'est-à-dire l'intégrale curviligne (1), donne la valeur exacte du travail.

§ 473. Calcul des intégrales curvilignes

Pour calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy, \qquad (1)$$

on doit représenter la courbe AB sous forme paramétrique

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad (2)$$

(*) Si le chemin d'intégration AB est le segment (a, b) de l'axe des abscisses, l'intégrale curviligne $\int_{AB} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ se transforme en intégrale simple $\int_a^b P(x, 0)\,dx$.

(**) Nous remplaçons l'arc $\overparen{A_iA_{i+1}}$ par la corde A_iA_{i+1} et nous supposons que le long de la corde la tension du champ soit constante.

et porter (2) dans l'expression à intégrer. L'intégrale simple

$$\int_{t_A}^{t_B} \{P[\varphi(t), \psi(t)]\, \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \psi(t)]\, \psi'(t)\}\, dt \tag{3}$$

est égale à l'intégrale curviligne (1).

REMARQUE. On peut choisir arbitrairement l'une des fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$, sous réserve que les deux fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ possèdent des dérivées continues sur tout l'intervalle (t_A, t_B) à l'exception des points où la tangente varie par saut, comme aux points S, T sur la fig. 464. En présence de tels points l'intégrale (3) est impropre (§ 328).

On calcule de façon analogue l'intégrale curviligne prise le long d'une courbe gauche.

EXEMPLE 1. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{AB} -y\, dx + x\, dy \tag{4}$$

le long de la demi-circonférence supérieure $x^2 + y^2 = a^2$ (fig. 465).

SOLUTION. Ecrivons l'arc AB sous forme paramétrique

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \tag{5}$$

(ici t est l'angle BOM, de sorte que $t_A = \pi$, $t_B = 0$). Portant (5) dans (4), nous trouvons:

$$I = \int_{\pi}^{0} -a \sin t\, d(a \cos t) + a \cos t\, d(a \sin t) = a^2 \int_{\pi}^{0} dt = -\pi a^2. \tag{6}$$

On peut prendre comme paramètre l'abscisse x, autrement dit, prendre l'équation de la demi-circonférence sous la forme $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. On a alors $x_A = -a$, $x_B = a$, et nous obtenons

$$I = \int_{-a}^{a} -\sqrt{a^2 - x^2}\, dx + x\, d\sqrt{a^2 - x^2} = -a^2 \int_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\pi a^2.$$

Afin de prendre pour paramètre l'ordonnée y, il faut préalablement découper l'arc AB en parties, sinon x ne sera pas une fonction univoque de l'ordonnée.

EXEMPLE 2. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{OABO} (x - y^2)\, dx + 2xy\, dy \tag{7}$$

le long du périmètre du triangle OAB (fig. 466).

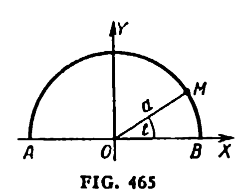


FIG. 465

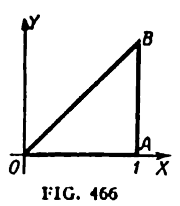


FIG. 466

SOLUTION. Découpons le chemin fermé $OABO$ en trois tronçons OA, AB, BO. Prenons comme paramètre sur OA l'abscisse (dans ce cas $y = 0$, $dy = 0$), sur AB l'ordonnée (dans ce cas $x = 1$, $dx = 0$), sur BO l'abscisse (dans ce cas $y = x$, $dy = dx$). Nous avons:

$$I_1 = \int\limits_{OA} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int\limits_0^1 x\,dx = \frac{1}{2},$$

$$I_2 = \int\limits_{AB} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int\limits_0^1 2y\,dy = 1,$$

$$I_3 = \int\limits_{BO} (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = \int\limits_1^0 (x + x^2)\,dx = -\frac{5}{6},$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{1}{2} + 1 - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}.$$

§ 474. Formule de Green

Soit D un domaine plan limité par le contour K (fig. 467) et soient $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ des fonctions partout continues dans ce domaine avec leurs dérivées partielles $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$. On a alors la *formule de Green*:

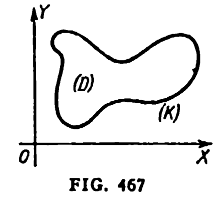


FIG. 467

$$\int\limits_{+K} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \quad (1)$$

EXEMPLE. Calculer l'intégrale curviligne $I = \int (x - y^2)\,dx + 2xy\,dy$ le long du périmètre du triangle OAB (fig. 466) (cf. § 473, exemple 2).

Solution. Nous trouvons d'après la formule (1) en posant $P = x - y^2$, $Q = 2xy$:

$$I = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x - y)^2 \right] dx\, dy = \iint_D 4y\, dx\, dy.$$

Ici le domaine D est le triangle OAB; calculant l'intégrale double nou trouvons:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x 4y\, dy = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$

§ 475. Condition d'indépendance d'une intégrale curviligne du chemin d'intégration

Supposons que les fonctions $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ainsi que leurs dérivées partielles $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ soient continues dans le domaine D (fig. 468), limité par une courbe continue fermée (ne se coupant pas). Prenons dans le domaine D deux points fixes $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ et considérons tous les chemins d'intégration tracés entre A et B et entièrement intérieurs au domaine D (tels sont les chemins ALB, ANB sur la fig. 468). Deux cas sont alors possibles.

Cas 1 (exceptionnel). Dans le domaine D on a identiquement l'égalité

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

L'intégrale curviligne

$$I = \int_{AB} P\, dx + Q\, dy \tag{2}$$

ne dépend pas dans ce cas de la forme du chemin d'intégration, de sorte qu'elle est notée:

$$\int_A^B P\, dx + Q\, dy.$$

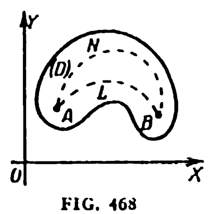


FIG. 468

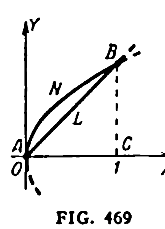


FIG. 469

CAS 2 (général). L'égalité (1) n'est pas identiquement vérifiée. Dans ce cas l'intégrale curviligne (2) dépend de la forme du chemin d'intégration.

EXPLICATION. La différence $I_1 - I_2$ des intégrales curvilignes $I_1 = \int\limits_{ALB} P\,dx + Q\,dy$, $I_2 = \int\limits_{ANB} P\,dx + Q\,dy$ est égale à la somme $I_1 + (-I_2)$, autrement dit (§ 471, remarque 1) à la somme $\int\limits_{ALB} P\,dx + Q\,dy + \int\limits_{BNA} P\,dx + Q\,dy$. Cette dernière donne l'intégrale prise le long du contour $ALBNA$, et elle est égale à l'intégrale double $I_3 = \iint \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$ étendue au domaine $ALBNA$. Si l'égalité (1) est une identité, alors $I_3 = 0$; cela signifie que $I_1 = I_2$, autrement dit, les intégrales curvilignes le long des chemins ALB, ANB sont égales. Si, par contre, l'égalité (1) n'est pas une identité, on peut choisir les chemins ALB et ANB de sorte que $I_3 \neq 0$ et dans ce cas $I_1 \neq I_2$.

EXEMPLE 1. Considérons l'intégrale

$$I = \int\limits_{AB} y\,dx + x\,dy. \tag{3}$$

Les fonctions $P(x, y) = y$, $Q(x, y) = x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 1$ sont partout continues, et l'égalité (1) est vérifiée identiquement. Cela signifie que pour des points fixes A, B l'intégrale (3) ne dépend pas du chemin d'intégration. Prenons, par exemple, les points $A(0, 0)$ et $B(1, 1)$ (fig. 469) et calculons l'intégrale I le long du chemin rectiligne ALB ($y = x$). Nous obtenons

$$I_{ALB} = \int_0^1 x\,dx + x\,dx = 1.$$

Si nous intégrons le long de l'arc de parabole ANB ($x = y^2$), nous avons de nouveau $I_{ANB} = \int_0^1 y\,d(y^2) + y^2\,dy = 3\int_0^1 y^2\,dy = 1$. Nous obtenons la même valeur en intégrant le long de la ligne brisée ACB. Le long du tronçon AC nous avons: $y = 0$, $dy = 0$, de sorte que $I_{AC} = \int_0^1 0 \cdot dx =$

$= 0$; le long de CB nous avons: $x = 1$, $dx = 0$, de sorte que $I_{CB} =$
$= \int_0^1 1 \cdot dy = 1$. Cela signifie que $I_{ACB} = I_{AC} + I_{CB} = 1$.

ECRITURE.

$$I = \int_{A(0,\ 0)}^{B(1,\ 1)} y\,dx + x\,dy = 1.$$

EXEMPLE 2. Conservant les points $A(0,\ 0)$, $B(1,\ 1)$ considérons l'intégrale $I = \int_{AB} y^2\,dx + x^2\,dy$. L'égalité (1) devient $x - y = 0$, autrement dit, elle n'est pas une identité. L'intégrale I dépend maintenant du chemin d'intégration. Ainsi, le long du chemin ALB (fig. 469) nous avons: $I = \int_0^1 x^2\,dx + x^2\,dx = \frac{2}{3}$ et le long du chemin ANB

$$I = \int_0^1 y^2\,d(y^2) + y^4\,dy = \int_0^1 (2y^3 + y^4)\,dy = \frac{7}{10}.$$

Nous obtenons la même valeur $\frac{7}{10}$ le long de l'arc de parabole $y = x^2$. En général dans le cas 2 on peut toujours choisir deux chemins d'intégration le long desquels l'intégrale a des valeurs identiques.

§ 476. Autre forme de la condition trouvée

THÉORÈME 1. CRITÈRE DE LA DIFFÉRENTIELLE TOTALE. Si on a identiquement

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

dans le domaine D, alors pour chaque point de ce domaine l'expression $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction $F(x,y)$.

Si l'égalité (1) n'est pas une identité, l'expression $P\,dx + Q\,dy$ n'est la différentielle totale d'aucune fonction.

EXEMPLE 1. Pour l'expression $y\,dx + x\,dy$ (ici $P = y$, $Q = x$) l'égalité (1) est identiquement vérifiée dans n'importe quel domaine. C'est pourquoi $y\,dx + x\,dy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction $F(x, y)$. Dans le cas considéré on peut prendre $F(x, y) = xy$ ou $xy + 3$ et généralement $xy + C$.

EXEMPLE 2. L'expression $y^2\,dx + x^2\,dy$ ne peut être la différentielle totale d'aucune fonction, car l'égalité (1), qui prend la forme $2x - 2y = 0$, n'est pas une identité.

EXPLICATION. Supposons que $y^2\,dx + x^2\,dy$ soit la différentielle d'une certaine fonction $F(x, y)$. Nous aurions alors dans ce cas: $\frac{\partial F}{\partial x} = y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2$. Or, cela est impossible, car les dérivées croisées $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)$ (elles sont continues) doivent être égales (§ 443), autrement dit, l'égalité $\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 0$ doit être identiquement vérifiée, ce qui n'a pas lieu.

En vertu du théorème 1, la condition du § 475 prend la forme suivante.

CAS 1 (exceptionnel). L'expression $P\,dx + Q\,dy$ est (dans le domaine considéré) la différentielle totale d'une certaine fonction $F(x, y)$ (appelée *primitive*). Dans ce cas l'intégrale curviligne $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$ ne dépend pas du chemin d'intégration (situé dans le domaine considéré).

CAS 2 (général). L'expression $P\,dx + Q\,dy$ n'est pas une différentielle totale. L'intégrale curviligne dépend alors du chemin d'intégration.

Dans le premier cas, si l'on connaît la primitive, on peut calculer la valeur de l'intégrale en appliquant le théorème suivant.

THÉORÈME 2. Si l'expression sous le signe d'intégration $P\,dx + Q\,dy$ est la différentielle totale d'une certaine fonction $F(x, y)$, alors l'intégrale curviligne $\int\limits_A^B P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ est égale à la différence

entre les valeurs de cette fonction aux points B et A:

$$\int_{A(x_0,\,y_0)}^{B(x_1,\,y_1)} P\,dx + Q\,dy = \int_{A(x_0,\,y_0)}^{B(x_1,\,y_1)} dF(x,\ y) = F(x_1,\ y_1) - F(x_0,\ y_0). \qquad (2)$$

EXEMPLE 3. L'intégrale $I = \int\limits_{AB} 2xy\,dx + x^2\,dy$ pour des points fixes $A(1,\ 3)$, $B(2,\ 4)$ ne dépend pas du chemin d'intégration $\left[\text{car } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} - \frac{\partial(2xy)}{\partial y} \equiv 0\right]$. On demande de trouver la valeur de I.

SOLUTION. L'expression $2xy\ dx + x^2\ dy$ est la différentielle totale de la fonction x^2y. Nous avons en vertu du théorème 2:

$$I = \int_{A(1,\ 3)}^{B(2,\ 4)} d(x^2y) = 2^2\cdot 4 - 1^2\cdot 3 = 13.$$

REMARQUE. Dans le cas général il est aussi difficile de trouver la primitive que de calculer directement l'intégrale curviligne.

Toutefois, dans de nombreux cas la recherche de la primitive est facilitée. Ainsi, si chacune des fonctions $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ est une somme de termes de la forme Ax^my^n (A est une constante, m et n des nombres réels arbitraires), nous trouvons la primitive de la manière suivante. Calculons les intégrales indéfinies $\int P(x, y)\,dx$, $\int Q(x,\ y)\,dy$, en considérant constants y dans la première intégrale et x dans la seconde. Nous réunissons les deux expressions obtenues en prenant une seule fois chacun des termes entrant dans les deux expressions. On peut omettre les constantes arbitraires apparaissant lors de l'intégration, car une seule primitive suffit.

EXEMPLE 4. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_{A(0,\ 0)}^{B(1,\ 1)} x(1 + 2y^2)\,dx + 3y^2\,(x^2 - 1)\,dy$$

[la condition (1) est satisfaite].

SOLUTION. Trouvons: $\int x(1 + 2y^3)\,dx = \frac{x^2}{2} + x^2y^3$ (nous considérons y constant), $\int 3y^2(x^2 - 1)\,dy = x^2y^3 - y^3$ (nous considérons x constant).

Réunissons ces deux expressions en prenant une seule fois le terme x^2y^3. Nous obtenons la primitive $F(x, y) = \frac{x^2}{2} - y^3 + x^2y^3$. La formule (2) donne alors: $I - F(1, 1) = F(0, 0) = \frac{1}{2}$.

Equations différentielles

§ 477. Notions principales

On appelle *équation différentielle* une relation entre la variable indépendante, une fonction de cette variable et les dérivées de cette fonction jusqu'à l'ordre n (les différentielles peuvent y figurer au lieu des dérivées).

Si la fonction inconnue ne dépend que d'une seule variable, l'équation différentielle est dite *ordinaire*, si elle dépend de plusieurs variables, l'équation est appelée *équation aux dérivées partielles*. On ne considère ici que les équations différentielles ordinaires.

La forme générale d'une équation différentielle est la suivante:

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0. \qquad (1)$$

On appelle *ordre de l'équation différentielle* l'ordre de la dérivée d'ordre le plus élevé figurant dans cette équation.

EXEMPLE. L'équation $y' = \frac{y^2}{x}$ est une équation différentielle du premier ordre, $y'' + y = 0$ une équation du second ordre, $y'^2 = x^3$ une équation du premier ordre.

La fonction $y = \varphi(x)$ est appelée *solution* d'une équation différentielle si après la substitution $y = \varphi(x)$ cette dernière devient une identité.

Le principal problème de la théorie des équations différentielles est la recherche de toutes les solutions de l'équation différentielle donnée. Dans les cas les plus simples ce problème se ramène au calcul d'une intégrale. C'est pourquoi la solution d'une équation différentielle est encore appelée son *intégrale* et le processus de recherche de toutes les solutions *l'intégration* de l'équation différentielle.

Plus généralement, on appelle *intégrale d'une équation différentielle donnée toute équation ne contenant pas de dérivées dont l'équation différentielle est le corollaire.*

EXEMPLE 1. La fonction $y = \sin x$ est une solution (une intégrale) de l'équation différentielle du second ordre

$$y'' + y = 0, \qquad (2)$$

car en portant $y = \sin x$ dans l'égalité (2), elle devient

$$(\sin x)'' + \sin x = 0, \tag{3}$$

autrement dit se transforme en identité.

Les fonctions $y = \frac{1}{2} \sin x$, $y = \cos x$, $y = 3 \cos x$ sont aussi des solutions de l'équation (2); la fonction $y = \sin x + \frac{1}{2}$ n'est pas une solution.

Exemple 2. Considérons l'équation différentielle du premier ordre

$$xy' + y = 0. \tag{4}$$

La fonction

$$y = \frac{1,5}{x} \tag{5}$$

est une solution de l'équation (4), car en y portant (5) cette équation se transforme en identité

$$\frac{x \cdot 1,5}{-x^2} + \frac{1,5}{x} = 0.$$

Par ailleurs, (5) est une intégrale de l'équation différentielle (4).

L'équation

$$xy = 0,2 \tag{6}$$

est aussi une intégrale de l'équation différentielle (4). En effet, il découle de (6) que $(xy)' = 0$, ce qui nous donne (en appliquant la formule de la dérivée du produit) l'équation (4). Nous obtenons de l'intégrale (6), en la résolvant en y,

$$y = \frac{0,2}{x}. \tag{7}$$

La fonction (7) est une solution de l'équation différentielle (4). Par ailleurs l'équation (7) est aussi une intégrale de l'équation (4).

Les équations $xy = \sqrt{3}$, $xy = -2$, $xy = \pi$, etc., sont également des intégrales de l'équation différentielle (4) et les fonctions $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$, $y = -\frac{2}{x}$, $y = \frac{\pi}{x}$, etc., ses solutions.

Exemple 3. Trouver toutes les solutions de l'équation différentielle du premier ordre

$$y' = \cos x. \tag{8}$$

SOLUTION. La fonction inconnue $y = \varphi(x)$ est la primitive de la fonction $\cos x$. La forme la plus générale de cette fonction est l'intégrale indéfinie $\int \cos x\, dx$. Par conséquent, toutes les solutions sont contenues dans la formule

$$y = \sin x + C. \tag{9}$$

La fonction $y = \sin x + C$, contenant une constante arbitraire C, est la *solution générale* (*) de l'équation (8), la fonction $y = \sin x$ (et aussi $y = \sin x + \frac{1}{2}$, $y = \sin x - 1$, etc.) en est une *solution particulière*.

§ 478. Equations différentielles du premier ordre

La forme générale de l'équation différentielle du premier ordre est

$$\Phi(x, y, y') = 0. \tag{1}$$

L'équation *résolue par rapport à* y' est de la forme

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

On suppose que $f(x,y)$ est définie univoquement et continue dans un certain domaine; on recherche les intégrales appartenant à ce domaine.

§ 479. Interprétation géométrique des équations différentielles du premier ordre

La courbe L (fig. 470) représentant une intégrale quelconque de l'équation différentielle

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

est appelée *courbe intégrale* de cette équation.

La dérivée y' est le coefficient angulaire de la tangente $T'T$ à la courbe intégrale. Avant même de trouver la courbe intégrale passant par le point donné $M(x, y)$, nous pouvons trouver y' à l'aide de l'équation (1) et mener par M la droite $T'T$. Cette dernière indique la direction de la courbe intégrale. L'ensemble des droites $T'T$ correspondant à tous

(*) Cf. § 481 pour la définition des solutions générale et particulière de l'équation différentielle du premier ordre et §§ 493, 494 pour les équations d'ordre plus élevé.

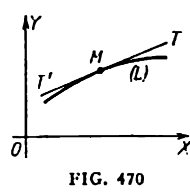


FIG. 470

les points possibles du domaine considéré est appelé *champ de directions* de l'équation (1).

Géométriquement, intégrer l'équation (1) signifie *trouver les courbes pour lesquelles la direction de la tangente coïncide en chaque point avec la direction du champ.*

Pour le champ de directions des fig. 471, 472, on peut construire au jugé (approximativement) les courbes intégrales.

Exemple 1. On a représenté sur la fig. 471 le champ de directions de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}. \tag{2}$$

L'équation (2) signifie que la direction du champ au point $M(x, y)$ est perpendiculaire à la droite OM $\left(\text{le coefficient angulaire de la direction du champ est } \frac{dy}{dx} \text{ et celui de la droite } OM\ \frac{y}{x}\right)$. On voit aisément que les courbes intégrales sont des circonférences de centre au point O. Par conséquent, les intégrales de l'équation (2) sont de la forme

$$x^2 + y^2 = a^2, \tag{3}$$

où a^2 est une constante qui peut prendre n'importe quelle valeur positive. Les fonctions

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad y = -\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4}$$

sont les solutions de l'équation (2), ce qu'il est aisé de vérifier.

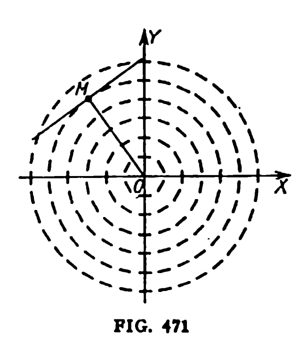


FIG. 471

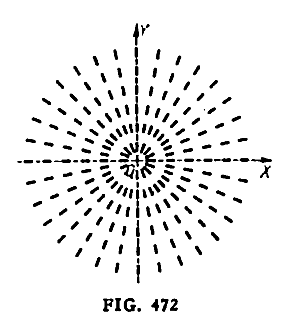


FIG. 472

Remarque. Conformément au § 478, on doit négliger les points de l'axe OX, car la fonction $f(x, y) = -\frac{x}{y}$ n'est pas définie en ces points. Toutefois, nous représentons en ces points également la direction du champ (par des traits verticaux). Nous élargissons donc le sens de l'équation (2) (conformément à son interprétation géométrique).

Notamment nous comprenons l'écriture (2) comme l'*ensemble de deux équations*:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}. \tag{2a}$$

Dans la seconde équation x est considéré comme une fonction de y. Conformément à cela, nous estimons que les solutions sont non seulement les intégrales (4), mais également les intégrales

$$x = \sqrt{a^2 - y^2}, \quad x = -\sqrt{a^2 - y^2}. \tag{4a}$$

Les équations (2a) sont équivalentes en tous les points non situés sur les axes OX, OY. La deuxième équation (2a) remplace la première en tous les points de l'axe OX (excepté le point O). Toutefois, le point O reste exclu. Cela est d'ailleurs naturel: aucune courbe intégrale ne passe par ce point (la circonférence $x^2 + y^2 = a^2$ dégénère en un point).

Il est préférable d'écrire l'équation (2) considérée au sens élargi sous la forme

$$x\,dx + y\,dy = 0. \tag{5}$$

On souligne ici l'équivalence des variables x, y. L'équation (5) peut être mise sous la forme $d(x^2 + y^2) = 0$. Cela signifie que $x^2 + y^2$ est une constante, et nous obtenons de nouveau l'intégrale (3).

Exemple 2. On a représenté sur la fig. 472 le champ de directions de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{6}$$

Les courbes intégrales sont les droites $y = Cx$. En comprenant l'équation (6) au sens élargi (cf. plus haut, remarque), nous pouvons représenter également le champ de directions en tout point de l'axe OY (excepté le point O). Nous obtenons des traits situés le long d'une droite verticale. Cela signifie que la droite $x = 0$ fait partie des courbes intégrales $y = Cx$.

Au point O la direction du champ reste indéterminée: c'est le point d'accumulation des courbes intégrales de toutes directions.

Les fonctions

$$y = Cx \quad (C \text{ constant}), \tag{7}$$

ainsi que les fonctions

$$x = C_1 y \quad (C_1 \text{ constant}) \tag{7a}$$

sont des solutions (des intégrales) de l'équation (6). Les équations

$$\frac{y}{x} = C, \quad \frac{x}{y} = C, \quad \frac{x^2}{y^2} = C, \quad \ln\left|\frac{y}{x}\right| = C, \tag{8}$$

etc., sont aussi des intégrales de l'équation.

L'équation (6) s'écrit sous la forme

$$x\,dy - y\,dx = 0. \tag{9}$$

En divisant (9) par x^2, nous obtenons: $\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = 0$, autrement dit, $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$. Nous en tirons l'intégrale $\frac{y}{x} = C$. Divisant (9) par y^2 nous obtenons: $\frac{x}{y} = C_1 \left(\text{ici } C_1 = \frac{1}{C}\right)$.

Exemple 3. Le champ de directions d'une équation de la forme $y' = f(x)$ a été considéré au § 295 (exemples 1-3). Les courbes intégrales $y = \int f(x)\,dx$ sont équidistantes (dans la direction de l'axe OY).

§ 480. Isoclines

La construction du champ de directions de l'équation $y' = f(x, y)$ est facilitée si l'on dessine au préalable les *isoclines*, courbes le long desquelles la fonction $f(x, y)$ possède une valeur constante. En tous les points d'une isocline quelconque la direction du champ est constante.

Exemple. Les isoclines de l'équation $y' = x^2 + y^2$ sont les circonférences $x^2 + y^2 = a^2$ (fig. 473). En tous les points de la circonférence $x^2 + y^2 = 1$ (le rayon OC est pris pour unité d'échelle) le coefficient angulaire y' de la direction du champ est égal à l'unité, en tous les points de la circonférence $x^2 + y^2 = 2$ (de rayon $OD = \sqrt{2}$) nous avons $y' = 2$, etc. Les courbes intégrales sont représentées en traits gras.

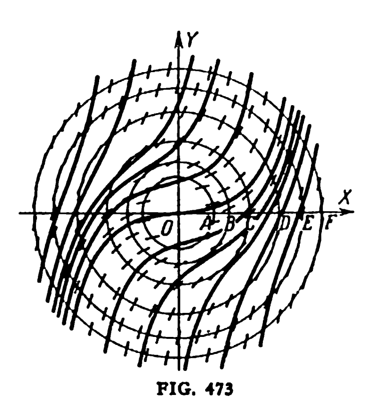


FIG. 473

Remarque. Lorsqu'on utilise les isoclines, il n'est pas nécessaire de représenter le champ de directions par des traits. Il suffit d'affecter chaque isocline d'une cote donnant la valeur du coefficient angulaire. Sur le dessin où l'on a tracé les

isoclines on représente en outre un faisceau dense de rayons et sur chaque rayon on marque son coefficient angulaire. On obtient la solution en construisant des traits parallèles aux rayons correspondants.

§ 481. Solution particulière et solution générale des équations différentielles du premier ordre

L'équation différentielle du premier ordre

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

possède une infinité de solutions (cf. exemples du § 479). En règle générale, par un point donné du domaine considéré (§ 478) passe une *seule courbe intégrale* (*). La solution correspondante de l'équation (1) est appelée *solution particulière* et l'ensemble de toutes les solutions particulières est dit *solution générale*. On s'efforce de représenter la solution générale de l'équation différentielle (1) sous forme d'une certaine fonction

$$y = \varphi(x, C) \quad (C \text{ est une constante}), \tag{2}$$

qui donnerait n'importe quelle solution particulière (pour un choix adéquat de C). Une telle représentation est parfois impossible même en théorie, alors qu'en pratique elle n'est possible que pour quelques classes peu nombreuses (mais importantes) d'équations (§§ 482-486).

Par contre, on peut toujours trouver la solution particulière passant par un point donnée (x_0 y_0) sinon sous forme d'une expression exacte à l'aide des fonctions élémentaires, du moins sous une forme approchée (avec une précision arbitraire; §§ 490, 491). Les nombres x_0, y_0 sont appelés les *valeurs initiales*.

Une intégrale de l'équation différentielle (1) est dite *générale* si elle est équivalente à la solution générale, et *particulière* si elle est équivalente à l'une ou plusieurs solutions particulières.

EXEMPLE 1. Trouvons une solution particulière de l'équation

$$x\,dx + y\,dy = 0 \tag{3}$$

(§ 479, exemple 1) pour les valeurs initiales $x_0 = 4$, $y_0 = -3$. Les courbes intégrales de l'équation (3) sont les circonférences de centre (0, 0). Par le point M_0 (4, — 3) passe la courbe intégrale $x^2 + y^2 = 25$. Cette équation est une intégrale particulière de l'équation (3). Elle est équivalente à deux solutions particulières:

$$y = \sqrt{25 - x^2},$$
$$y = -\sqrt{25 - x^2}.$$

(*) Une exception n'est possible que pour les points où la dérivée partielle $f'_y(x, y)$ est discontinue ou n'existe pas.

La seconde est celle que nous recherchons (la première ne passe pas par M_0).

EXEMPLE 2. La solution particulière de l'équation (3) passant par le point (x_0, y_0) est de la forme

$$y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2} \quad \text{si} \quad y_0 > 0; \tag{4}$$
$$y = -\sqrt{x_0^2 + y_0^2 - x^2} \quad \text{si} \quad y_0 < 0.$$

Dans les cas où $y_0 = 0$, c'est-à-dire que le point (x_0, y_0) est situé sur l'axe OX, la solution particulière (conformément à la remarque de l'exemple 1 § 479) est de la forme

$$x = \sqrt{x_0^2 - y^2} \quad \text{si} \quad x_0 > 0; \tag{6}$$
$$x = -\sqrt{x_0^2 - y^2} \quad \text{si} \quad x_0 < 0. \tag{7}$$

Au point $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ (origine des coordonnées) la solution particulière n'existe pas.

L'ensemble des solutions particulières (4), (5), (6), (7) constitue la solution générale de l'équation différentielle (3).

Si l'on note C^2 la grandeur constante $x_0^2 + y_0^2$, on peut écrire la solution générale sous la forme

$$y = \pm \sqrt{C^2 - x^2}. \tag{8}$$

L'équation

$$x^2 + y^2 = C^2, \tag{9}$$

équivalente à la solution générale (8), est l'intégrale générale de l'équation (3).

§ 482. Equations différentielles du premier ordre à variables séparées

Si l'équation différentielle est de la forme

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0 \tag{1}$$

(le coefficient P ne dépend que de x et le coefficient Q que de y), on dit que *les variables sont séparées*.

L'intégrale générale d'une équation à variables séparées est représentée par l'équation (*)

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C \quad (C \text{ est une constante}). \tag{2}$$

(*) Ici et dans ce qui suit le symbole $\int$ signifie une fonction primitive quelconque, c'est-à-dire que le terme constant arbitraire n'est pas pris en considération. Par ailleurs, ce ne serait pas une faute si l'on inclut dans l'intégrale $\int P(x)\,dx$ le terme constant C_1 et dans l'intégrale $\int Q(y)\,dy$ le terme C_2. Toutefois, la solution aurait une forme plus compliquée.

Pour trouver l'intégrale particulière correspondant aux valeurs initiales x_0, y_0, on peut procéder de la manière suivante: portant x_0, y_0 dans (2) on trouve la valeur correspondante $C = C_0$. L'intégrale particulière cherchée sera $\int P(x)\,dx + \int Q(y)dy = C_0$. Quand la solution générale ne nous intéresse pas, il est préférable de trouver la solution particulière directement d'après la formule

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = 0. \tag{3}$$

EXEMPLE. Trouver la solution particulière de l'équation

$$\sin x\,dx + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0 \tag{4}$$

pour les conditions initiales $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $y_0 = 3$.

SOLUTION. L'intégrale générale de l'équation (4) est

$$\int \sin x\,dx + \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = C \text{ ou } -\cos x + 2\sqrt{y} = C. \tag{5}$$

Posant ici $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 3$, nous obtenons $C = 2\sqrt{3}$; la solution particulière cherchée est

$$y = \frac{(2\sqrt{3} + \cos x)^2}{4}. \tag{6}$$

On peut l'obtenir directement d'après la formule

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin x\,dx + \int_{3}^{y} \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0.$$

§ 483. Séparation des variables. Solution singulière.

L'équation de la forme $X_1Y_1\,dx + X_2Y_2\,dy = 0$, où X_1, X_2 sont les fonctions de x seul(*) et Y_1, Y_2 les fonctions de y seul, peut être ramenée à la forme (1) § 482 si on la divise par Y_1X_2. La méthode est appelée *séparation des variables*.

(*) L'une d'elles ou les deux peuvent être constantes, de même pour les fonctions Y_1, Y_2.

EXEMPLE 1. Considérons l'équation

$$y\,dx - x\,dy = 0. \tag{1}$$

Divisant par xy nous obtenons l'équation

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0, \tag{2}$$

où les variables sont séparées. Nous trouvons alors en intégrant

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{dy}{y} = C, \tag{3}$$

c'est-à-dire

$$\ln|x| - \ln|y| = C, \tag{4}$$

ou bien

$$\ln\left|\frac{x}{y}\right| = C. \tag{4a}$$

Introduisant une nouvelle constante C_1 liée avec C par la relation $C = \ln C_1$, nous pouvons écrire au lieu de (4a)

$$\frac{x}{y} = C_1 \tag{4b}$$

(cf. exemple 2 § 479).

REMARQUE 1. Soit $y = k$ la racine de l'équation $Y_1 = 0$. La fonction $y = k$ (qui se ramène à la grandeur constante k) est l'une des solutions de l'équation différentielle $X_1Y_1\,dx + X_2Y_2\,dy = 0$ (car pour $y = k$ nous avons $dy = 0$ et par hypothèse $Y_1 = 0$). Cette solution peut être perdue lors de la division par Y_1X_2. De même, on peut perdre la solution $x = l$, où l est la racine de l'équation $X_2 = 0$. Ainsi, dans l'exemple 1 en obtenant la solution (4) nous avons perdu la solution particulière $y = 0$ de l'équation différentielle (1) ainsi que la solution particulière $x = 0$. En effet, l'équation (4) n'a pas de sens pour $y = 0$ comme pour $x = 0$ (le nombre zéro n'a pas de logarithme).

En nous libérant des logarithmes dans l'égalité (4a), nous avons de nouveau introduit la solution $x = 0$ (pour $C_1 = 0$).

EXEMPLE 2. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$\sqrt{1-y^2}\,dx - y\,dy = 0. \tag{5}$$

SOLUTION. Dans la bande limitée par le couple de droites $y = \pm 1$, l'une au moins des fonctions $\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\left(=\frac{dy}{dx}\right)$, $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\left(=\frac{dx}{dy}\right)$ est univoquement déterminée et continue. A l'extérieur de cette bande aucune des fonctions mentionnées n'est déterminée. Cela signifie (§ 478) que toutes les intégrales de l'équation (5) sont situées dans la bande limitée par les droites $y = \pm 1$.

Divisons l'équation (5) par $\sqrt{1-y^2}$. Nous obtenons

$$dx - \frac{y\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0,$$

où les variables sont séparées. Nous trouvons en intégrant

$$x - \sqrt{1 - y^2} = C$$

ou

$$x - C = \sqrt{1 - y^2}. \qquad (6)$$

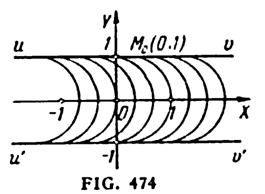


FIG. 474

Cette équation définit une famille de demi-circonférences représentée sur la fig. 474. Toutefois, elle ne comporte pas toutes les courbes intégrales de l'équation (5): en divisant cette dernière par $\sqrt{1 - y^2}$, nous avons perdu les solutions $y = 1$ et $y = -1$ (les droites *uv* et *u'v'* sur la fig. 474).

REMARQUE 2. Les solutions que nous avons perdues *ne sont pas des solutions particulières* (à la différence des solutions que nous avons perdues dans l'exemple 1). En effet, nous avons appelé (§ 481) solution particulière une solution qui est *unique* pour certaines valeurs initiales. Or, par chaque point de la solution $y = 1$ passent *deux solutions*; par exemple par le point M_0 (0,1) (fig. 474), outre la droite $y = 1$, passe la demi-circonférence $x = \sqrt{1 - y^2}$ qui est une autre solution de l'équation (5); cette solution s'obtient de (6) pour $C = 0$.

L'équation (6), bien qu'elle n'englobe pas toutes les solutions, contient toutes les solutions *particulières* (les demi-circonférences) de sorte qu'elle est l'intégrale *générale* de l'équation (5). Les solutions $y = 1$, $y = -1$ sont appelées *singulières*.

En général, l'intégrale d'une équation différentielle du premier ordre est dite *singulière* si par chacun de ses points passe au moins encore une intégrale.

§ 484. Equation aux différentielles totales

Si les coefficients $P(x, y)$, $Q(x, y)$ de l'équation

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \qquad (1)$$

satisfont à la condition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad (2)$$

le premier membre de (1) est alors la différentielle totale d'une certaine fonction $F(x, y)$ (de la fonction primitive de l'expression $P\,dx + Q\,dy$; cf. § 476). L'intégrale générale de l'équation (1) sera

$$F(x, y) = C. \qquad (3)$$

Exemple. Trouver l'intégrale particulière de l'équation

$$\frac{x^2 - y}{x^2}\, dx + \frac{x+1}{x}\, dy = 0 \tag{4}$$

pour les conditions initiales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.

Solution. La condition (2) est vérifiée. En outre, les fonctions $P(x, y) = 1 - \dfrac{y}{x^2}$, $Q = 1 + \dfrac{1}{x}$ se décomposent en termes de la forme $Ax^m y^n$. C'est pourquoi nous trouvons la fonction primitive (§ 476, remarque) de façon suivante.

Effectuons l'intégration

$$\int \left(1 - \frac{y}{x^2}\right) dx = x + \frac{y}{x} \quad \text{(pour } y \text{ constant)},$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dy = y + \frac{y}{x} \quad \text{(pour } x \text{ constant)}.$$

Réunissons ces expressions en ne conservant qu'une fois le terme $\dfrac{y}{x}$. La fonction $x + y + \dfrac{y}{x}$ est une primitive. L'intégrale générale sera

$$x + y + \frac{y}{x} = C. \tag{5}$$

Portant les valeurs initiales $x = 1$, $y = 1$, nous trouvons $C = 3$. L'intégrale particulière cherchée est $x + y + \dfrac{y}{x} = 3$.

§ 484a. Facteur intégrant

Si les coefficients $P(x, y)$, $Q(x, y)$ de l'équation

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

ne vérifient pas la condition

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{2}$$

le premier membre de (1) n'est pas une différentielle totale. Toutefois, il est parfois possible de choisir un facteur $M(x, y)$ tel que l'expression $M(P\, dx + Q\, dy)$ devienne la différentielle totale d'une certaine fonction $F_1(x, y)$. L'intégrale générale est alors

$$F_1(x, y) = C.$$

La fonction $M(x, y)$ est appelée le *facteur intégrant*.

EXEMPLE. Le premier membre de l'équation $2y\,dx + x\,dy = 0$ n'est pas une différentielle totale. Or, si nous multiplions par x, nous obtenons:

$$x(2y\,dx + x\,dy) = d(x^2y).$$

L'intégrale générale de cette équation est

$$x^2y = C.$$

REMARQUE. Toute équation différentielle possède des facteurs intégrants (et même une infinité). Mais il n'existe pas de procédé général permettant de les trouver.

§ 485. Equations homogènes

L'équation différentielle du premier ordre

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

est dite *homogène* si le rapport $\frac{M}{N}$ peut être représenté comme une fonction de $\frac{y}{x}$ que nous désignons par la lettre t:

$$t = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Ainsi, l'équation

$$(y + \sqrt{x^2 + y^2})\,dx - x\,dy = 0 \tag{3}$$

est homogène, car

$$\frac{M}{N} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{-x} = -\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -t - \sqrt{1 + t^2}. \tag{4}$$

La substitution

$$y = tx \text{ (d'où } dy = t\,dx + x\,dt) \tag{5}$$

transforme toute équation homogène en une équation à variables séparées.

EXEMPLE 1. Intégrer l'équation (3) pour les conditions initiales $x_0 = 3$, $y_0 = 4$.

SOLUTION. Après la substitution (5) l'équation (3) devient

$$\sqrt{x^2 + x^2t^2}\,dx - x^2\,dt = 0 \tag{6}$$

ou

$$|x|\sqrt{1 + t^2}\,dx - x^2\,dt = 0. \tag{7}$$

Les variables sont séparées. Nous obtenons

$$\frac{dx}{|x|} = \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}. \tag{8}$$

Lors de la séparation des variables nous avons perdu la solution $x = 0$. Toutefois, il est évident qu'elle ne satisfait pas aux conditions initiales.

Comme on doit intégrer pour les conditions initiales $x_0 = 3$, $t_0 = \frac{y_0}{x_0} = \frac{4}{3}$, l'abscisse x est positive (cf. plus bas, remarque), et on doit poser

$$|x| = x. \tag{9}$$

Nous obtenons

$$\int_3^x \frac{dx}{x} = \int_{4/3}^t \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10}$$

d'où

$$\ln x - \ln 3 = \ln |t + \sqrt{1+t^2}| - \ln 3. \tag{11}$$

Remplaçant t par $\frac{y}{x}$ et nous libérant des logarithmes, nous obtenons l'intégrale particulière,

$$x = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}. \tag{12}$$

La solution particulière correspondante est

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}. \tag{13}$$

REMARQUE. Le premier membre de la formule (10) n'a pas de sens si la limite supérieure est nulle ou prend des valeurs négatives. C'est pourquoi nous avons dû, lors de la recherche de la solution, nous borner aux valeurs positives de x. La réponse à la question de savoir si la fonction (13) donne aussi la solution de l'équation (3) pour $x \leqslant 0$ exige une étude complémentaire. La substitution de l'expression (13) dans le premier membre de (3) montre que la fonction $y = \frac{x^2 - 1}{2}$ donne la solution pour *toutes* les valeurs de x.

EXEMPLE 2. Intégrer l'équation (3) pour les conditions initiales $x_0 = -3$, $y_0 = 4$.

SOLUTION. On procède de la même façon que dans l'exemple 1. Toutefois, au lieu de (9) on doit poser

$$|x| = -x, \tag{9a}$$

de sorte qu'au lieu de (10) nous obtenons

$$-\int_{-3}^{x} \frac{dx}{x} = \int_{-\frac{4}{3}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}, \tag{10a}$$

d'où

$$-\ln|x| + \ln 3 = \ln|t + \sqrt{1+t^2}| - \ln\frac{1}{3}. \tag{11a}$$

Nous avons alors au lieu de (12)

$$\frac{1}{|x|} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \tag{12a}$$

ou

$$-\frac{1}{x} = \frac{y}{x} - \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}} \tag{12b}$$

(on a le signe moins devant la dernière fraction parce que pour $x < 0$ nous avons $\sqrt{x^2} = -x$). Nous obtenons de (12b) la solution particulière cherchée

$$y = \frac{x^2-1}{2}.$$

Elle coïncide avec la solution de l'exemple 1 (cf. remarque de l'exemple 1).

Si, sans tenir compte de (9a), nous avions utilisé (10) et non (10a), nous aurions obtenu un résultat erroné.

§ 486. Equations linéaires du premier ordre

L'équation différentielle du premier ordre

$$M\,dx + N\,dy = 0 \tag{1}$$

est dite *linéaire* si le rapport $\frac{M}{N}$ ne contient y qu'au premier degré (est linéaire relativement à y). Il est admis d'écrire l'équation linéaire sous la forme

$$y' + P(x)\,y = Q(x); \tag{2}$$

ici $P(x)$ et $Q(x)$ sont des fonctions arbitraires (continues) de x.

Si, en particulier, $Q(x) = 0$, on dit que l'équation linéaire (2) est *sans second membre* (*). Dans ce cas les variables se séparent et la solution générale est de la forme

$$y = Ce^{-\int P\,dx} \tag{3}$$

(*) L'équation linéaire sans second membre est aussi appelée *homogène*. Mais cette appellation a également une autre signification (§ 485).

EXEMPLE 1. Trouver la solution générale de l'équation sans second membre

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = 0. \tag{4}$$

SOLUTION. Séparant les variables nous obtenons

$$\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{1+x^2}, \tag{5}$$

d'où

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C \tag{6}$$

ou

$$y = C_1\sqrt{1+x^2}, \tag{6a}$$

où $C_1 = e^C$. Nous aurions obtenu le même résultat en appliquant la formule (3) $\left(\text{pour } P = -\frac{x}{1+x^2}\right)$:

$$y = Ce^{-\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} = Ce^{\frac{1}{2}\ln(1+x^2)} = C\sqrt{1+x^2}.$$

REMARQUE 1. La solution particulière $y = 0$ tirée de (6a) pour $C_1 = 0$ ne peut être obtenue de (6); on perd cette solution en divisant l'équation (4) par y. En nous libérant des logarithmes figurant dans (6), nous introduisons de nouveau la solution $y = 0$. Cf. § 484, exemple 1.

REMARQUE 2. En pratique l'application de la formule (3) ne donne pas un avantage appréciable devant les transformations successives indiquées dans l'exemple 1.

L'équation avec second membre [dans laquelle $Q(x) \neq 0$] est intégrée de la manière suivante: trouvons la solution générale (3) de l'équation sans second membre correspondante; remplaçons dans cette solution la constante C par la fonction inconnue u. Portons l'expression obtenue dans (2). Après simplifications les variables u, x se séparent et en intégrant nous trouvons l'expression de u en fonction de x. La fonction $y = ue^{-\int P\,dx}$ sera la solution générale (*) de l'équation (2).

EXEMPLE 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y' - \frac{x}{1+x^2}y = x. \tag{7}$$

(*) Cette solution générale s'exprime par la formule

$$y = \left[\int dx\,Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx} + C_1\right]e^{-\int P\,dx} \tag{A}$$

Solution. La solution générale de l'équation sans second membre correspondante est (cf. exemple 1) $y = C\sqrt{1+x^2}$. Remplaçant la constante C par la fonction inconnue u, nous obtenons:

$$y = u\sqrt{1+x^2}, \tag{8}$$

d'où

$$y' = \frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2} + \frac{ux}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{9}$$

Portons (8) et (9) dans (7). Nous trouvons après simplifications:

$$\frac{du}{dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Nous en tirons l'expression de u en fonction de x:

$$u = \int\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2} + C_1. \tag{10}$$

En vertu de (8) et (10) la solution générale de l'équation donnée sera

$$y = (\sqrt{1+x^2} + C_1)\sqrt{1+x^2}\ (^*). \tag{11}$$

Remarque. On intègre de manière analogue l'équation

$$\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y) \tag{12}$$

obtenue de (2) si l'on intervertit les rôles de x et y.

§ 487. Equation de Clairaut

On appelle *équation de Clairaut* toute équation différentielle de la forme

$$y = xy' + \varphi(y'). \tag{1}$$

Son intégrale générale est

$$y = xC + \varphi(C). \tag{2}$$

L'équation de Clairaut possède en outre une intégrale singulière (§ 483); cette dernière s'obtient en éliminant le paramètre t entre les équations

$$x = -\varphi'(t), \quad y = -t\varphi'(t) + \varphi(t). \tag{3}$$

(*) Nous obtenons le même résultat $\left[\text{pour } P = -\frac{x}{1+x^2},\ Q = x\right]$ en vertu de la formule (A):

$$y = \left[\int x\,dx\,e^{\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} + C_1\right]e^{-\int -\frac{x\,dx}{1+x^2}} = \left[\int x\,dx\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C_1\right]\sqrt{1+x^2} =$$
$$= (\sqrt{1+x^2} + C_1)\sqrt{1+x^2}.$$

L'intégrale générale (2) est représentée par l'ensemble des droites tangentes à une certaine courbe L. L'intégrale singulière est représentée par la courbe L elle-même [les équations (3) la représentent sous forme paramétrique].

EXEMPLE. L'équation

$$y = xy' - y'^2 \tag{1a}$$

est une équation de Clairaut. Son intégrale générale

$$y = Cx - C^2 \tag{2a}$$

est représentée par l'ensemble des droites (fig. 475) tangentes à la parabole

$$y = \frac{1}{4}x^2. \tag{4}$$

L'équation (4) est une intégrale singulière. Elle s'obtient de la manière suivante. Nous avons dans l'exemple donné $\varphi(t) = -t^2$, $\varphi'(t) = -2t$ et les équations (3) s'écrivent

$$x = 2t, \quad y = t^2. \tag{3a}$$

Eliminant t, nous obtenons (4).

EXPLICATION. Montrons sur l'exemple de l'équation (1a) comment obtenir l'équation de l'intégrale singulière.

La courbe L tangente aux courbes intégrales (2a) est elle-même une courbe intégrale (car sa direction coïncide en tous les points avec celle du champ). Elle doit avoir avec chacune des droites

$$y = Cx - C^2 \tag{5}$$

un point commun $N(\bar{x}, \bar{y})$. Tout en étant constante pour chaque droite (5), la grandeur C varie d'une droite à l'autre de sorte que les coordonnées $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont des fonctions de C. Trouvons ces fonctions. Comme le point $N(\bar{x}, \bar{y})$ est situé sur la droite (5), nous devons avoir l'identité

$$\bar{y} = C\bar{x} - C^2. \tag{6}$$

Comme au point N les directions de la courbe L et de la droite (5) coïncident, les différentielles $d\bar{y}$, $d\bar{x}$ doivent être dans le même rapport que les différentielles dx, dy des coordonnées de la droite (5), autrement dit on doit avoir:

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x}. \tag{7}$$

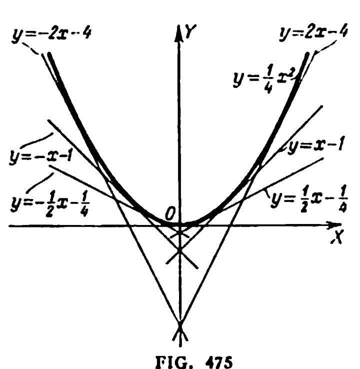


FIG. 475

Par ailleurs, les différentielles $d\bar{x}$, $d\bar{y}$ doivent satisfaire à l'égalité

$$d\bar{y} = C\,d\bar{x} + \bar{x}\,dC - 2C\,dC, \tag{8}$$

obtenue en différentiant l'identité (6). Comparant (7) et (8) nous obtenons: $(\bar{x} - 2C)\,dC = 0$, autrement dit

$$\bar{x} = 2C. \tag{9}$$

Telle est l'expression de la fonction $\bar{x}$. En la portant dans (6), nous trouvons:

$$\bar{y} = C^2. \tag{10}$$

Les équations (9), (10) ne diffèrent de (3a) que par leurs notations.

§ 488. Enveloppes

Définition 1. Un ensemble de courbes constitue une famille de courbes (à un paramètre) si à chaque courbe on peut faire correspondre un certain nombre C (le *paramètre de la famille*) de manière qu'à la variation continue de C corresponde la transformation continue de la courbe. L'équation de la forme

$$f(x,\ y,\ C) = 0, \tag{1}$$

où $f(x, y, C)$ est une fonction continue des trois variables x, y, C, représente une famille de courbes dans le plan. Les différentes courbes de la famille correspondent aux diverses valeurs de C.

L'équation (1) est appelée *équation de la famille de courbes*.

Exemple 1. L'équation

$$y = Cx - C^2$$

représente la famille de droites représentée sur la fig. 475. On a pris pour paramètre le coefficient angulaire de la droite.

Exemple 2. L'équation

$$(x - C)^2 + y^2 = 1$$

représente la famille des circonférences de rayon 1 et de centre sur l'axe OX. Le paramètre est l'abscisse du centre.

Exemple 3. L'équation

$$x^2 + y^2 = C^2$$

représente une famille des circonférences de centre au point $O(0, 0)$. Le paramètre est le rayon.

Définition 2. On dit qu'une courbe est une *enveloppe* des courbes de la famille donnée si elle est tangente à chacune d'elles.

Dans l'exemple 1 l'enveloppe était la parabole $y = \frac{1}{4} x^2$ (cf. § 487), dans l'exemple 2 le couple de droites $y = \pm 1$, dans l'exemple 3 les courbes ne possèdent pas d'enveloppe.

THÉORÈME. L'enveloppe de la famille des courbes représentée par l'équation (1) appartient au lieu géométrique des points vérifiant les équations

$$f(x, y, C) = 0, \quad f'_C(x, y, C) = 0 \tag{2}$$

pour toutes les valeurs possibles de C. Si l'on élimine C entre les équations (2), on obtient l'équation de ce lieu.

REMARQUE 1. Il n'est pas exclu que l'enveloppe ne constitue qu'une partie du lieu et il peut arriver même que le lieu existe, mais que les courbes ne possèdent pas d'enveloppe.

EXEMPLE 4. Soit $y = Cx - C^2$ l'équation d'une famille de droites. Ses points décrivant le lieu géométrique sont représentés par les équations

$$y = Cx - C^2, \quad x - 2C = 0.$$

Eliminant C, nous obtenons $y = \frac{1}{4} x^2$. Le lieu est une parabole confondue avec l'enveloppe (cf. exemple § 487).

EXEMPLE 5. Considérons les circonférences définies par l'équation générale

$$(x - C)^2 + y^2 = 1.$$

Les points décrivant le lieu géométrique sont représentés par le système

$$(x - C)^2 + y^2 = 1, \quad -2(x - C) = 0.$$

Eliminant C, nous obtenons $y^2 = 1$. Le lieu (le couple de droites $y = \pm 1$) coïncide avec l'enveloppe (cf. § 483, exemple 2).

EXEMPLE 6. Le lieu décrit par les points de la famille des paraboles semi-cubiques $(y - C)^2 = x^3$ (fig. 476) est la droite $x = 0$, mais ces paraboles ne possèdent pas d'enveloppe.

REMARQUE 2. Si la famille (1) représente l'intégrale générale d'une certaine équation différentielle, alors l'enveloppe représente une intégrale singulière. S'il n'y a pas d'enveloppe, il n'y a pas d'intégrale singulière.



FIG. 476

§ 489. Intégrabilité des équations différentielles

On a considéré aux §§ 482-487 les principaux types d'équations différentielles du premier ordre dont la solution se ramène à la recherche des intégrales des fonctions connues (*). On dit de telles équations qu'elles *se ramènent à des quadratures.*

On rencontre également en pratique des équations du premier ordre qui ne se ramènent pas à des quadratures. Lors de la résolution des équations différentielles d'ordres supérieurs de tels cas sont encore plus fréquents. Pour résoudre les équations ne se ramenant pas à des quadratures, on utilise des méthodes approchées. A leur sujet cf. §§ 490-492.

§ 490. Intégration approchée des équations différentielles du premier ordre par la méthode d'Euler

Soit donnée l'équation

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

avec les valeurs initiales $x = x_0$, $y = y_0$. On demande de trouver sa solution dans un certain intervalle (x_0, x). Divisons cet intervalle en n parties (égales ou non égales) par les points successifs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (fig. 477).

Dans l'intervalle partiel (x_0, x_1) nous posons:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0), \tag{2}$$

autrement dit, au lieu de la courbe intégrale cherchée M_0K_0 on prend sa tangente M_0M_1.

Au point $x = x_1$ nous obtenons la valeur approchée de la solution cherchée

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)\,\Delta x_0. \tag{3}$$

Dans l'intervalle partiel (x_1, x_2) nous posons

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

autrement dit, nous remplaçons la courbe intégrale cherchée M_0K_0 par la tangente M_1M_2 à la courbe intégrale M_1K_1 (une double erreur apparaît alors: la tangente M_1M_2 s'écarte de la courbe M_1K_1, et cette

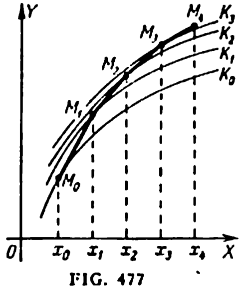


FIG. 477

(*) Ces intégrales peuvent ne pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaire (§ 309).

dernière ne coïncide pas avec la courbe cherchée M_0K_0). Poursuivant ce processus, nous obtenons les valeurs approchées successives

$$\left.\begin{array}{l} y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\Delta x_1, \\ y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,\Delta x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\Delta x_{n-1}. \end{array}\right\} \quad (4)$$

Pour les intervalles partiels suffisamment petits nous atteindrons n'importe quelle précision, mais cela au prix des calculs laborieux. C'est pourquoi la méthode d'Euler n'est appliquée que pour les approximations grossières. Le plus souvent il est avantageux de diviser l'intervalle (x_0, x) en parties égales.

EXEMPLE. Trouver la solution approchée de l'équation

$$y' = \frac{1}{2}xy$$

dans l'intervalle (0, 1) pour les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ $\left[\text{ici } f(x, y) = \frac{1}{2}xy\right]$.

SOLUTION. Divisons l'intervalle (0, 1) en 10 parties égales, de sorte que

$$\Delta x_0 = \Delta x_1 = \dots = \Delta x_9 = 0{,}1.$$

Nous trouvons successivement à l'aide des formules (3) et (4):

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}x_0y_0\Delta x_0 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0\cdot 1\cdot 0{,}1 = 1,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{2}x_1y_1\Delta x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}1\cdot 1\cdot 0{,}1 = 1{,}005,$$

etc. Disposons les résultats d'après le schéma suivant:

x	y	$\Delta y = \frac{1}{2}xy\Delta x$	Valeur exacte de y
0	1	0	1
0,1	1	0,005	1,0025
0,2	1,005	0,0101	1,0100
0,3	1,0151	0,0152	1,0227
0,4	1,0303	0,0206	1,0408
0,5	1,0509	0,0263	1,0645
0,6	1,0772	0,0323	1,0942
0,7	1,1095	0,0392	1,1303
0,8	1,1487	0,0459	1,1735
0,9	1,1946	0,0538	1,2244
1,0	1,2484		1,2840

On forme avec les deux premières colonnes une table de solution approchée. L'équation considérée admet également la solution exacte en vertu de la formule $\int_1^y \frac{dy}{y} = \int_0^x \frac{1}{2} x\,dx$, d'où $y = e^{\frac{1}{4}x^2}$. Les valeurs correspondantes de y sont données dans la dernière colonne. La comparaison avec la première colonne montre que l'erreur augmente progressivement avec x et atteint 2,9% pour $x = 1$.

§ 491. Intégration des équations différentielles au moyen des séries

La solution de l'équation

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

pour les conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$ peut être recherchée sous forme de série des puissances de $x - x_0$, autrement dit, sous la forme

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots \tag{2}$$

Les facteurs $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ sont trouvés par la méthode des coefficients indéterminés (§ 307) ou par d'autres procédés.

La méthode de résolution des équations différentielles au moyen des séries fut systématiquement appliquée par Newton (§ 292). A la différence de la méthode d'Euler qui donne la solution sous forme de table (§ 490) la solution s'obtient ici sous forme de formule. Cette dernière n'est toutefois pas valable à l'extérieur de l'intervalle de convergence de la série. Des cas sont théoriquement possibles où la solution ne peut être représentée par une série (cf. § 400). L'étude théorique de cette question a été effectuée par Cauchy. Kovalevskaïa a étudié un problème analogue pour les équations aux dérivées partielles.

Malgré ces restrictions la méthode des séries est d'une grande portée pratique.

Exemple. Trouver la solution de l'équation

$$y' = \frac{1}{2} xy \tag{3}$$

pour les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

Solution. Nous posons, conformément à la formule (2):

$$y = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + \ldots \tag{4}$$

Les coefficients $c_1, c_2, c_3, \ldots$ sont pour l'instant indéterminés. Dérivant (4) nous trouvons:

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots \tag{5}$$

Portant (4) et (5) dans (3), nous obtenons:

$$c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{2}c_2x^3 + \ldots \qquad (6)$$

Egalons maintenant les coefficients des mêmes puissances de x. Nous obtenons les relations

$$c_1 = 0, \quad 2c_2 = \frac{1}{2}, \quad 3c_3 = \frac{1}{2}c_1, \quad 4c_4 = \frac{1}{2}c_2, \ldots \qquad (7)$$

Nous en tirons successivement les coefficients

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \frac{1}{4}, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{1}{32}, \quad c_5 = 0, \ldots \qquad (8)$$

La solution cherchée s'écrira

$$y = 1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{384}x^6 + \ldots \qquad (9)$$

Pour $x = 1$ nous obtenons $y \approx 1,2839$ (cf. table § 490). Le développement (9) coïncide avec le développement de la fonction $e^{\frac{x^2}{4}}$:

$$e^{\frac{x^2}{4}} = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{x^2}{4}\right)^3 + \ldots \qquad (10)$$

Autre solution. En dérivant successivement l'égalité (3), nous trouvons:

$$y'' = \frac{1}{2}(xy)' = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy', \qquad (11)$$

$$y''' = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}xy'\right)' = y' + \frac{1}{2}xy'', \qquad (12)$$

$$y^{IV} = \left(y' + \frac{1}{2}xy''\right)' = \frac{3}{2}y'' + \frac{1}{2}xy''', \qquad (13)$$

etc. Portant dans (3) les valeurs initiales $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, nous trouvons $y'_0 = 0$; puis de (11) nous obtenons:

$$y''_0 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{1}{2}x_0y'_0 = \frac{1}{2}.$$

Nous trouvons de même:

$$y'''_0 = 0, \quad y^{IV}_0 = \frac{3}{4},$$

etc. Portant les valeurs trouvées dans la série de Taylor

$$y = y_0 + y'_0x + \frac{y''_0}{2!}x^2 + \frac{y'''_0}{3!}x^3 + \frac{y^{IV}_0}{4!}x^4 + \ldots,$$

nous obtenons de nouveau la série (9).

§ 492. Formation des équations différentielles

Former une équation différentielle d'après les conditions d'un problème (géométrique, physique ou technique) c'est exprimer en langage mathématique la *relation entre les grandeurs variables et leurs accroissements infiniment petits*. L'équation différentielle s'obtient parfois sans que l'on ait à considérer les accroissements, car ils l'ont déjà été. Ainsi, en représentant la vitesse par l'expression $v = \frac{ds}{dt}$, nous ne faisons pas appel aux accroissements Δs, Δt, mais en fait ils sont pris en considération car

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Lors de la formation des équations différentielles du premier ordre les accroissements infiniment petits sont immédiatement remplacés par les différentielles correspondantes. L'erreur ainsi commise est automatiquement éliminée par le passage à la limite [*]. En général, on peut remplacer tout infiniment petit par un infiniment petit équivalent, par exemple un arc infiniment petit par la corde correspondante ou inversement.

Il n'existe pas de règles exhaustives pour former les équations différentielles. De même que dans le cas des équations algébriques on doit souvent faire preuve d'ingéniosité. Beaucoup dépend de l'expérience acquise par la réalisation des exercices.

EXEMPLE 1. Un réservoir contient 100 litres de saumure obtenue par la dissolution dans l'eau de 10 kg de sel. Chaque minute 2 litres de saumure s'écoulent du réservoir qui sont compensés par 3 litres d'eau pure. Un brassage adéquat conserve une concentration égale de sel dans tout le réservoir. Combien de sel restera-t-il dans le réservoir au bout d'une heure?

SOLUTION. Désignons par x la quantité de sel dans le réservoir (en kg), par t le temps compté à partir de l'instant initial (en minutes).

Pendant l'intervalle de temps dt $(-dx)$ kg de sel quitte le réservoir [x est une fonction décroissante du temps, par conséquent dx est une grandeur négative et $(-dx)$ une grandeur positive].

Pour former l'équation calculons la diminution de sel d'une autre manière. A l'instant t le réservoir contient $(100 + t)$ l de liquide (une dépense de $2t$ l et un apport de $3t$ l) dans lesquels sont dissous x kg de sel. Par conséquent un litre de saumure contient $\frac{x}{100 + t}$ kg de sel.

---

[*] Voir la remarque.

Pendant l'intervalle de temps dt, $2dt$ l de saumure quittent le réservoir; cela signifie que la quantité de sel diminue de $\frac{x}{100+t}\cdot 2dt$ kg. Nous obtenons l'équation différentielle

$$-dx = \frac{2x\,dt}{100+t}. \tag{1}$$

Séparant les variables et tenant compte des conditions initiales $t_0 = 0$, $x_0 = 10$, nous obtenons:

$$\int_{10}^{x} -\frac{dx}{x} = \int_{0}^{t} \frac{2dt}{100+t}, \tag{2}$$

autrement dit,

$$\ln\frac{10}{x} = 2\ln\frac{100+t}{100} \tag{3}$$

ou

$$\frac{10}{x} = \left(\frac{100+t}{100}\right)^2. \tag{3a}$$

Portant $t = 60$ dans (3a), nous trouvons la quantité cherchée de sel $x \approx 3{,}91$ (kg).

Pour des valeurs moins arrondies il vaut mieux prendre la formule (3). En multipliant ses deux membres par le module M (§ 242), nous passons des logarithmes népériens aux logarithmes décimaux.

Remarque. En formant l'équation (1) nous avons commis une double erreur: tout d'abord nous avons remplacé Δx et Δt par dx et dt, et ensuite nous avons convenu que pendant l'intervalle dt la diminution de sel vaut $\frac{x}{100+t}\cdot 2dt$ kg, c'est-à-dire que la concentration de saumure est égale à $\frac{x}{100+t}$ au cours de tout l'intervalle de temps $(t, t+dt)$. En fait elle n'est égale à $\frac{x}{100+t}$ qu'au début de l'intervalle, et elle diminue ensuite. Toutefois, ces deux erreurs sont automatiquement compensées.

En effet, pendant un intervalle de temps *petit* $(t, t+\Delta t)$ la concentration de saumure diffère faiblement de $\frac{x}{100+t}\,\frac{\text{kg}}{1}$; cela signifie que

la quantité de sel diminue sinon exactement du moins *approximativement* de $\frac{2x\,\Delta t}{100+t}$ l. Par conséquent, nous avons l'égalité approchée

$$-\Delta x \approx \frac{2x\,\Delta t}{100+t}$$

ou

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx -\frac{2x}{100+t}.$$

Cette égalité approchée est d'autant plus exacte que Δt est petit; en d'autres termes $-\frac{2x}{100+t}$ est la limite du rapport $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ quand $\Delta t \to 0$. Or, cette limite est la dérivée $\frac{dx}{dt}$. Par conséquent, la dérivée $\frac{dx}{dt}$ est *exactement* égale à $-\frac{2x}{100+t}$:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2x}{100+t}.$$

Cette égalité exacte est équivalente à l'équation (1).

EXEMPLE 2. On construit une pile de pierre de 12 m de hauteur à sections horizontales circulaires. La pile est calculée pour une charge $P = 90$ t (outre son poids propre). La densité du matériau est $\gamma = 2{,}5\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$, la pression admissible $k = 300\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^2}$. Trouver les aires des bases supérieure et inférieure, ainsi que la forme de la section axiale de la pile (pour la dépense la moindre de matériaux de construction).

SOLUTION. L'aire s_0 de la base supérieure peut pour la pression admissible $k = 300\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^2}$ résister à une charge ks_0, et par hypothèse $ks_0 = P$. Par conséquent,

$$s_0 = \frac{P}{k} = \frac{90}{300} = 0{,}3\ (\mathrm{m}^2). \qquad (4)$$

Désignons par x la distance de la section s (MN sur la fig. 478) à la base supérieure. L'aire s de la section horizontale croît avec x car, outre la charge P, l'aire s est sollicitée par la partie supérieure de la pile. Dégageons une couche horizontale infiniment petite $MNnm$. L'aire

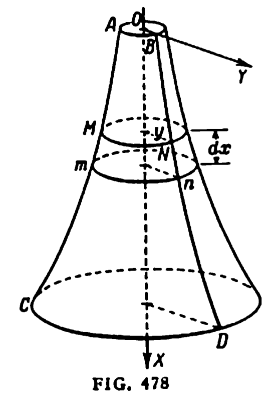


FIG. 478

de sa base inférieure mn dépasse de ds celle de sa base supérieure MN. C'est pourquoi pour la base inférieure la charge limite est de $k\,ds$ plus grande que pour la base supérieure. D'autre part, la charge sur mn est plus grande que celle sur MN d'une grandeur égale au poids de la couche $MNnm$, c'est-à-dire de $\gamma s\,dx$ (*). Nous obtenons l'équation différentielle

$$k\,ds = \gamma s\,dx. \tag{5}$$

Séparant les variables et intégrant pour les conditions initiales $x = 0$, $s = s_0$ nous obtenons:

$$\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{s} = \frac{\gamma}{k}\int_{0}^{x} dx, \tag{6}$$

d'où

$$\ln\frac{s}{s_0} = \frac{\gamma}{k}x. \tag{7}$$

Pour trouver l'aire s_1 de la base inférieure il faut poser $x = 12$ (pour $s_0 = 0{,}3$, $\gamma = 2{,}5$, $k = 300$). Passant aux logarithmes décimaux (§ 242), nous obtenons:

$$\lg\frac{s_1}{0{,}3} = M\cdot\frac{2{,}5}{300}\cdot 12, \tag{8}$$

d'où $s_1 = 0{,}33$ (m²).

La forme de la section axiale est caractérisée par l'équation de la méridienne BD. Désignons par y le rayon de la section MN; alors $\frac{s}{s_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2$, et l'égalité (7) donne:

$$2\ln\frac{y}{y_0} = \frac{\gamma}{k}x \quad \text{ou} \quad y = y_0 e^{\frac{\gamma}{2k}x}. \tag{9}$$

C'est l'équation de la méridienne.

§ 493. Equations différentielles du second ordre

La forme générale de l'équation différentielle du second ordre est:

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

(*) Nous convenons que la couche $MNnm$ est cylindrique (l'erreur est un infiniment petit d'ordre supérieur par rapport à dx).

L'équation résolue par rapport à y'' est de la forme

$$y' = f(x, y, y'). \qquad (2)$$

On suppose que la fonction $f(x, y, y')$ des trois variables x, y, y' est déterminée univoquement et continue dans un certain domaine de variation de ces variables.

En règle générale (*), la donnée des conditions initiales $x = x_0$, $y = y_0$, $y' = y'_0$ (appartenant au domaine considéré) détermine une solution unique de l'équation (2).

Géométriquement, une seule courbe intégrale passe par un point donné $M(x_0, y_0)$ *dans une direction donnée.*

La solution correspondante de l'équation (2) est dite *particulière.* L'ensemble de toutes les solutions particulières est appelé *solution générale.* On s'efforce de représenter la solution générale par une certaine fonction

$$y = \varphi(x, C_1, C_2) \ (C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont constants}), \qquad (3)$$

qui donnerait n'importe quelle solution particulière (pour des valeurs appropriées de C_1, C_2).

Remarque. Une infinité de courbes intégrales passent par un point donné $M(x_0, y_0)$, une dans chaque direction possible.

Exemple. Pour les valeurs initiales $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$ trouver la solution particulière de l'équation

$$y'' = x. \qquad (4)$$

Solution. Ecrivons l'équation donnée sous la forme

$$\frac{dy'}{dx} = x. \qquad (5)$$

Tenant compte des conditions initiales nous avons: $\int_2^{y'} dy' = \int_1^x x\,dx$,

c'est-à-dire $y' = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$. Tenant compte de nouveau des conditions initiales, nous obtenons: $\int_1^y dy = \int_1^x \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\right) dx$. La solution particulière cherchée est donc:

$$y = \frac{x^3}{6} + \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}. \qquad (6)$$

(*) Une exception n'est possible que dans le cas où l'une au moins des dérivées $f'_y(x, y, y)$, $y'(x, y, y')$ est discont inue ou n'existe pas.

Autre procédé. Nous trouvons de (5):

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \tag{7}$$

d'où

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2. \tag{8}$$

La fonction (8) représente la solution générale, car pour des valeurs adéquates des constantes C_1, C_2 elle donne n'importe quelle solution particulière. Ainsi, portant dans (7) et (8) les valeurs initiales nous aurons:

$$2 = \frac{1}{2} + C_1, \quad 1 = \frac{1}{6} + C_1 + C_2, \tag{9}$$

d'où nous tirons:

$$C_1 = \frac{3}{2}, \quad C_2 = -\frac{2}{3}.$$

Portant ces valeurs dans (8) nous retrouvons la solution particulière (6).

Avertissement. Toute solution comportant deux constantes arbitraires n'est pas une solution générale. Par exemple, la fonction

$$y = \frac{x^3}{6} + C_3x - C_4\left(x - \frac{1}{C_4}\right) \tag{10}$$

est une solution de l'équation (4), mais ne comprend pas toutes les solutions particulières; ainsi, il n'existe pas de valeurs de C_3, C_4 pour lesquelles (10) donnerait la solution particulière (6). Donc, la solution (10) n'est pas une solution générale. Cela apparaît ne serait-ce que du fait que les deux constantes C_3, C_4 sont non essentielles, autrement dit, on peut les remplacer par une seule. En effet, on peut mettre la formule (10) sous la forme

$$y = \frac{x^3}{6} + (C_3 - C_4)\,x + 1.$$

Introduisant la notation $C_1 = C_3 - C_4$, nous obtenons:

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1x + 1;$$

cette solution s'obtient de la solution générale (8) pour $C_2 = 1$.

§ 494. Equations différentielles d'ordre n

L'équation d'ordre n résolue par rapport à $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

possède généralement pour des valeurs initiales données x_0, y_0, y'_0, ..., $y_0^{(n-1)}$ (cf. § 493) une solution unique. Cette solution est dite solution *particulière*. L'ensemble des solutions particulières de l'équation est appelé *solution générale*. On s'efforce de représenter la solution générale par une fonction

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Toute solution comportant n constantes n'est pas la solution générale (cf. § 493, avertissement).

§ 495. Cas d'abaissement

Parfois, il est possible d'abaisser l'ordre d'une équation différentielle du second ordre ou d'un ordre plus élevé. Voici deux cas les plus importants.

1[er] CAS. L'équation ne contient pas y. On choisit alors pour fonction inconnue la grandeur y'.

EXEMPLE 1. Intégrer l'équation du second ordre

$$(1 + x)\, y'' + y' = 0. \qquad (1)$$

SOLUTION. Ecrivons (1) sous la forme

$$(1 + x) \frac{dy'}{dx} + y' = 0. \qquad (2)$$

C'est une équation du premier ordre (pour la fonction inconnue y' de la variable x). Multipliant par dx, nous obtenons une équation aux différentielles totales (§ 484), de sorte que l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$(1 + x)\, y' = C_1. \qquad (3)$$

Revenons maintenant à la fonction initiale inconnue y et écrivons l'équation (3) sous la forme:

$$(1 + x) \frac{dy}{dx} = C_1. \qquad (3a)$$

Intégrant l'équation (3a) nous trouvons:

$$y = C_1 \ln (1 + x) + C_2. \qquad (4)$$

C'est la solution générale de l'équation (1).

2° CAS. L'équation ne contient pas x. Considérons alors y' comme fonction inconnue de y. Les dérivées du second ordre et d'ordre supérieur se transforment alors en vertu des formules

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dy} y', \tag{5}$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy} y'\right)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{dy'}{dy} y'\right)y', \tag{6}$$

etc.

EXEMPLE 2. Intégrer l'équation du second ordre

$$y'' + y = 0. \tag{7}$$

SOLUTION. Appliquant la formule (5), écrivons (7) sous la forme suivante:

$$y' \, dy' + y \, dy = 0. \tag{8}$$

C'est une équation du premier ordre (des variables y et y'). L'intégrale générale de l'équation (8) est

$$y'^2 + y^2 = C_1^2. \tag{9}$$

Revenant aux variables initiales x, y écrivons (9) sous la forme

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1^2 - y^2}} = \pm \, dx. \tag{10}$$

Nous trouvons alors en intégrant

$$\arcsin \frac{y}{C_1} = \pm (x + C_2),$$

d'où

$$y = C_1 \sin (x + C_2)$$

(le signe $\pm$ est inclus dans la constante C_1).

C'est la solution générale de l'équation (8); on peut la mettre sous la forme

$$y = C_3 \sin x + C_4 \cos x,$$

où

$$C_3 = C_1 \cos C_2, \; C_4 = C_1 \sin C_2.$$

§ 496. Equations linéaires du second ordre

On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation de la forme

$$y'' + P(x) \, y' + Q(x) \, y = R(x), \tag{1}$$

où les fonctions $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ ne dépendent pas de y.

Si $R(x) = 0$, l'équation (1) est appelée *équation sans second membre* [*], si $R(x) \neq 0$ *équation avec second membre* (ou *complète*).

L'équation sans second membre

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

possède les propriétés suivantes.

THÉORÈME 1. Si la fonction $\varphi_1(x)$ est une solution de l'équation (2), la fonction $C_1\varphi_1(x)$ (C_1 est une constante) est également une solution.

THÉORÈME 2. Si les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont deux solutions de l'équation (2), la fonction $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$ est également une solution.

COROLLAIRE. Si $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont deux solutions de l'équation (2), alors $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ (C_1 et C_2 sont des constantes) est également une solution.

EXEMPLE 1. Considérons l'équation sans second membre

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' - \frac{1}{x^2}\,y = 0. \qquad (3)$$

Après avoir vérifié que les fonctions x et $\frac{1}{x}$ sont des solutions, nous concluons que la fonction

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x}$$

est aussi une solution de l'équation (3).

REMARQUE 1. La solution $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ *n'est pas toujours la solution générale.* Ainsi, les fonctions $\varphi_1(x) = 3x$ et $\varphi_2(x) = 5x$ sont des solutions de l'équation (3), la fonction $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = (3C_1 + 5C_2)\,x$ est aussi une solution, mais elle n'est pas la solution générale (les deux constantes C_1 et C_2 sont non essentielles; cf. § 493, avertissement).

REMARQUE 2. La solution $y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$ n'est pas la solution générale si les fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont *linéairement dépendantes*, c'est-à-dire si elles sont liées par la relation

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) \equiv 0, \qquad (4)$$

où l'une au moins des constantes a_1, a_2 est non nulle.

Si par contre les solutions $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ sont *linéairement indépendantes*, c'est-à-dire si la relation (4) n'est possible que quand les constantes a_1, a_2 sont simultanément nulles, alors la fonction

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

donne la solution générale.

---

[*] L'équation sans second membre est aussi appelée *homogène*. Cf. renvoi. p. 713.

EXEMPLE 2. Les solutions $\varphi_1(x) = 3x$ et $\varphi_2(x) = 5x$ de l'équation (3) sont linéairement dépendantes, car pour $a_1 = 5$, $a_2 = -3$, ou $a_1 = 10$, $a_2 = -6$, ou encore $a_1 = 15$, $a_2 = -9$, etc., nous obtenons $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) = 0$.

Les solutions $\varphi_1(x) = 3x$ et $\varphi_2(x) = -\dfrac{1}{2x}$ sont linéairement indépendantes car la relation (4) n'est possible que pour $a_1 = a_2 = 0$. Cela fait que la solution $y = 3C_1x + 5C_2x$ n'est pas la solution générale, alors que la solution $y = 3C_1x - \dfrac{C_2}{2x}$ l'est.

Tout ce qui vient d'être dit se rapporte exclusivement à l'*équation linéaire sans second membre.*

L'équation avec second membre

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = R(x) \tag{5}$$

possède la propriété suivante.

THÉORÈME 3. Si la fonction $f(x)$ est l'une des solutions de l'équation (5), la solution générale est

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + f(x), \tag{6}$$

où $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (2), c'est-à-dire de l'équation sans second membre correspondante.

EXEMPLE 3. Considérons l'équation

$$y'' + \frac{1}{x}\,y' - \frac{1}{x^2}\,y = 8x. \tag{7}$$

Après avoir vérifié que la fonction $f(x) = x^3$ est une solution de (7), nous concluons que la solution générale de (7) est (cf. exemple 1)

$$y = C_1x + C_2\frac{1}{x} + x^3.$$

Le théorème 3 peut être formulé comme suit: *la solution générale de l'équation complète s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre correspondante une solution particulière de l'équation complète.*

REMARQUE 3. L'équation linéaire du second ordre (avec ou sans second membre) ne se ramène à des quadratures que dans des cas particuliers. Toutefois, parmi ces derniers on compte le cas particulièrement important pour la pratique lorsque les coefficients $P(x)$ et $Q(x)$ sont tous deux constants (cf. plus bas §§ 497-499).

§ 497. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

L'équation

$$y'' + py' + qy = R(x), \qquad (1)$$

où p et q sont constants et $R(x)$ dépend de x seul (ou est une grandeur constante), est appelée *équation linéaire du second ordre à coefficients constants*. L'équation (1) se ramène toujours à des quadratures. De plus, dans le cas où $R(x) = 0$ (équation sans second membre), la solution non seulement se ramène à des quadratures, mais s'exprime toujours à l'aide des fonctions élémentaires (cf. § 498).

§ 498. Equations à coefficients constants sans second membre

Considérons l'équation

$$y'' + py' + qy = 0, \qquad (1)$$

où p, q sont des constantes. Nous chercherons une solution de la forme

$$y = e^{rx}. \qquad (2)$$

Portant (2) dans (1), nous trouvons que le nombre r doit vérifier l'équation

$$r^2 + pr + q = 0. \qquad (3)$$

Cette dernière est appelée *équation caractéristique*.

Trois cas sont alors possibles.

1er CAS. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$. L'équation caractéristique (3) possède deux racines réelles non égales r_1, r_2

$$\left(r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Dans ce cas nous avons deux solutions linéairement indépendantes (§ 496, remarque 2): $y = e^{r_1 x}$, $y = e^{r_2 x}$. La solution générale est de la forme:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \qquad (4)$$

EXEMPLE 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$8y'' + 2y' - 3y = 0, \qquad (5)$$

ainsi que la solution particulière pour les conditions initiales $x_0 = 0$, $y_0 = -6$, $y'_0 = 7$.

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$8r^2 + 2r - 3 = 0 \tag{6}$$

possède deux racines réelles non égales:

$$r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -\frac{3}{4}.$$

Les fonctions $y = e^{\frac{1}{2}x}$, $y = e^{-\frac{3}{4}x}$ donnent deux solutions linéairement indépendantes. La solution générale de l'équation (5) est

$$y = C_1 e^{\frac{1}{2}x} + C_2 e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7}$$

Pour trouver la solution particulière nous calculons la dérivée y':

$$y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4} C_2 e^{-\frac{3}{4}x}. \tag{7a}$$

Portant dans (7) et (7a) les valeurs initiales, nous obtenons le système

$$-6 = C_1 + C_2, \qquad 7 = \frac{1}{2} C_1 - \frac{3}{4} C_2.$$

Nous en tirons: $C_1 = 2$, $C_2 = -8$. La solution particulière cherchée est

$$y = 2e^{\frac{1}{2}x} - 8e^{-\frac{3}{4}x}.$$

2ᵉ CAS. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$. L'équation caractéristique possède deux racines égales $\left(r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}\right)$.

Dans ce cas les solutions $y = e^{r_1x}$, $y = e^{r_2x}$ sont linéairement dépendantes (elles coïncident). Mais maintenant on a, outre la solution $y = e^{-\frac{p}{2}x}$, une solution linéairement indépendante $y = xe^{-\frac{p}{2}x}$. La solution générale sera:

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{-\frac{p}{2}x}. \tag{8}$$

EXEMPLE 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + 4y' + 4y = 0 \tag{9}$$

et la solution particulière pour les conditions initiales $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $y'_0 = -4$.

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

possède deux racines égales $r_1 = r_2 = -2$. Les fonctions $y = e^{-2x}$, $y = xe^{-2x}$ donnent les solutions linéairement indépendantes. La solution générale de l'équation (9) est

$$y = (C_1 + C_2x)\, e^{-2x}. \qquad (10)$$

Nous trouvons en dérivant:

$$y' = [-2C_1 + C_2(1 - 2x)]\, e^{-2x}. \qquad (10a)$$

Portant les valeurs initiales dans (10) et (10a) nous obtenons le système

$$0{,}5 = (C_1 + 0{,}5C_2)\, e^{-1}, \qquad -4 = -2C_1e^{-1}.$$

Nous en tirons: $C_1 = 2e$, $C_2 = -3e$. La solution particulière cherchée est

$$y = (2e - 3ex)\, e^{-2x}$$

ou

$$y = (2 - 3x)\, e^{1-2x}.$$

3e CAS. $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$. L'équation caractéristique possède deux racines complexes:

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \beta i, \qquad (11)$$

où

$$\beta = \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Dans ce cas les expressions

$$e^{r_1x}, \quad e^{r_2x} \qquad (12)$$

n'ont de valeurs réelles pour aucune valeur réelle de x autre que 0. Mais maintenant on peut utiliser les fonctions

$$y = e^{-\frac{p}{2}x} \cos \beta x, \qquad y = e^{-\frac{p}{2}x} \sin \beta x. \qquad (13)$$

En les portant dans l'équation (1), nous vérifions que chacune des fonctions (13) est la solution de l'équation (1).

On indiquera au § 498a comment on peut obtenir les solutions (13) des solutions *complexes* de la forme (12).

Les solutions (13) sont linéairement indépendantes, de sorte que la solution générale sera:

$$y = e^{-\frac{p}{2}x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{14}$$

ou, sous une autre forme,

$$y = C_3 e^{-\frac{p}{2}x} \sin (C_4 + \beta x) \tag{14a}$$

(où $C_3 \sin C_4 = C_1$, $C_3 \cos C_4 = C_2$).

EXEMPLE 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + y' + y = 0. \tag{15}$$

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$r^2 + r + 1 = 0 \tag{16}$$

possède les racines imaginaires $r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$. Les fonctions

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \quad \text{et} \quad y = e^{-\frac{1}{2}x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

donnent les solutions linéairement indépendantes. La solution générale de (1) est

$$y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \tag{17}$$

ou

$$y = C_3 e^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(C_4 + \frac{\sqrt{3}}{2} x\right). \tag{17a}$$

EXEMPLE 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + y = 0.$$

SOLUTION. L'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$ possède les racines imaginaires $r_{1,2} = \pm i$ (ici $\beta = 1$, $-\frac{p}{2} = 0$). La solution générale est (cf. § 495, exemple 2)

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

§ 498a. Relation entre les 1er et 3e cas du § 498

Les solutions particulières de la forme

$$\varphi_1(x) = e^{r_1 x}, \ \varphi_2(x) = e^{r_2 x} \left[r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right], \tag{1}$$

que nous avons utilisées au § 498 pour le 1er cas, peuvent également être utilisées pour le 3e cas si l'on introduit les nombres complexes et si l'on définit la puissance complexe du nombre e comme cela a été fait au § 409. Les formules (1) s'écrivent maintenant:

$$\varphi_1(x) = e^{\left(-\frac{p}{2} + \beta i\right) x}, \quad \varphi_2(x) = e^{\left(-\frac{p}{2} - \beta i\right) x}, \tag{2}$$

où $\beta \left[= \sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2} \right]$ et $-\frac{p}{2}$ sont des nombres réels. Les expressions (2) représentent un couple de fonctions *complexes* de la variable *réelle* x. Comme ces fonctions peuvent être dérivées d'après les règles usuelles (§ 408), elles sont également solutions de l'équation $y'' + py' + qy = 0$ dans le 3e cas. Ces solutions ne sauraient nous satisfaire car elles ne sont pas réelles. *Toutefois, on peut en tirer des solutions réelles*. En effet, appliquant la formule d'Euler (§ 410), nous pouvons représenter les solutions (2) sous la forme

$$\varphi_1(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x), \tag{3}$$

$$\varphi_2(x) = e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x). \tag{4}$$

La fonction $C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x)$ est une solution pour n'importe quelles valeurs constantes de C_1, C_2 (§ 496). Posant $C_1 = \frac{1}{2}$, $C_2 = \frac{1}{2}$, puis $C_1 = -\frac{i}{2}$, $C_2 = \frac{i}{2}$, nous obtenons deux solutions réelles

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad \text{et} \quad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Elles étaient justement utilisées dans le 3e cas § 498.

§ 499. Equations complètes à coefficients constants

La solution générale de l'équation complète

$$y'' + py' + qy = R(x) \tag{1}$$

s'obtient à l'aide des quadratures à partir de la solution générale de l'équation sans second membre correspondante

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{2}$$

d'après la méthode générale exposée plus bas (§ 501). Toutefois, dans de nombreux cas intéressants pour la pratique on atteint le même but plus simplement de la manière suivante.

On cherche d'abord une *solution particulière* $f(x)$ de l'équation considérée (1), puis *on ajoute* $f(x)$ à *la solution générale de l'équation sans second membre correspondante* (2). La somme est (§ 496, théorème 3) la solution générale de l'équation donnée.

Pour trouver la fonction $f(x)$ on utilise les trois règles suivantes.

RÈGLE 1. Si le second membre $R(x)$ de l'équation (1) est de la forme

$$R(x) = P(x)e^{kx}, \tag{3}$$

où $P(x)$ est un polynôme quelconque de degré m, et si le nombre k n'est pas une racine de l'équation caractéristique

$$r^2 + pr + q = 0, \tag{4}$$

alors l'équation (1) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = Q(x)\,e^{kx}, \tag{5}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de même degré m [l'astérisque dont est affectée y sert à distinguer la solution particulière $y^* = f(x)$ de l'équation (1) de sa solution générale].

On peut trouver les coefficients et le terme indépendant des inconnues du polynôme $Q(x)$ par la méthode des coefficients indéterminés.

REMARQUE 1. Si le facteur $P(x)$ est une grandeur constante (un polynôme de degré zéro), alors $Q(x)$ est aussi constant.

REMARQUE 2. La règle s'étend également au cas où $R(x)$ est un polynôme (c'est-à-dire $k = 0$). Alors la solution (5) est aussi un polynôme.

EXEMPLE 1. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{6}$$

SOLUTION. L'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0 \tag{7}$$

possède les racines $r_1 = 1$, $r_2 = -\frac{1}{2}$, de sorte que la solution générale de l'équation sans second membre correspondante est

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} \tag{8}$$

[le trait au-dessus de y sert à distinguer la solution générale de l'équation (2) de la solution générale de l'équation (1)].

Il reste à trouver une solution particulière quelconque y^* de l'équation (6). Le second membre de cette dernière est de la forme (3),

où $P(x) = 3$ (polynôme de degré zéro) et le nombre $k = \frac{1}{2}$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique (7). En vertu de la règle 1 l'équation (6) possède une solution de la forme

$$y^* = Ae^{\frac{1}{2}x} \quad (A \text{ est une constante}). \tag{9}$$

Portant (9) dans (6), nous trouvons:

$$\left(\frac{1}{4}A - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A\right) e^{\frac{1}{2}x} = 3e^{\frac{1}{2}x}. \tag{10}$$

Egalant les coefficients de $e^{\frac{1}{2}x}$, nous obtenons:

$$A = -6. \tag{11}$$

La solution cherchée y^* est

$$y^* = -6e^{\frac{1}{2}x}. \tag{12}$$

La solution générale de (6) est

$$y = \bar{y} + y^* = C_1e^x + C_2e^{-\frac{1}{2}x} - 6e^{\frac{1}{2}x}. \tag{13}$$

EXEMPLE 2. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 3x. \tag{14}$$

L'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

possède les racines $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, de sorte que (avec les notations de l'exemple 1)

$$\bar{y} = C_1e^x + C_2e^{2x}. \tag{15}$$

Le second membre de l'équation (14) est de la forme (3), où $P(x) = x^2 + 3x$ et le nombre $k = 0$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique. Recherchons une solution de la forme

$$y^* = Ax^2 + Bx + C. \tag{16}$$

Portant dans (14) nous obtenons l'égalité

$$2Ax^2 + (2B - 6A)x + 2C - 3B + 2A = x^2 + 3x. \tag{17}$$

Egalant les coefficients de mêmes puissances de x, nous obtenons le système

$$2A = 1, \quad 2B - 6A = 3, \quad 2C - 3B + 2A = 0, \tag{18}$$

d'où nous trouvons: $A = \frac{1}{2}$, $B = 3$, $C = 4$, de sorte que

$$y^* = \frac{1}{2} x^2 + 3x + 4. \qquad (19)$$

La solution générale de l'équation (14) est

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + 3x + 4. \qquad (20)$$

Remarque 3. Pour l'équation $y'' - 3y' = x^2 + 3x$ (*) la recherche d'une solution particulière de la forme (16) aurait été inutile (**), car le nombre $k = 0$ est maintenant une racine de l'équation caractéristique ($r^2 - 3r = 0$). Les conditions de la règle 1 sont violées et il faut appliquer la règle 2.

Règle 2. Supposons que le second membre de l'équation (1) soit de la forme

$$R(x) = P(x)\, e^{kx}, \qquad (21)$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré m; supposons encore que le nombre k est une racine de l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$. Si cette racine est simple (autrement dit, si c'est l'une des deux racines distinctes), l'équation (1) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = xQ(x)\, e^{kx}, \qquad (22)$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré m; si par contre k est une racine double de l'équation caractéristique (autrement dit, l'une des deux racines égales), l'équation (1) possède une solution de la forme

$$y^* = x^2 Q(x)\, e^{kx}. \qquad (23)$$

Les remarques 1 et 2 restent valables.

Exemple 3. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - 3y' = x^2 + 3x, \qquad (24)$$

ainsi que la solution particulière pour les conditions initiales

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 1, \quad y'_0 = 3.$$

(*) Elle est résolue dans l'exemple 3.

(**) Toutefois, on n'aurait pas commis d'erreur: en essayant de rechercher une solution de la forme $y^* = Ax^2 + Bx + C$ nous obtenons, au lieu de (17), l'égalité suivante:

$$-6Ax + (2A - 3B) = x^2 + 3x.$$

Il n'est plus possible d'égaler les coefficients de mêmes puissances de x, car le second membre comprend un terme du second degré, qui est absent dans le premier membre. Notre essai ne nous a rien donné, mais ne nous a pas induit en erreur.

Solution. Ici $P(x) = x^2 + 3x$ et le nombre $k = 0$ est une racine simple de l'équation caractéristique

$$r^2 - 3r = 0$$

($r_1 = 3$, $r_2 = 0$). L'équation (24) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx. \tag{25}$$

Procédant comme dans l'exemple 2, nous obtenons le système

$$-9A = 1, \quad -6B + 6A = 3, \quad -3C + 2B = 0,$$

d'où nous trouvons: $A = -\frac{1}{9}$, $B = -\frac{11}{18}$, $C = -\frac{11}{27}$, de sorte que

$$y^* = -\frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x. \tag{26}$$

La solution générale de l'équation (24) est

$$y = C_1e^{3x} + C_2 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x. \tag{27}$$

En dérivant nous obtenons:

$$y' = 3C_1e^{3x} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{11}{9}x - \frac{11}{27}. \tag{27a}$$

Portant les valeurs initiales dans (27) et (27a), nous obtenons le système

$$1 = C_1 + C_2, \quad 3 = 3C_1 - \frac{11}{27}.$$

Nous en tirons: $C_1 = \frac{92}{81}$, $C_2 = -\frac{11}{81}$; la solution particulière cherchée est $y = \frac{92}{81}e^{3x} - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{18}x^2 - \frac{11}{27}x - \frac{11}{81}$.

Exemple 4. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' - 2y' + y = xe^x. \tag{28}$$

Ici $P(x) = x$ et le nombre $k = 1$ est une racine double de l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$. L'équation (28) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = x^2(Ax + B)\,e^x = (Ax^3 + Bx^2)\,e^x. \tag{29}$$

Portons (29) dans (28); les termes en x^3 et x^2 s'éliminent et nous obtenons l'égalité

$$(6Ax + 2B)\,e^x = xe^x. \tag{30}$$

Egalant les coefficients des termes de mêmes puissances de x, nous obtenons le système $6A = 1$, $2B = 0$, de sorte que

$$y^* = \frac{1}{6} x^3 e^x.$$

La solution générale de l'équation (28) (cf. § 498, 2e cas) est

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + \frac{1}{6} x^3 e^x. \tag{31}$$

Règle 3. Supposons que le second membre de l'équation (1) soit de la forme

$$R(x) = e^{\alpha x}[P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x], \tag{32}$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de degrés m_1 et m_2.

Deux cas sont possibles:

1) les nombres complexes $\alpha \pm \beta i$ ne sont pas les racines de l'équation caractéristique $r^2 + pr + q = 0$;

2) les nombres $\alpha \pm \beta i$ sont les racines de cette équation(*)

Dans le premier cas l'équation (1) possède une solution de la forme

$$y^* = e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \tag{33}$$

où $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sont des polynômes dont les degrés ne dépassent pas le plus grand des degrés m_1, m_2.

Dans le second cas l'équation (1) possède une solution de la forme

$$y^* = x e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x]. \tag{34}$$

Exemple 5. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + y = 10 e^x \sin 2x. \tag{35}$$

Ici $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 10$ (autrement dit, $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de degré zéro), $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Les nombres complexes $\alpha \pm \beta i = 1 \pm 2i$ ne sont pas les racines de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. L'équation (35) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = e^x(A \cos 2x + B \sin 2x). \tag{36}$$

Portant (36) dans (35) nous obtenons l'égalité

$$[(-2A + 4B) \cos 2x + (-4A - 2B) \sin 2x] e^x = 10 e^x \sin 2x, \tag{37}$$

d'où nous tirons le système

$$-2A + B = 0, \qquad -4A - 2B = 10.$$

Il donne: $A = -2$, $B = -1$, de sorte que

$$y^* = -e^x(2 \cos 2x + \sin 2x).$$

La solution générale de l'équation (35) est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - e^x(2 \cos 2x + \sin 2x). \tag{38}$$

(*) Le cas où l'un seulement des nombres $\alpha \pm \beta i$ est racine de l'équation $r^2 + pr + q = 0$ est impossible (pour des valeurs réelles des coefficients p et q).

Exemple 6. Trouver la solution générale de l'équation

$$y'' + y = 4x \sin x. \tag{39}$$

Ici $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 4x$ [le plus haut degré des polynômes $P_1(x)$ et $P_2(x)$ est un], $\alpha = 0$ $\beta = 1$. Les nombres complexes $\alpha \pm \beta i = \pm i$ sont les racines de l'équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$. L'équation (39) possède une solution particulière de la forme

$$\begin{aligned} y^* &= x[(A_1x + B_1)\cos x + (A_2x + B_2)\sin x] = \\ &= (A_1x^2 + B_1x)\cos x + (A_2x^2 + B_2x)\sin x. \end{aligned} \tag{40}$$

Portant (40) dans (39) nous parvenons à l'égalité

$$[4A_2x + (2B_2 + 2A_1)]\cos x + [-4A_1x + (-2B_1 + 2A_2)]\sin x = 4x \sin x, \tag{41}$$

d'où nous tirons le système

$$4A_2 = 0, \quad 2B_2 + 2A_1 = 0, \quad -4A_1 = 4, \quad -2B_1 + 2A_2 = 0.$$

Il donne: $A_1 = -1$, $B_1 = 0$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$, de sorte que

$$y^* = -x^2 \cos x + x \sin x.$$

La solution générale de l'équation (39) est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(-x \cos x + \sin x). \tag{42}$$

Remarque 4. Si le second membre de l'équation (1) est une somme dont chaque terme est de la forme (21) ou (32), l'équation (1) possède une solution particulière qui est la somme d'expressions de la forme (5), (22), (23), (33), (34). On cherche les coefficients comme dans les exemples 1-6.

§ 500. Equations différentielles linéaires d'ordre n

On appelle ***équation linéaire d'ordre n*** une équation de la forme

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\, y = R(x). \tag{1}$$

Si $R_1(x) = 0$, l'équation (1) est dite ***sans second membre*** (ou ***homogène***), si $R(x) \not\equiv 0$, elle est dite ***équation avec second membre*** (ou ***non homogène***).

Les propriétés des équations linéaires du second ordre (§§ 496 - 499) peuvent être étendues de la manière suivante aux équations linéaires d'ordres supérieurs.

Si $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont des solutions de l'équation sans second membre

$$y^{(n)} + P_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + P_n(x)\, y = 0, \tag{2}$$

alors la fonction

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \tag{3}$$

est également une solution. Celle-ci ne sera pas une solution générale si les solutions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont ***linéairement dépendantes***, c'est-à-dire si elles sont liées par la relation

$$a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x) \equiv 0, \tag{4}$$

où l'une au moins des constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n'est pas nulle.

Si par contre les solutions $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ sont linéairement indépendantes, autrement dit, si l'égalité (4) n'est possible que dans le cas où toutes les constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont nulles, alors (3) est la solution générale de l'équation (2).

La solution générale de l'équation (1) s'obtient en ajoutant l'une de ses solutions particulières à la solution générale de l'équation (2).

L'équation à coefficients constants sans second membre

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y = 0 \qquad (5)$$

se résout à l'aide de l'*équation caractéristique*

$$r^n + p_1 r^{n-1} + p_2 r^{n-2} + \ldots + p_n = 0. \qquad (6)$$

I. Si toutes les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de l'équation caractéristique sont simples et réelles, la solution générale de l'équation (5) est

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \qquad (7)$$

II. Si une racine réelle quelconque r est de multiplicité k $(r_{i+1} = r_{i+2} = \ldots = r_{i+k})$, dans la formule (7) les k termes correspondants sont remplacés par le terme

$$(C_1 + C_2 x + \ldots C_k x^{k-1}) e^{rx}. \qquad (8)$$

III. Si l'équation caractéristique admet un couple de racines complexes conjuguées simples $(r_{1,2} = \alpha \pm \beta i)$, le couple correspondant de termes dans la formule (7) est remplacé par le terme

$$e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x). \qquad (9)$$

IV. Si un couple quelconque de racines complexes conjuguées est de multiplicité k les k couples correspondants de termes dans la formule (7) sont remplacés par le terme

$$e^{\alpha x}[(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (D_1 + D_2 x + \ldots + D_k x^{k-1}) \sin \beta x]. \qquad (10)$$

EXEMPLE. Considérons l'équation

$$y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0. \qquad (11)$$

Son équation caractéristique

$$r^5 + r^4 + 2r^3 + 2r^2 + r + 1 = 0 \qquad (12)$$

possède une racine réelle simple $r = -1$ et un couple de racines complexes conjuguées doubles $r = \pm i$. La solution générale de l'équation (11) est, par conséquent,

$$y = C_1 e^{-x} + (C_2 + C_3 x) \cos x + (C_4 + C_5 x) \sin x. \qquad (13)$$

Pour l'*équation complète à coefficients constants*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = R(x) \qquad (14)$$

la solution générale s'obtient à l'aide des quadratures à partir de la solution générale de l'équation sans second membre correspondante d'après la méthode exposée au § 501. Mais si le second membre $R(x)$ est de la forme $P(x)e^{kx}$, où $P(x)$ est un polynôme, ou de la forme plus générale

$$e^{\alpha x}[P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x],$$

ou encore représente la somme de termes de ce type, la solution est simplifiée.

I. Soit

$$R(x) = P(x)\, e^{kx} \qquad (15)$$

où $P(x)$ est un polynôme de degré m. L'équation (14) possède alors une solution particulière de la forme

$$y^* = Q(x)\, e^{kx}, \tag{16}$$

où $Q(x)$ est un polynôme de degré m, à condition que le nombre k ne soit pas une racine de l'équation caractéristique (6). Dans le cas contraire, l'équation (14) admet une solution particulière de la forme

$$y^* = x^l Q(x)\, e^{kx}, \tag{17}$$

où l est la multiplicité de la racine k de l'équation caractéristique (cf. § 499, règles 1,2 et exemples 1-4).

II. Soit

$$R(x) = e^{\alpha x}[P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x], \tag{18}$$

où $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont des polynômes de degrés m_1 et m_2. L'équation (14) possède alors une solution particulière de la forme

$$y^* = e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \tag{19}$$

où $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ sont des polynômes dont le degré n'est pas supérieur au plus grand des degrés m_1, m_2, à condition que les nombres complexes $\alpha \pm \beta i$ ne soient pas des racines de l'équation caractéristique (6). Dans le cas contraire, l'équation (14) possède une solution particulière de la forme

$$y^* = x^l e^{\alpha x}[Q_1(x) \cos \beta x + Q_2(x) \sin \beta x], \tag{20}$$

où l est la multiplicité de chaque couple de racines $\alpha \pm \beta i$ de l'équation caractéristique (cf. § 499, règle 3 et exemples 5, 6).

§ 501. Méthode de variation des constantes

La solution générale de l'équation linéaire complète s'obtient de la solution générale de l'équation sans second membre correspondante à l'aide de quadratures. Pour cela il faut appliquer l'artifice suivant.

Remplaçons dans la solution générale de l'équation sans second membre toutes les constantes arbitraires par des fonctions inconnues. Dérivons l'expression obtenue et imposons aux fonctions inconnues des conditions supplémentaires qui simplifient la forme des dérivées successives. Portant l'expression des dérivées y', y'', y''', etc., dans l'équation donnée, nous obtenons encore une condition imposée aux fonctions inconnues. Il s'avère alors possible de trouver les dérivées premières de toutes les fonctions inconnues et il reste à effectuer les quadratures.

Cette méthode peut être appliquée aux équations linéaires d'ordre quelconque tant à coefficients constants, qu'à coefficients variables. Au § 486 elle a été appliquée à l'équation linéaire du premier ordre. Considérons ici une équation du second ordre

$$y'' + P(x)\, y' + Q(x)\, y = R(x). \tag{1}$$

Soit

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) \tag{2}$$

la solution générale de l'équation sans second membre correspondante. Recherchons la solution générale de l'équation (1) sous la forme (2) en considérant maintenant C_1 et C_2 comme des fonctions inconnues de x.

Dérivant (2) nous trouvons:

$$y' = C_1\varphi_1'(x) + C_2\varphi_2'(x) + C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x). \tag{3}$$

Imposons la condition supplémentaire

$$C_1'\varphi_1(x) + C_2'\varphi_2(x) = 0. \tag{4}$$

La forme de la dérivée première se simplifie, et nous avons:

$$y' = C_1\varphi_1'(x) + C_2\varphi_2'(x). \tag{5}$$

Dérivant encore une fois nous obtenons:

$$y'' = C_1\varphi_1''(x) + C_2\varphi_2''(x) + C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x). \tag{6}$$

Après la substitution des expressions (2), (5) et (6) dans l'équation (1), tous les termes en C_1 s'éliminent (car la fonction $y = \varphi_1(x)$ est solution de l'équation $y'' + Py' + Qy = 0$); il en est de même de tous les termes en C_2, et nous obtenons encore une condition

$$C_1'\varphi_1'(x) + C_2'\varphi_2'(x) = R(x). \tag{7}$$

Les conditions (4) et (7) permettent de trouver les expressions des dérivées C_1', C_2' et il reste à effectuer les quadratures.

Exemple. Considérons l'équation

$$y'' + y = \operatorname{tg} x. \tag{1a}$$

La solution générale de l'équation sans second membre associée est

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \tag{2a}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Recherchons la solution de l'équation (1a) sous la forme (2a) en considérant maintenant C_1 et C_2 comme des fonctions inconnues.

Les conditions (4) et (7) s'écrivent alors

$$C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \quad -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \tag{3a}$$

Nous en tirons:

$$C_1' = -\operatorname{tg} x \sin x, \quad C_2' = \sin x;$$

$$C_1 = \int -\operatorname{tg} x \sin x\, dx + C_3, \quad C_2 = \int \sin x\, dx + C_4$$

Quelques courbes remarquables

§ 503. Strophoïde

1. Définition et génération: AB et CD étant deux droites orthogonales (fig. 479), O le point de leur intersection, AL une droite arbitraire coupant CD au point P, si l'on prend sur AL, de part et d'autre de P, deux segments PM_1, PM_2 égaux à OP, le lieu géométrique des points M_1 et M_2 est la *strophoïde droite* (*).

La *strophoïde* est dite *oblique* (fig. 480) quand AB est oblique sur CD.

Il paraît que Roberval fut le premier à étudier la strophoïde (1645) qu'il appela *ptéroïde* (**). L'appellation actuelle date de 1849 (Midy).

2. Construction stéréométrique. Représentons-nous une surface cylindrique d'axe CD (fig. 479) et de rayon OA. Menons par le point A un plan K perpendiculaire au plan du dessin (la droite AL est la trace de ce plan). La section est une ellipse; ses foyers M_1, M_2 décrivent une strophoïde droite.

On construit de façon analogue une strophoïde oblique à cette différence près que la surface cylindrique est remplacée par une surface conique: l'axe du cône (OS sur la fig. 480) passe par O perpendiculairement à AB; la droite UV passant par B parallèlement à CD est l'une des génératrices. Les points M_1, M_2 sont les foyers de la conique correspondante; la strophoïde oblique est située sur les deux nappes de la surface conique et passe par le sommet S de cette dernière.

3. Equation en coordonnées cartésiennes (O origine; l'axe OX est orienté suivant le rayon OB; $AO = a$, $\widehat{AOD} = \alpha$; quand la strophoïde est oblique, le système de coordonnées est oblique, l'axe OY est orienté suivant le rayon OD):

$$y^2(x - a) - 2x^2y\cos\alpha + x^2(a + x) = 0. \qquad (1)$$

Pour une strophoïde droite l'équation (1) s'écrit

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}. \qquad (2)$$

(*) Du gr. *strophê*, action de retourner.

(**) Du gr. *pteron*, aile.

Nous trouvons de l'équation (1) l'expression de y en fonction de t, x et $\frac{dx}{dt}$; portant dans (2) nous trouvons $\frac{dy}{dt}$ en fonction de ces mêmes grandeurs. Portant cette expression dans (3), nous obtenons une équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 6x = 3t^2 - t - 1. \tag{4}$$

Nous trouvons d'après la méthode du § 499 sa solution générale

$$x = C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - \frac{1}{2}t^2. \tag{5}$$

Nous portons cette expression dans l'équation (1) et nous trouvons la seconde fonction inconnue

$$y = -\frac{dx}{dt} + x + \frac{3}{2}t^2 = -C_1e^{2t} + 4C_2e^{-3t} + t^2 + t. \tag{6}$$

Quelques courbes remarquables

§ 503. Strophoïde

1. DÉFINITION ET GÉNÉRATION: AB et CD étant deux droites orthogonales (fig. 479), O le point de leur intersection, AL une droite arbitraire coupant CD au point P, si l'on prend sur AL, de part et d'autre de P, deux segments PM_1, PM_2 égaux à OP, le lieu géométrique des points M_1 et M_2 est la *strophoïde droite* (*).

La *strophoïde* est dite *oblique* (fig. 480) quand AB est oblique sur CD.

Il paraît que Roberval fut le premier à étudier la strophoïde (1645) qu'il appela *ptéroïde* (**). L'appellation actuelle date de 1849 (Midy).

2. CONSTRUCTION STÉRÉOMÉTRIQUE. Représentons-nous une surface cylindrique d'axe CD (fig. 479) et de rayon OA. Menons par le point A un plan K perpendiculaire au plan du dessin (la droite AL est la trace de ce plan). La section est une ellipse; ses foyers M_1, M_2 décrivent une strophoïde droite.

On construit de façon analogue une strophoide oblique à cette différence près que la surface cylindrique est remplacée par une surface conique: l'axe du cône (OS sur la fig. 480) passe par O perpendiculairement à AB; la droite UV passant par B parallèlement à CD est l'une des génératrices. Les points M_1, M_2 sont les foyers de la conique correspondante; la strophoïde oblique est située sur les deux nappes de la surface conique et passe par le sommet S de cette dernière.

3. ÉQUATION EN COORDONNÉES CARTÉSIENNES (O origine; l'axe OX est orienté suivant le rayon OB; $AO = a$, $\widehat{AOD} = \alpha$; quand la strophoïde est oblique, le système de coordonnées est oblique, l'axe OY est orienté suivant le rayon OD):

$$y^2(x - a) - 2x^2y \cos\alpha + x^2(a + x) = 0. \tag{1}$$

Pour une strophoïde droite l'équation (1) s'écrit

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a + x}{a - x}}. \tag{2}$$

(*) Du gr. *strophê*, action de retourner.

(**) Du gr. *pteron*, aile.

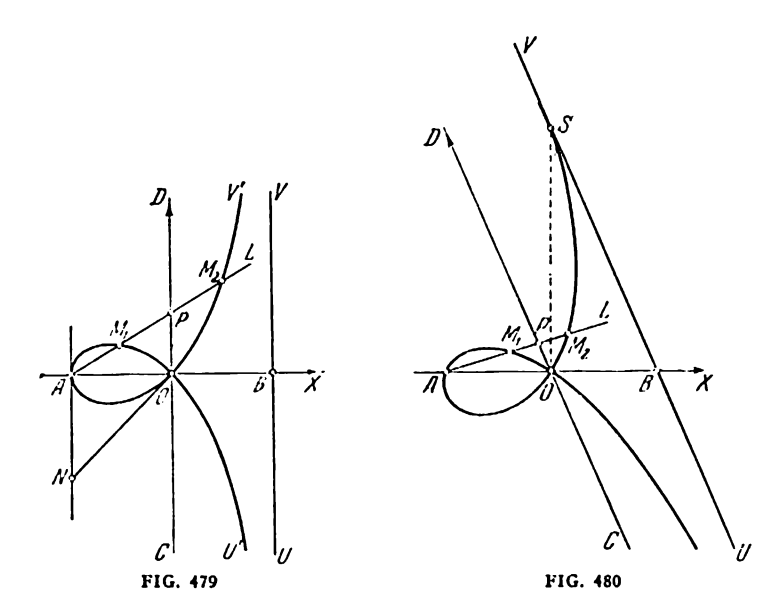


FIG. 479 FIG. 480

Equation en coordonnées polaires (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho = -\frac{a \cos 2\varphi}{\cos \varphi}.$$

Représentation paramétrique rationnelle ($u = \operatorname{tg} \varphi$):

$$x = a\left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right), \qquad y = au\left(\frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}\right).$$

4. Particularités de la forme. Le point O est un nœud (*); les tangentes aux deux branches passant par O sont orthogonales (pour la strophoïde droite comme pour la strophoïde oblique). La droite UV est asymptote à la strophoïde oblique quand on s'éloigne à l'infini vers le bas (fig. 480). En outre UV est tangente à la strophoïde oblique au point S équidistant de A et de B.

(*) On appelle nœud d'une courbe un point par lequel la courbe passe deux fois (ou plus) dans des directions différentes.

Pour la strophoïde droite le point de tangence S « s'éloigne à l'infini » (quand on s'éloigne vers le haut), de sorte que la droite UV (fig. 479) est asymptote aux deux branches.

5. LE RAYON DE COURBURE au nœud de la strophoïde droite

$$R_O = a\sqrt{2} = ON \text{ (fig. 479).}$$

6. AIRES ET VOLUMES pour la strophoïde droite. L'aire S_1 de la boucle AOM_1 est:

$$S_1 = 2a^2 - \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Le volume V_1 engendré par la boucle tournant autour de l'axe OX:

$$V_1 = \pi a^3 \left(2 \ln 2 - \frac{4}{3}\right) \approx 0,166\, a^3.$$

L'aire S_2 comprise entre les branches OU', OV' et l'asymptote (cette aire s'étend à l'infini, mais possède une valeur finie)

$$S_2 = 2a^2 + \frac{1}{2}\pi a^2.$$

Le volume engendré par la figure $U'OV'VU$ tournant autour de l'axe OX possède une valeur infinie.

§ 504. Cissoïde de Dioclès

1. DÉFINITION ET GÉNÉRATION. D'un point O de la circonférence d'un cercle de centre C et de diamètre $OA = 2a$ menons la sécante OF terminée à la droite UV tangente au cercle au point A. Prenons sur la sécante OEF à partir du point O une longueur OM égale à la portion EF comprise entre le cercle et sa tangente. Le lieu du point M est une *cissoïde* (fig. 481). La cissoïde a été imaginée par Dioclès pour servir à la solution du problème de la duplication du cube [*].

2. HISTORIQUE. Dioclès déterminait la cissoïde à l'aide d'une autre construction. Il menait le diamètre BD perpendiculairement à OA; M était alors le point d'intersection de la corde OE et de la droite GG' parallèle à BD et menée par le point G symétrique de E par rapport à BD. C'est pourquoi la courbe de Dioclès était entièrement intérieure au cercle C. Elle se composait des arcs OB et OD. Si l'on ferme la courbe BOD à l'aide de la demi-circonférence BAD décrite

[*] On demande dans ce problème de construire d'après l'arête d'un cube donné l'arête d'un autre cube dont le volume est double de celui du cube initial.

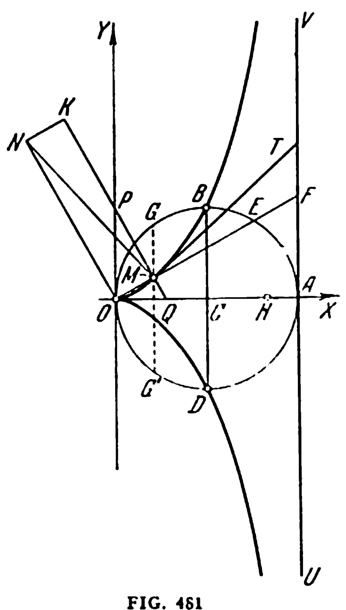


FIG. 481

par le point E, on obtient une figure rappelant une feuille de lierre. D'où l'appellation « cissoïde » (*).

En 1640 Roberval, puis de Sluse remarquèrent que la cissoïde peut être prolongée au-delà du cercle si le point E décrit l'autre demi-circonférence BOD; le point M se trouve alors sur le prolongement de la corde OE. Toutefois, l'appellation de « cissoïde de Sluse » que proposa Huyghens ne s'est pas imposée dans la littérature mathématique.

3. Équation en coordonnées rectangulaires (O origine, OX axe des abscisses):

$$y^2 = \frac{x^3}{2a - x}.$$

Équation en coordonnées polaires (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Représentation paramétrique rationnelle ($u = \operatorname{tg} \varphi$):

$$x = \frac{2a}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2a}{u(1 + u^2)}.$$

4. Particularités de la forme. La cissoïde est symétrique par rapport à OA, passe par les points B, D et possède une asymptote UV ($x = 2a$); O est un point de rebroussement (**) (le rayon de courbure $R_O = 0$).

Construction de la tangente. Pour construire la tangente à la cissoïde au point M nous menons $MP \perp OM$. Soient P, Q les points d'intersection de MP et des droites OX, OY. Portons à partir du point P sur le prolongement du segment QP le segment $PK = PQ$. Construisons KN parallèle à MO et ON parallèle à QP. Réunissons N, le point d'intersection de KN et de ON, avec M. La droite MN est normale à la cissoïde. La tangente cherchée MT est perpendiculaire à MN.

(*) Du gr. *kissos*, lierre.
(**) Cf. au § 507, 4 la définition d'un point de rebroussement.

5. L'AIRE S comprise entre la cissoïde et son asymptote (cette aire s'étend à l'infini) est finie; elle est trois fois plus grande que l'aire du cercle générateur C:

$$S = 3\pi a^2.$$

6. LE VOLUME DE RÉVOLUTION V engendré par cette aire tournant autour de l'asymptote UV est égal au volume de révolution V' engendré par le cercle C tournant autour du même axe (de Sluse):

$$V = V' = 2\pi^2 a^3.$$

Cette aire tournant autour de l'axe de symétrie engendre un volume infini.

7. LE CENTRE DE GRAVITÉ H de la portion de plan comprise entre la cissoïde et son asymptote UV partage le segment OA dans le rapport $OH : HA = 5 : 1$ (Huyghens).

8. RAPPORTS AVEC LA PARABOLE. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du sommet de la parabole ($y^2 = 2px$) sur ses tangentes est la cissoïde

$$\left(y^2 = -\frac{x^3}{\frac{p}{2} - x}\right).$$

§ 505. Folium de Descartes

1. HISTORIQUE. En 1638 Descartes voulut R É F U T E R la règle de Fermat de rechercher des tangentes (qu'il avait mal comprise) et proposa à ce dernier de trouver la tangente à la courbe $x^3 + y^3 = nxy$. Dans l'interprétation usuelle des coordonnées négatives, cette courbe que l'on appela au XVIII[e] siècle folium de Descartes se compose de la boucle $OBAC$ (fig. 482) et de deux branches infinies (OI, OL). Or, c'est Huyghens qui l'a représentée sous cette forme (1692). Avant lui la courbe $x^3 + y^3 = nxy$ était formée de 4 boucles (dont $OBAC$) disposées symétriquement dans les quatre quadrants.

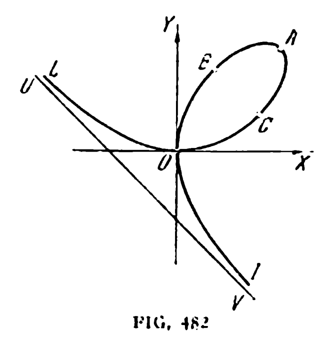


FIG. 482

2. L'ÉQUATION du folium de Descartes s'écrit habituellement

$$x^3 + y^3 = 3axy. \qquad (1)$$

Le coefficient $3a$ exprime la diagonale du carré dont le côté est égal à la

plus grande corde OA de la boucle, de sorte que

$$OA = \frac{3a}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

L'équation en COORDONNÉES POLAIRES est (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}. \tag{3}$$

Représentation PARAMÉTRIQUE rationnelle ($u = \operatorname{tg} \varphi$):

$$x = \frac{3au}{1 + u^3}, \qquad y = \frac{3au^2}{1 + u^3}. \tag{4}$$

PARTICULARITÉS DE LA FORME. Le point O est un nœud. Les tangentes passant par O coïncident avec les axes de coordonnées. La droite $OA(y = x)$ est l'axe de symétrie. Le point $A\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ le plus éloigné du nœud est appelé *sommet*. La droite UV $(x + y + a = 0)$ est asymptote aux deux branches infinies.

3. ÉQUATION PAR RAPPORT À L'AXE DE SYMÉTRIE. Si l'on prend l'axe de symétrie OA pour axe des abscisses, en l'orientant du nœud (origine des coordonnées) vers l'asymptote UV (fig. 483), le folium de Descartes est représenté par l'équation

$$y = \pm x \sqrt{\frac{l + x}{l - 3x}}, \tag{5}$$

où $l = \frac{3a}{\sqrt{2}} = OA$.

L'équation correspondante en COORDONNÉES POLAIRES est:

$$\rho = \frac{l(\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{3 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi}.$$

Représentation PARAMÉTRIQUE rationnelle ($u = \operatorname{tg} \varphi$):

$$x = l \frac{u^2 - 1}{3u^2 + 1}, \qquad y = l \frac{u(u^2 - 1)}{3u^2 + 1}.$$

4. RAYON DE COURBURE: au sommet $R_A = \frac{3a}{8\sqrt{2}} = \frac{l}{8}$; au nœud $R_O = \frac{3a}{2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$.

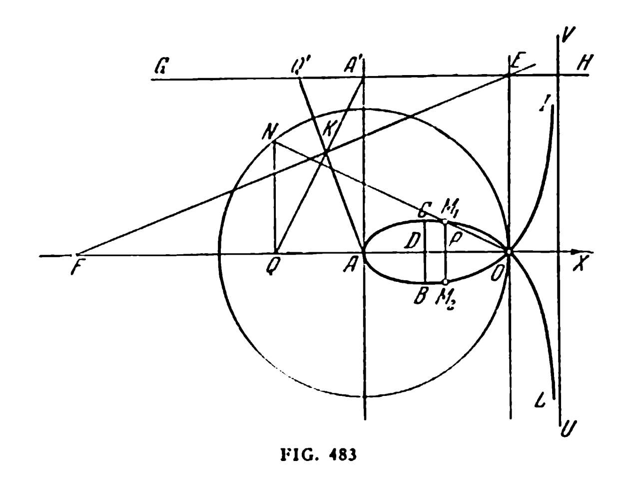


FIG. 483

5. L'AIRE S_1 de la boucle et l'aire S_2 (s'étendant à l'infini) comprise entre les branches infinies et l'asymptote sont égales et s'expriment par la formule

$$S_1 = S_2 = \frac{3}{2} a^2 = \left(\frac{l}{3}\right)^2 .$$

6. DIAMÈTRE MAXIMAL de la boucle:

$$BC = \frac{2l}{3} \sqrt{2\sqrt{3} - 3} \approx 0,448\, l.$$

Sa distance au nœud est:

$$DO = \frac{l\sqrt{3}}{3} \approx 0,577\, l.$$

7. GÉNÉRATION. Etant donné le diamètre l de la boucle, menons la circonférence A de rayon $AO = l$ et une droite quelconque GH parallèle à AO, puis les droites AA' et OE perpendiculaires à AO. Soient A', E leurs points d'intersection avec GH. Portons sur le rayon OA le segment $OF = 3OA$ et menons la droite FE. La courbe cherchée est alors construite par points de la manière suivante.

Menons par O une droite quelconque ON et par le point N où cette droite coupe (une seconde fois) la circonférence menons NQ parallèlement à AA'. Joignons le point Q où NQ coupe la droite OF avec A et soit K le point où QA' coupe FE. Menons la droite AK jusqu'à son

intersection avec la droite GH au point Q'. Portons enfin sur la droite OA le segment OP égal au segment $A'Q'$ et identiquement orienté. La droite M_1M_2 menée par P parallèlement à AA' coupe la droite ON au point M_1. Ce point (ainsi que le point M_2 qui lui est symétrique par rapport à AO) appartient à la courbe cherchée.

Quand le point N partant de O décrit la circonférence A dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, le point M_1 décrit la trajectoire $LOCABOI$.

§ 506. Agnésienne

1. Définition. Construisons une circonférence de diamètre $OA = a$ (fig. 484) et prolongeons la demi-corde BC jusqu'au point M défini par la proportion

$$BM : BC = OA : OB.$$

Quand le point C décrit la circonférence OC_1C_2 le point M décrit l'*agnésienne* appelée ainsi en l'honneur de Marie Agnesi qui a étudié cette courbe dans son traité de mathématiques supérieures (1748), fort populaire à l'époque.

2. Génération. Agnesi a imaginé la construction simple suivante de la courbe. Soit L le point d'intersection de la droite OC avec la droite UV, tangente à la circonférence donnée au point A (*sommet* de l'agnésienne). Menons la droite LM parallèle à AO et la droite CB parallèle à AL. Le point d'intersection M des droites LM et CB appartient à l'agnésienne. Lors de la construction il est utile de tenir compte des particularités de la forme de la courbe (cf. plus bas).

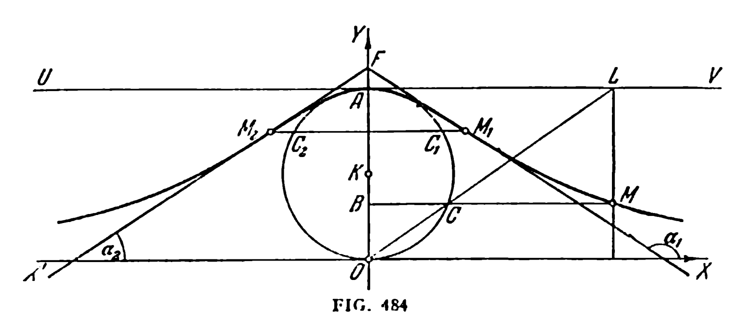


FIG. 484

3. Equation (O origine; la tangente XX' à la circonférence génératrice au point O est l'axe des abscisses):

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$

($a = OA$ est le diamètre de la circonférence génératrice).

4. Particularités de la forme. Le diamètre OA est l'axe de symétrie de l'agnésienne. La courbe est située d'un seul côté de la droite $X'X$ qui est son asymptote. Elle possède deux points d'inflexion $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$, $M_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{3a}{4}\right)$. Ils sont construits suivant le procédé indiqué plus haut si l'on fait coïncider le point C avec l'un des points C_1, C_2 $\left(\widehat{AC}_1 = \widehat{AC}_2 = \frac{\pi}{3}\right)$. Les angles α_1, α_2 formés par les tangentes M_1F, M_2F et l'axe $X'X$ sont trouvés d'après la formule $\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \pm \frac{3\sqrt{3}}{8}$. Pour construire les tangentes M_1F, M_2F il suffit de porter le segment $AF = \frac{a}{8}$ sur le prolongement du diamètre OA.

Au sommet A le centre de courbure C de l'agnésienne coïncide avec le centre de la circonférence génératrice, de sorte que le rayon de courbure $R_A = AK = \frac{a}{2}$. C'est pourquoi au voisinage du sommet A l'agnésienne est pratiquement confondue avec la circonférence.

5. L'aire S de la portion de plan infinie comprise entre l'agnésienne et son asymptote est égale au quadruple de l'aire du cercle générateur: $S = \pi a^2$ (cf. § 327, exemple 4).

6. Le volume de révolution V engendré par l'agnésienne tournant autour de son asymptote est égal au double du volume de révolution V_1 engendré par le cercle générateur tournant autour du même axe:

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{2}, \quad V_1 = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

L'agnésienne tournant autour de son axe de symétrie engendre un volume infini.

7. Historique. La courbe définie par l'équation $y = \dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ apparaît pour la première fois dans les œuvres de Fermat qui dans les années 30 du XVIIe siècle trouva l'aire limitée par l'arc de cette courbe, les deux ordonnées et l'axe des abscisses (ce problème présentait alors de sérieuses difficultés, car les méthodes d'intégration étaient

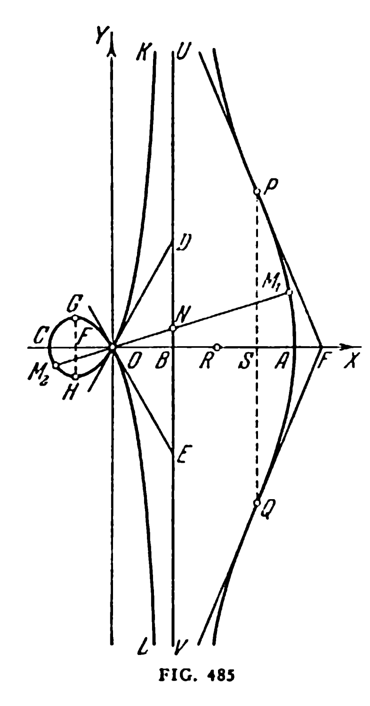


FIG. 485

insuffisamment élaborées). La construction de la courbe fut réalisée par Guido Grandi (1718) qui déduisit également certaines de ses propriétés. Grandi l'appela « versiera » sans se laisser intimider par le double sens du mot (en italien *versiera* signifie « diablesse »). Pour le former il se servit du terme sinus versus (sinus inversé) : à l'époque le segment BC était appelé le sinus de l'arc OC, et le segment BA le sinus inversé.

§ 507. Conchoïde de Nicomède

1. Historique. Nicomède introduisit la courbe qu'il appela conchoïde(*) (PAQ sur la fig. 485) pour résoudre le problème de la division d'un angle donné α en trois parties égales *(trisection de l'angle)*.

Nous savons aujourd'hui que ce problème ne se résout, à l'aide de la règle et du compas, que pour certaines valeurs de l'angle α $\left(\text{par exemple pour } \alpha = \frac{\pi}{2}\right)$. Ainsi, le problème de la trisection de l'angle $\alpha = \frac{\pi}{3}$ n'est pas résoluble si l'on n'utilise que la règle et le compas, autrement dit si l'on ne construit que des droites et des cercles. Toutefois, le problème est résoluble si l'on fait appel à d'autres courbes, en particulier à la conchoïde. Pour sa construction Nicomède élabora un instrument spécial (le conchoïdographe).

2. Définition et génération. Etant donnés le point O (*pôle*), la droite UV *(base)* et le segment l, menons par le pôle O (fig. 485) une sécante ON, rencontrant la base au point N. Portons sur la sécan-

---

(*) Du gr. *konkhe*, coquille.

te ON de part et d'autre de N les longueurs $NM_1 = NM_2 = l$. Le lieu géométrique des points M_1, M_2 est appelé *conchoïde de Nicomède*. La courbe décrite par le point situé sur le prolongement du segment ON au-delà du point N (le point M_1 sur la fig. 485) est appelée la *branche extérieure* de la conchoïde; la courbe décrite par l'autre point (M_2 sur la fig. 485) est appelée la *branche intérieure*.

REMARQUE. Depuis Nicomède jusqu'à la fin du XVII[e] siècle on appela conchoïde la courbe que nous appelons aujourd'hui la branche extérieure. La branche intérieure était considérée comme une courbe singulière et était appelée conchoïde « seconde », « troisième » ou « quatrième » suivant les particularités de sa forme (cf. plus bas) [*].

3. ÉQUATION (l'origine coïncide avec le pôle O; l'axe des abscisses est dirigé suivant le rayon OB; le point B est projection du pôle sur a base):

$$(x-a)^2(x^2+y^2) = l^2x^2, \tag{1}$$

où $a(=OB)$ est la distance du pôle à la base.

Rigoureusement parlant cette équation représente une figure formée des deux branches de la conchoïde et du pôle O qui peut ne pas appartenir au lieu géométrique défini plus haut (cf. plus bas fig. 487).

Equation EN COORDONNÉES POLAIRES (O pôle; OX axe polaire):

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} + l, \tag{2}$$

où φ varie d'une valeur quelconque φ_0 jusqu'à $\varphi_0 + 2\pi$. Le point $M(\rho, \varphi)$ décrit alors les deux branches de la conchoïde. Quand φ passe par la valeur $\frac{\pi}{2}$, le point M effectue un saut et passe de la branche extérieure sur la branche intérieure (« s'éloigne à l'infini vers le haut » et apparaît « d'en bas »). De même pour le passage de la branche intérieure sur la branche extérieure pour $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ [**].

---

[*] Ni la branche extérieure, ni la branche intérieure prises séparément ne peuvent être représentées par une équation *algébrique*.

[**] Le rayon vecteur ρ prend dans l'équation (2) aussi bien des valeurs positives que des valeurs négatives (cf. § 73, remarque 2). Pour éviter cela, on peut utiliser, au lieu de l'équation (2), l'équation $\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm l$. Toutefois, dans le cas $l > a$ (fig. 485) la positivité de ρ sur la branche intérieure est due au fait que quand le point M_2 passe par le nœud, son angle polaire φ effectue un saut de $\pm\pi$. Cela fait que le domaine de variation de l'angle φ se compose du segment $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ et d'une partie du segment $\left(+\frac{\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right)$. En outre, pour certaines valeurs de φ, il faut prendre devant l les deux signes $\pm$, et pour d'autres uniquement le signe $+$.

A la différence de (1) l'équation (2) représente une figure ne contenant que les points qui satisfont à la définition de la conchoïde.

Equations PARAMÉTRIQUES:

$$x = a + l \cos \varphi, \qquad y = a \operatorname{tg} \varphi + l \sin \varphi. \tag{3}$$

4. PARTICULARITÉS DE LA FORME. La conchoïde est symétrique par rapport à la droite OB; cette dernière coupe la conchoïde au point O et aux points A, C *(sommets)*. La base UV est asymptote tant à la branche intérieure, qu'à la branche extérieure. La forme de la conchoïde (de sa branche intérieure) dépend notablement du rapport des segments $a(= OB)$ et $l(= BA)$.

1) Quand $l : a > 1$ (fig. 485), la branche intérieure possède une boucle (OCM_2); le point O est un nœud.

Le coefficient angulaire des tangentes OD, OE au nœud est:

$$\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{l^2 - a^2}}{a}.$$

Pour construire les tangentes au point O il suffit de déterminer sur la base UV les points D, E par les arcs de rayon l portés du centre O.

Le plus grand diamètre GH de la boucle:

$$GH = 2(la^{1/3} - al^{1/3}) : (l^{2/3} + a^{2/3})^{1/2}.$$

Il lui correspond l'abscisse $x_G = OF = (l^2a)^{1/3} - l$ et l'angle polaire φ_G déterminé par la formule $\cos \varphi_G = -(a : l)^{1/3}$. Sur la fig. 485, où $l : a = 2$, nous avons:

$$GM \approx 1{,}11a, \qquad x_G \approx -0{,}59a, \qquad \cos \varphi_G = -\sqrt[3]{0{,}5}, \qquad \varphi_G \approx 142°30'.$$

2) Quand $l : a = 1$, la boucle de la branche intérieure se réduit au pôle O et se transforme en point de rebroussement (*) (fig. 486), la tangente en ce point est confondue avec OX.

3) Quand $l : a < 1$, la branche intérieure ne passe pas par le pôle O (fig. 487); ce dernier est un point isolé (**) de la courbe (1).

5. POINTS D'INFLEXION. La branche extérieure comporte deux points d'inflexion P, Q (fig. 485-487). Sur la branche intérieure les points d'inflexion (P', Q' sur la fig. 487) n'existent que dans le cas où le pôle est un point isolé. On peut trouver l'abscisse x_1 des points P, Q et l'abscisse x_2 des points P', Q' à partir de l'équation

$$x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0. \tag{5}$$

(*) On appelle *point de rebroussement* d'une courbe le point tel que le point courant, après y être arrivé le long de la tangente, rétrograde le long de cette tangente.

(**) Un point appartenant à un lieu géométrique est appelé point *isolé* (par rapport à ce lieu géométrique) si on peut décrire autour de ce point pris comme centre un cercle à l'intérieur duquel il n'y a pas d'autres points appartenant à ce lieu géométrique.

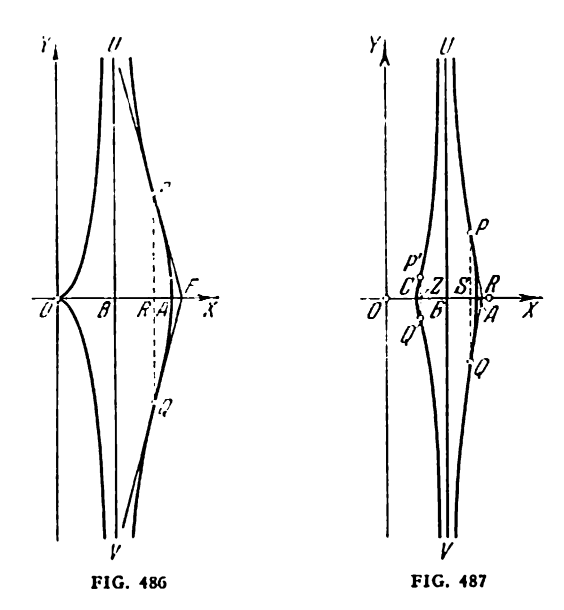


FIG. 486

FIG. 487

1) Quand $l : a > 1$ (fig. 485), l'équation (5) possède une racine unique x_1; elle est comprise entre $a\sqrt{3}$ $(= OR)$ et $a + l$ $(= OA)$ et elle est d'autant plus proche de $a\sqrt{3}$ que $l : a$ diffère peu de 1. Ainsi, pour $l: a = 2$ (fig. 485) l'équation (5) est de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right) - 6 = 0$. La racine x_1 est comprise entre $a\sqrt{3}$ et $3a$. Utilisant ces limites et appliquant (deux fois) les formules du § 291, nous obtenons

$$x_1 \approx 2{,}35a (= OS).$$

2) Quand $l: a = 1$ (fig. 486), l'équation (5) s'écrit $x^3 - 3a^2x = 0$. Elle possède trois racines réelles $x_1 = a\sqrt{3}$, $x_2 = 0$, $x_3 = -a\sqrt{3}$. La première donne l'abscisse OR des points d'inflexion P, Q; la seconde correspond au point de rebroussement O; la troisième ne correspond à aucun point de la conchoïde.

3) Quand $l: a < 1$ (fig. 487), l'équation (5) possède trois racines réelles dont la première x_1 $(= OS)$ est comprise entre a $(= OB)$ et $a\sqrt{3}$

$(= OR)$; elle n'excède pas non plus le segment $a + l$ $(= OA)$. La seconde racine x_2 $(= OZ)$ est comprise entre $a - l$ $(= OC)$ et a (les deux racines sont d'autant plus proches de a que le rapport $l : a$ diffère peu de zéro). La troisième racine x_3 est négative. La racine x_1 donne l'abscisse des points P, Q, la racine x_2 l'abscisse des points P', Q'. La racine x_3 ne correspond à aucun point de la conchoïde. Ainsi, quand $l : a = 0{,}5$ (fig. 487), nous avons l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{x}{a}\right) + 1{,}5 = 0.$$

Entre a et $a + l = 1{,}5a$ se trouve la racine $x_1 \approx 1{,}38a$ $(= OS)$ donnant les points d'inflexion P, Q. Entre $a - l = 0{,}5a$ et a se trouve la racine $x_2 \approx 0{,}57a$ $(= OZ)$, qui donne les points P', Q'. La troisième racine $(x_3 \approx -1{,}9a)$ est négative.

6. Propriété de la normale. La normale en M à la conchoïde (fig. 488) passe par le point d'intersection N' de deux droites dont l'une est la perpendiculaire à OM menée par le pôle O et l'autre la perpendiculaire à la base UV menée par le point N où UV coupe OM.

7. Construction de la tangente. Pour construire la tangente à la conchoïde en son point M, nous relions ce dernier au point O. Par le point d'intersection N des droites OM et UV menons la droite $NN' \perp UV$ et par le pôle O la droite $ON' \perp OM$. Relions N', point d'intersection de ces droites, avec M. La droite $N'M$ est la normale à la conchoïde. Menant $MT \perp N'M$ nous obtenons la tangente cherchée.

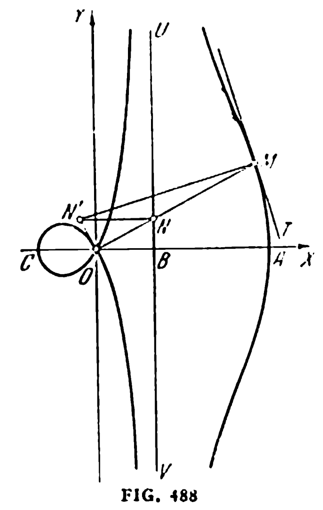


FIG. 488

8. Rayon de courbure aux points A, C, O:

$$R_A = \frac{(l + a)^2}{l}, \qquad R_C = \frac{(l - a)^2}{l},$$

$$R_O = \frac{l\sqrt{l^2 - a^2}}{2a}.$$

Ainsi, quand $l = 2a$ (fig. 485),

$$R_A = 4{,}5a; \quad R_C = 0{,}5a; \quad R_O = a\sqrt{3}.$$

9. L'aire comprise entre l'asymptote et l'une des branches de la conchoïde (extérieure ou intéreure) est infinie.

L'aire S de la boucle est:

$$S = a\sqrt{l^2 - a^2} - 2al \ln \frac{l + \sqrt{l^2 - a^2}}{a} + l^2 \arccos \frac{a}{l}.$$

Ainsi, pour $l = 2a$ (fig. 485) nous avons:

$$S = a^2 \left[\sqrt{3} - 4 \ln (2 + \sqrt{3}) + \frac{4}{3} \pi \right] \approx 0{,}65a^2.$$

10. CONCHOÏDES GÉNÉRALISÉES. Prenant au lieu de la droite UV une courbe quelconque L et gardant pour le reste la définition de la conchoïde de Nicomède, on obtient une nouvelle courbe appelée ***conchoïde de la courbe L par rapport au pôle O***.

On compte, en particulier, parmi les conchoïdes généralisées le limaçon de Pascal (cf. § 508).

§ 508. Limaçon de Pascal; cardioïde

1. DÉFINITION ET GÉNÉRATION. Soient un cercle K de diamètre $OB = a$ (fig. 489), un point O de ce cercle *(pôle)* et une longueur donnée l. Menons par O une droite variable qui recoupe le cercle en un point P à partir duquel on peut déterminer sur la droite deux points M_1 et M_2 par la condition $PM_1 = PM_2 = l$. Le lieu géométrique des points M_1, M_2 est appelé *limaçon de Pascal* en l'honneur d'Etienne Pascal, le père du savant français Blaise Pascal.

Le terme « limaçon de Pascal » a été proposé par Roberval, le contemporain et l'ami de Pascal. Roberval considérait cette courbe comme la conchoïde du cercle (cf. § 507).

2. ÉQUATION (l'origine coïncide avec le pôle O; l'axe OX est orienté suivant le rayon OB):

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2(x^2 + y^2). \qquad (1)$$

Rigoureusement parlant cette équation représente la figure composée du limaçon de Pascal et du pôle O, qui peut ne pas appartenir au lieu géométrique défini plus haut (un tel cas se présente pour les courbes 3 et 4 sur la fig. 489).

L'équation EN COORDONNÉES POLAIRES (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho = a \cos \varphi + l, \qquad (2)$$

où φ varie d'une certaine valeur φ_0 jusqu'à $2\pi + \varphi_0$ (*).

(*) Quand $l < a$, le rayon vecteur ρ peut prendre des valeurs tant négatives que positives. Pour éviter cela on peut utiliser l'équation $\rho = l \pm a \cos \varphi$. Or, dans ce cas des difficultés surgissent analogues à celles que nous avons signalées dans le renvoi p. 759.

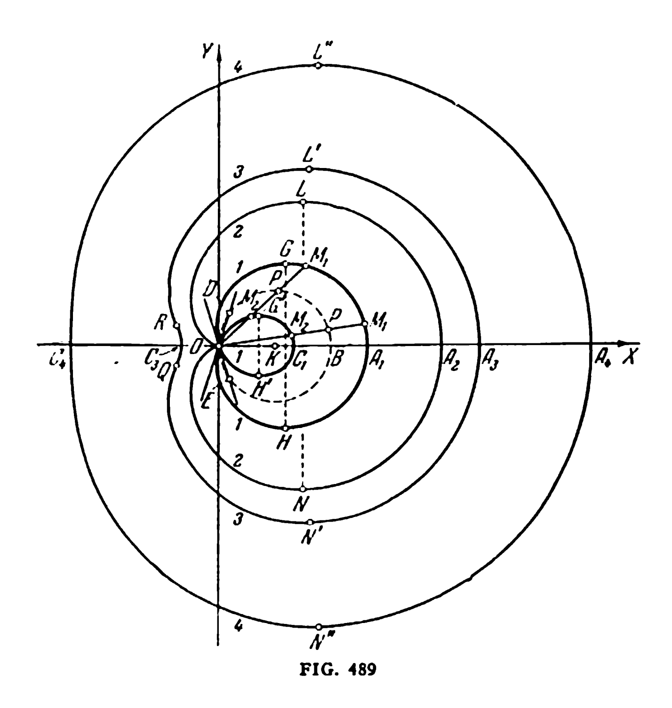


FIG. 489

A la différence de (1) cette équation représente la figure contenant uniquement les points qui satisfont à la définition du limaçon de Pascal.

ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES :

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos^2\varphi + l\cos\varphi, \\ y &= a\sin\varphi\cos\varphi + l\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Représentation PARAMÉTRIQUE rationnelle $\left(u = \operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2}\,[(l+a)+u^2(l-a)], \\ y &= \frac{2u}{(1+u^2)^2}\,[(l+a)+u^2(l-a)]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

3. Particularités de la forme. Le limaçon de Pascal est symétrique par rapport à la droite OB. Cètte droite (*axe* du limaçon) coupe le limaçon: 1) au point O (si ce dernier appartient au limaçon); 2) aux points A, C *(sommets)*. La forme de la courbe dépend du rapport des segments $a(=OB)$ et $l(=AB=BC)$.

1) Quand $l:a<1$ (la courbe 1; pour elle $l:a=1:3$), le limaçon de Pascal présente un point double en O

$$\left(\rho_{1,2}=0,\quad \cos\varphi_{1,2}=-\frac{l}{a},\quad \sin\varphi_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{a}\right),$$

et forme deux boucles: la boucle extérieure OHA_1GO et la boucle intérieure $OH'C_1G'O$. Le coefficient angulaire des tangentes OD, OE au nœud est:

$$\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{a^2-l^2}}{l}\left(=\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}\right).$$

Pour construire les tangentes il suffit de mener les cordes OD, OE de longueur l dans le cercle K. Aux points G, H de la boucle extérieure les plus éloignés de l'axe correspond la valeur

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\ (\approx 0{,}62);$$

aux points G', H' de la boucle intérieure les plus éloignés de l'axe correspond la valeur

$$\cos\varphi=\frac{-\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a}\ (\approx 0{,}80)\ (*).$$

La valeur correspondante du rayon vecteur est:

$$\rho_{G'}=a\cos\varphi_{G'}+l=\frac{-\sqrt{l^2+8a^2}+3l}{4}\ (\approx -0{,}45a).$$

2) Quand $l:a=1$ (la courbe 2 sur la fig. 489), la boucle intérieure se réduit au pôle et se transforme en un point de rebroussement. Aux points L, N les plus éloignés de l'axe correspondent les valeurs

$$\varphi=\frac{\pi}{3},\quad \rho=\frac{3}{2}a;\quad x=\frac{3}{4}a,\quad y=\pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a.$$

La courbe 2 est appelée *cardioïde* (le terme a été introduit en 1741 par Castillon). Elle est représentée sur la fig. 490.

3) Quand $1<l:a<2$ (la courbe 3; pour elle $l:a=4:3$), le limaçon de Pascal est une courbe fermée sans point de croisement.

(*) Ainsi, l'angle polaire du point G' est non pas XOG', mais l'angle compris entre OX et le rayon *opposé* au rayon OG' (cf. § 73, remarque 2).

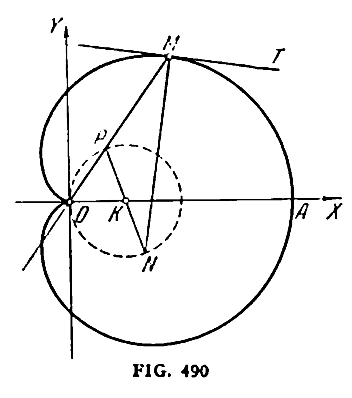


FIG. 490

Le pôle en est un point intérieur. Aux points L', N' les plus éloignés de l'axe correspond la valeur $\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a} \left(= \frac{\sqrt{22}-2}{6} \approx\right.$ $\left.\approx 0{,}45\right)$. Au lieu du point de rebroussement, le limaçon présente deux points d'inflexion R, Q, auxquels correspond la valeur $\cos\varphi_R = -\frac{2a^2+l^2}{3al}$. Avec la croissance de $l:a$ l'angle $ROQ (= 2\pi - 2\varphi_R)$ augmente de 0 à $2 \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ($\approx 39°40'$) (à cette valeur correspond $l:a = \sqrt{2}$). Puis il décroît, en tendant vers zéro quand $l:a \to 2$.

4) Quand $l:a = 2$, les points d'inflexion se confondent avec le sommet C et disparaissent, la courbure au point C s'annule. Le limaçon prend une forme ovale et la conserve pour toutes les valeurs $l:a > 2$ (la courbe 4; pour elle $l:a = 7:3$). Aux points L'', N'' les plus éloignés de l'axe correspond la valeur

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{l^2+8a^2}-l}{4a} \left(= \frac{1}{3}\right).$$

4. Propriété de la normale. La normale au limaçon de Pascal en son point M (fig. 490) passe par le point N du cercle K, diamétralement opposé au point P où OM recoupe ce cercle.

5. Construction de la tangente. Pour mener la tangente au limaçon de Pascal en son point M, relions ce dernier au pôle O. Relions ensuite le point N du cercle fixe K diamétralement opposé au point P avec le point M. La droite MN sera normale au limaçon. Menant $MT \perp MN$, nous obtenons la tangente cherchée.

6. Rayon de courbure aux points A, C, O:

$$R_A = \frac{(l+a)^2}{l+2a}, \quad R_C = \frac{(l-a)^2}{|l-2a|}, \quad R_O = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-l^2}.$$

Cette dernière expression sous-entend que $l \leqslant a$ (quand $l > a$, le point O est isolé du limaçon). En particulier, pour la cardioïde ($l = a$; les points O et C coïncident):

$$R_A = \frac{4}{3}a, \quad R_C = R_O = 0.$$

7. Aires. L'aire S balayée par le rayon vecteur du limaçon effectuant un tour complet est:

$$S = \left(\frac{1}{2} a^2 + l^2\right) \pi \tag{5}$$

(Roberval).

S'il n'y a pas de boucle ($l \geqslant a$), S exprime l'aire de la figure limitée par le limaçon. En présence de la boucle on a l'égalité

$$S = S_1 + S_2,$$

où S_1 est l'aire limitée par la courbe extérieure (y compris l'aire de la boucle intérieure), S_2 l'aire de la seule boucle intérieure. On a pour les aires S_1 et S_2 prises séparément:

$$S_1 = \left(\frac{1}{2} a^2 + l^2\right) \varphi_1 + \frac{3}{2} l \sqrt{a^2 - l^2}, \tag{5a}$$

où $\varphi_1 = \arc\cos - \frac{l}{a}$;

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} a^2 + l^2\right) \varphi_2 - \frac{3}{2} l \sqrt{a^2 - l^2}, \tag{5b}$$

où $\varphi_2 = \arc\cos \frac{l}{a}$.

Pour la cardioïde

$$S (= S_1) = \frac{3}{2} \pi a^2,$$

autrement dit, l'*aire de la cardioïde est six fois l'aire du cercle fixe.*

8. La longueur de l'arc du limaçon de Pascal ne s'exprime pas dans le cas général à l'aide des fonctions élémentaires. Pour la cardioïde la longueur s de l'arc comptée à partir du sommet $A (\varphi = 0)$ est:

$$s = 4a \sin \frac{\varphi}{2}.$$

La longueur de toute la cardioïde est égale à 8a, autrement dit, elle est égale à huit fois le diamètre du cercle fixe.

9. Rapports avec la circonférence. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque O sur les tangentes à une circonférence de rayon r et de centre B est le limaçon de Pascal. Si le point O est situé dans le plan de la circonférence B, le pôle du limaçon est O, le cercle fixe a pour diamètre $OB = a$; la longueur constante l portée sur le rayon vecteur est égale au rayon r de la circonférence B.

Quand le point O est situé sur la circonférence B, le limaçon de Pascal est une cardioïde.

§ 509. Ovales de Cassini

1. Définition. On appelle *ovale de Cassini* le lieu géométrique des points M tels que le produit de leurs distances à deux points fixes F_1, F_2 ait une valeur constante a^2:

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2.$$

Les points F_1, F_2 sont les *foyers*, la droite F_1F_2 l'*axe* de l'ovale de Cassini, le milieu O du segment F_1F_2 le *centre*.

2. Historique. En 1749 Jacques Cassini rendit publique l'hypothèse de son père, le célèbre astronome Jean-Dominique Cassini, qui supposait que la courbe définie plus haut pouvait représenter plus exactement l'orbite de la Terre que l'ellipse. Bien que cette hypothèse ne soit pas confirmée, la courbe introduite par Cassini a fait l'objet de nombreuses recherches. On l'appelle ovale de Cassini bien qu'en fait elle ne soit pas toujours ovale [*] (cf. ci-après).

3. Génération. Sur $F_1F_2 = 2c$ comme diamètre (fig. 491) construisons le cercle O. Portons sur sa tangente F_1K le segment $F_1K = a$. Déterminons sur l'axe F_1F_2, de part et d'autre de O, les segments OA_1 et OA_2 égaux à OK. Les points A_1, A_2 ainsi obtenus sont les plus éloignés du centre ($OA_1 = OA_2 = \sqrt{c^2 + a^2}$).

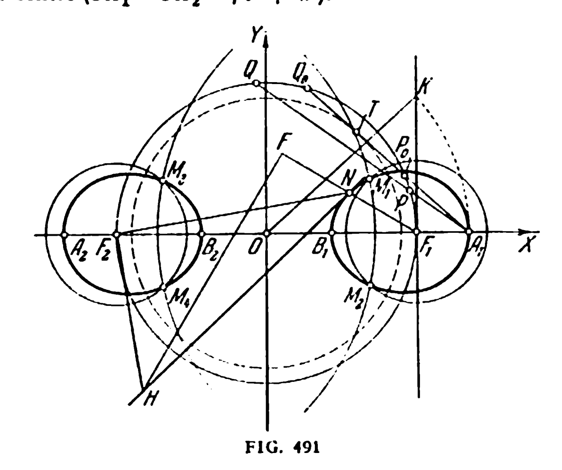


FIG. 491

[*] On appelle *ovale* une courbe plane fermée qui a avec une droite au plus deux points communs. Une courbe ovale ne peut avoir ni de points d'inflexion, ni de points de rebroussement, ni de nœuds.

Si $a < c$, comme sur la fig. 491, nous construisons un cercle complémentaire de rayon a et de centre O (sur la fig. 491 il est tracé en pointillé) et menons à partir du point A_1 la tangente A_1T. Celle-ci coupe le cercle $O(c)$ aux points P_0, Q_0. Portons de l'un des foyers, disons de F_1, en dir ectionde O les segments $F_1B_1 = A_1P_0$ et $F_1B_2 = A_1Q_0$. Nous obtenons les points B_1, B_2 les moins éloignés du centre ($OB_1 = OB_2 = \sqrt{c^2 - a^2}$).

Si par contre $a \geqslant c$, les points les moins éloignés C_1, C_2 (fig. 492) sont situés sur l'axe de symétrie OY du segment F_1F_2 à une distance $F_1C_1 = F_2C_1 = a$ des foyers F_1, F_2($OC_1 = OC_2 = \sqrt{a^2 - c^2}$).

Les points A_1, A_2 et B_1, B_2 (ou C_1, C_2) sont les *sommets* de l'ovale de Cassini.

Menons par le point A_1 (ou A_2) (fig. 491) une sécante arbitraire A_1PQ au cercle $O(c)$ [dans le cas $a < c$ nous nous bornons aux sécantes qui coupent également le cercle complémentaire $O(a)$]. Décrivons du foyer F_1 pris comme centre une circonférence de rayon $r = A_1P$ et de F_2 une circonférence de rayon $r' = A_1Q$. Leurs points d'intersection M_1, M_2 appartiennent à l'ovale de Cassini. En intervertissant les rôles

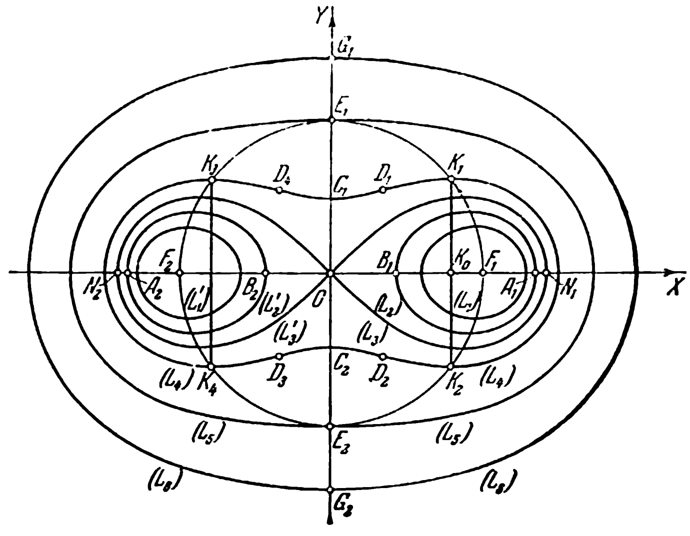


FIG. 492

de F_1 et F_2, nous obtenons un autre couple de points M_3, M_4. La courbe cherchée est le lieu géométrique des points M_1, M_2, M_3, M_4.

4. Équation (O origine; F_2F_1 axe des abscisses):

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4. \tag{1}$$

Equation en coordonnées polaires (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2 \cos 2\varphi + c^4 - a^4 = 0 \tag{2}$$

ou

$$\rho^2 = c^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{a^4 - c^4 \sin^2 2\varphi}. \tag{3}$$

On prend les deux signes quand $a < c$. Dans le cas contraire, on ne prend que le signe plus (autrement ρ serait imaginaire).

5. Particularités de la forme. L'ovale de Cassini est symétrique par rapport aux droites OX et OY et, par conséquent, par rapport au point O.

Quand $a < c$, la courbe se compose de deux ovales séparés. (Sur la fig. 492 deux ovales L_1, L_1' correspondent à la valeur $a = 0{,}8c$; L_2, L'_2 à la valeur $a = 0{,}9c$.) Quand $a > c$, c'est une courbe fermée (pour $a = 1{,}1c$ la courbe L_4, pour $a = c\sqrt{2}$ la courbe L_5, pour $a = c\sqrt{3}$ la courbe L_6). Dans le cas limite $a = c$ la courbe est la lémniscate L_3 (cf. définition de la lémniscate). Quand a tend en croissant vers c, les sommets A_1, A_2 tendent à coïncider avec les sommets N_1, N_2 de la lemniscate et les sommets B_1, B_2 avec le nœud O; dans ce cas l'ovale de droite se transforme en la boucle droite de la lemniscate et l'ovale gauche en la boucle gauche.

Avec la croissance ultérieure de a, lorsqu'il est supérieur à c, mais inférieur à $c\sqrt{2}$ ($c < a < c\sqrt{2}$), l'ovale de Cassini (L_4 sur la fig. 492) présente quatre points d'inflexion symétriques D_1, D_2, D_3, D_4; bien que fermée, la courbe n'est pas un ovale proprement dit (*). La courbure aux sommets C_1, C_2 est infiniment grande quand $a - c$ est infiniment petit. Quand a tend en croissant vers $c\sqrt{2}$, la courbure aux points C_1, C_2 tend vers zéro.

La courbe limite correspondant à la relation $a = c\sqrt{2}$ (L_5 sur la fig. 492) et toutes les autres courbes ($a > c\sqrt{2}$) sont des ovales. Mais l'ovale limite possède une courbure nulle aux sommets E_1, E_2 (en ces points les points d'inflexion de la courbe L_4 fusionnent par couple et aux points d'inflexion la courbure est toujours nulle).

6. Diamètre maximal. Quand $a \geqslant c\sqrt{2}$, c'est-à-dire pour tous les ovales enveloppant l'ovale limite L_5, le plus grand diamètre

---

(*) Certaines droites comme, par exemple, la droite D_1D_4 coupent la courbe de Cassini en quatre points.

$G_1G_2 = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ se trouve sur l'axe OY. Par contre, tout ovale de Cassini situé à l'intérieur de l'ovale limite (aussi bien à l'intérieur de la lemniscate qu'enveloppant celle-ci) possède deux diamètres maximaux $K_1K_2 = K_3K_4 = \frac{a^2}{2c}$. Ils sont symétriques par rapport à OY et distants de

$$OK_0 = \frac{\sqrt{4c^4 - a^4}}{2c}$$

du centre O. Leurs extrémités K_1, K_2, K_3, K_4 sont situées sur le cercle $O(c)$. Ce dernier est le lieu géométrique des points en lesquels les tangentes aux ovales de Cassini sont parallèles à l'axe OX (elles sont bitangentes à l'ovale de Cassini en deux points K_1, K_3 symétriques par rapport à OY).

7. Rayon de courbure:

$$R = \frac{2a^2\rho^3}{c^4 - a^4 + 3\rho^4} = \frac{a^2\rho}{\rho^4 + c^2\cos 2\varphi}. \qquad (4)$$

En particulier, aux sommets $A(\rho = \sqrt{c^2 + a^2},\ \varphi = 0)$, $B(\rho = \sqrt{c^2 - a^2},\ \varphi = 0)$, $C\left(\rho = \sqrt{a^2 - c^2},\quad \varphi = \frac{\pi}{2}\right)$:

$$R_A = \frac{a^2\sqrt{c^2 + a^2}}{2c^2 + a^2}, \qquad R_B = \frac{a^2\sqrt{c^2 - a^2}}{2c^2 - a^2},$$

$$R_C = \frac{a^2\sqrt{a^2 - c^2}}{|a^2 - 2c^2|}.$$

8. Points d'inflexion. Les coordonnées polaires des points d'inflexion D_1, D_2, D_3, D_4 sont déterminées par les formules

$$\rho_D = \sqrt[4]{\frac{a^4 - c^4}{3}}, \quad \cos 2\varphi_D = -\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{a^4}{c^4} - 1\right)}. \qquad (5)$$

Le lieu géométrique des points d'inflexion est la lemniscate de sommets E_1, E_2 (non représentée sur la figure).

9. Construction de la tangente. Pour construire la tangente à l'ovale de Cassini en son point N (fig. 491), prolongeons le segment F_1N au-delà du point N à la distance $NF = NF_1$. Menons par les points F et F_2 les droites FH et F_2H respectivement perpendiculaires à F_1N et F_2N. Relions leur point d'intersection H avec N. La droite NH est la tangente cherchée.

Si les droites FH, F_2H se coupent en un point inaccessible, on peut diminuer proportionnellement les segments NF_1, NF_2.

§ 510. Lemniscate de Bernoulli

1. Historique. En 1694, Jacques Bernoulli dans un travail consacré à la théorie des marées avait utilisé une courbe déterminée par l'équation $x^2 + y^2 = a\sqrt{x^2 - y^2}$. Il avait noté la ressemblance de cette courbe (fig. 493) avec le chiffre 8 et avec le lemnisque (*), d'où l'appellation de *lemniscate*. La lemniscate devient largement connue en 1718 quand Jules-César de Fagnano établit que l'intégrale représentant la longueur de l'arc de la lemniscate ne s'exprime pas à l'aide des fonctions élémentaires et que néanmoins on peut diviser la lemniscate (à l'aide de la règle et du compas) en n arcs égaux à condition que $n = 2^m$ ou $3 \cdot 2^m$ ou $5 \cdot 2^m$ (m est un entier positif quelconque).

La lemniscate est une forme particulière des ovales de Cassini (§ 509, 6). Toutefois, bien que les ovales de Cassini soient largement connus dès 1749, l'identité du « huit de Cassini » et de la lemniscate de Bernoulli ne fut établie qu'en 1806 (Saladini).

2. Définition. La lemniscate est le lieu géométrique des points M tels que le produit des distances à deux points fixes appelés *foyers* est égal au carré de la demi-distance des deux foyers.

Soient F_1 et F_2 les deux foyers et soit $F_1F_2 = 2c$ (F_1F_2 est l'*axe* de la lemniscate). On aura:

$$MF_1 \cdot MF_2 = c^2.$$

3. Équation (l'origine O est le milieu du segment F_1F_2, l'axe OX est orienté suivant F_1F_2):

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2). \tag{1}$$

Équation en coordonnées polaires (O pôle, OX axe polaire):

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi. \tag{2}$$

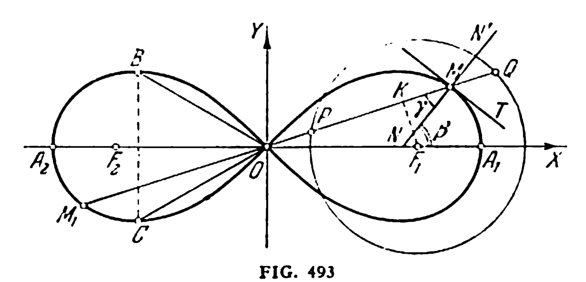


FIG. 493

(*) Du gr. *lemniskos*, ruban.

L'angle φ varie dans les intervalles $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ et $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$.

Représentation paramétrique rationnelle:

$$x = c\sqrt{2}\,\frac{u+u^3}{1+u^4}, \qquad y = c\sqrt{2}\,\frac{u-u^3}{1+u^4} \quad (-\infty < u < +\infty), \tag{3}$$

où le paramètre u est lié avec φ par la relation $u^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right)$.

4. Génération. On peut appliquer la méthode générale de construction des ovales de Cassini, mais le procédé ci-dessous (Mac-Laurin) est meilleur et plus simple. Construisons (fig. 493) la circonférence de rayon $\frac{c}{\sqrt{2}}$ et de centre au point F_1 (ou F_2). Menons une sécante arbitraire OPQ et portons sur cette droite de part et d'autre du point O les longueurs OM et OM_1 égales à la corde PQ. Le point M décrit alors l'une des boucles de la lemniscate, le point M_1 l'autre.

5. Particularités de la forme. La lemniscate possède deux axes de symétrie: la droite $F_1F_2(OX)$ et la droite $OY \perp OX$. Le point O est un nœud; les deux branches possèdent ici un point d'inflexion. Les tangentes à la courbe en ce point forment avec l'axe OX des angles $\pm\frac{\pi}{4}$. Les points A_1, A_2 les plus éloignés du nœud O (*sommets* de la lemniscate) sont situés sur l'axe F_1F_2 à une distance $c\sqrt{2}$ du nœud.

6. Propriétés de la normale. Le rayon vecteur OM de la lémniscate forme avec la normale MN un angle γ $(\widehat{OMN} = \gamma)$ deux fois plus grand que l'angle polaire φ $(= \widehat{XOM})$:

$$\gamma = \widehat{OMN} = 2\varphi.$$

En d'autres termes: l'angle $XNM = \beta$ compris entre l'axe OX et le vecteur NN' de la normale extérieure à la lemniscate au point M est égal à trois fois l'angle polaire du point M:

$$\beta = 3\varphi.$$

7. Construction de la tangente. Pour construire la tangente à la lemniscate au point M menons le rayon vecteur OM et construisons $\widehat{OMN} = 2\widehat{XOM}$. La perpendiculaire MT à la droite MN est la tangente cherchée.

8. Le diamètre maximal $BC = \frac{1}{2} F_1F_2 = c$ (fig. 493) est la base du triangle équilatéral de sommet O.

9. Rayon de courbure

$$R = \frac{2c^2}{3\rho}.$$

10. Aire S du secteur A_1OM:

$$S(\varphi) = \frac{c^2}{2} \sin 2\varphi = OK \cdot F_1K$$

(K est la projection du foyer F_1 sur le rayon vecteur OM).

En d'autres termes: la perpendiculaire F_1K abaissée du foyer de la lemniscate sur un rayon vecteur arbitraire OM divise l'aire du secteur A_1OM en deux parties égales.

L'aire de chaque boucle de la lemniscate est $2S\left(\frac{\pi}{4}\right) = c^2$.

11. Rapports avec l'hyperbole. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du centre O de l'hyperbole équilatère de sommets A_1, A_2 sur ses tangentes est une lemniscate de mêmes sommets.

§ 511. Spirale d'Archimède (*)

1. Génération. Pour construire la spirale d'Archimède de paramètre donné k, menons du centre O (fig. 494) une circonférence arbitraire, par exemple la circonférence de rayon $ON = k$ (**).

Divisons-la par les points $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ (***) en un nombre arbitraire d'arcs égaux (nous avons pris $n = 12$). Sur le rayon Ob_0 portons le segment $OA_1 = 2\pi k$ (le pas de la spirale). Divisons-le en un même nombre de parties égales. Sur les rayons $Ob_1, Ob_2, Ob_3, \ldots$ portons les segments $OD_1 = \frac{1}{n} OA_1; OD_2 = \frac{2}{n} OA_1 \ldots$ Nous obtenons les points $D_1, D_2, D_3, \ldots$ de la première spire de la spirale. Nous obtenons les points $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de la seconde spire en portant sur les prolongements

(*) Lire au préalable § 75.

(**) Il est plus commode de prendre une circonférence de plus grand rayon; nous n'avons pris une circonférence de rayon k que parce qu'elle nous servira par la suite.

(***) Le point b_1 n'est pas noté sur la figure, car il est situé à l'intérieur du petit cercle entourant le point D_1 (la distance b_1D_1 est d'environ 5% du rayon k).

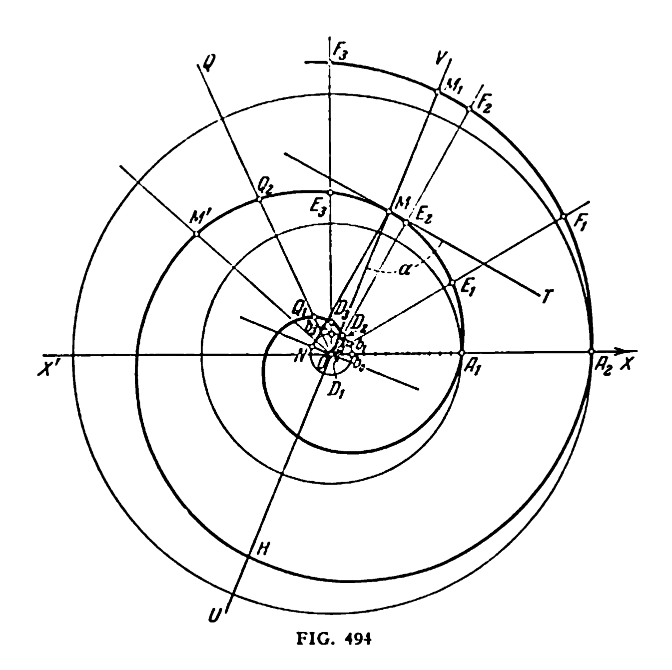


FIG. 494

des segments OD_1, OD_2, OD_3, ... les segments D_1E_1, D_2E_2, ..., égaux au pas OA_1. Nous obtenons de même les points des spires suivantes.

2. PARTICULARITÉS DE LA FORME. Tout rayon OQ issu du pôle O possède, outre le point O, une infinité de points Q_1, Q_2, ... communs avec la spirale. Deux points successifs Q_i, Q_{i+1} sont distants de $a (= 2k\pi)$ (a est le pas de la spirale). La tangente à la spirale au point O est confondue avec la droite initiale OX (il est utile d'en tenir compte lors de la construction de la spirale). La tangente MT à la spirale en un point arbitraire s'obtient de la droite MO par une rotation de cette dernière d'un angle (aigu) $OMT = \alpha$, pour lequel

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OM}{k} = \frac{\rho}{k} = \varphi.$$

Quand $\rho \to \infty$, l'angle α tend vers 90° et l'arc de la spirale au voisinage du point M s'apparente de plus en plus à un arc de circonférence.

3. PROPRIÉTÉ DE LA NORMALE. La normale MN menée par le point M de la spirale d'Archimède de pas a coupe la droite ON perpendiculaire au rayon vecteur OM au point N distant de O de $ON = \frac{a}{2\pi} (= |k|)$.

4. CONSTRUCTION DE LA TANGENTE. Pour construire la tangente au point M à la spirale d'Archimède (cf. fig. 494) faisons tourner le rayon OM autour du point O d'un angle $+\frac{\pi}{2}$. Relions M avec le point N en lequel le rayon tourné coupe la circonférence de rayon k et de centre O. La droite MN est la normale à la spirale. Construisant $MT \perp MN$, nous obtenons la tangente cherchée. La tangente à la spirale de sens indirect (cf. § 75 et fig. 106) est construite de la même manière avec cette différence que le rayon OM tourne d'un angle $-\frac{\pi}{2}$.

5. AIRE S DU SECTEUR MOM' (si les angles polaires des points M, M' diffèrent au plus de 2π):

$$S = \frac{1}{6}\omega(\rho^2 + \rho\rho' + \rho'^2), \tag{1}$$

où $\rho = OM$, $\rho' = OM'$, $\omega = \widehat{MOM'}$.

Géométriquement, l'aire du secteur de la spirale d'Archimède est égale à la moyenne arithmétique des aires des trois secteurs circulaires dont l'angle est le même que celui du secteur MOM' et dont l'un des rayons est égal au rayon vecteur OM, l'autre au rayon vecteur OM', le troisième à la moyenne proportionnelle $\sqrt{OM \cdot OM'}$.

6. AIRES DES SPIRES. La formule (1) donne pour $\rho = 0$, $\rho' = a$, $\omega = 2\pi$ l'aire S_1 de la figure $OD_2D_3\,Q_1A_1O$ (fig. 494), limitée par la première spire de la spirale et le segment OA_1:

$$S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2 = \frac{1}{3}S_1' \tag{2}$$

où S_1' est l'aire du cercle de rayon OA_1.

L'aire S_2 de la figure $A_1E_3HA_2A_1$ limitée par la seconde spire et le segment $A_2A_1 (\rho = a,\ \rho' = 2a,\ \omega = 2\pi)$ est:

$$S_2 = \frac{7}{3}\pi a^2 = \frac{7}{12}S_2' \tag{3}$$

où S_2' est l'aire du cercle de rayon OA_2.

En général, l'aire S_n limitée par la $n^{\text{ième}}$ spire de la spirale et le segment OA_n s'exprime ainsi:

$$S_n = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3} \pi a^2 = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3n^2} S'_n, \tag{4}$$

où S'_n est l'aire du cercle de rayon OA_n.

7. Aires des couronnes. Appelons *première couronne* de la spirale d'Archimède la figure balayée par le segment du rayon vecteur compris entre les première et seconde spires lorsque le rayon vecteur tourne de 360° à partir de sa position initiale. Pour parcourir son périmètre on longe le segment A_1O, la première spire OQ_1A_1, le segment A_1A_2, et enfin la seconde spire $A_2HQ_2A_1$ (dans le sens rétrograde).

De même la *seconde couronne* est balayée par le segment du rayon vecteur compris entre les seconde et troisième spires. Elle est limitée: 1) par le segment A_2A_1; 2) par la seconde spire; 3) par le segment A_2A_3; 4) par la troisième spire (parcourue dans le sens rétrograde).

On définit de même les troisième, quatrième, etc., couronnes.

L'aire F_n de la $n^{\text{ième}}$ couronne s'exprime ainsi:

$$F_n = S_{n+1} - S_n = 6nS_1.$$

Ici $S_1 = \frac{1}{3} \pi a^2$ est l'aire de la première spire (de la couronne zéro).

Les propriétés de la spirale que nous avons exposées ont été découvertes par Archimède.

8. Longueur l de l'arc OM

$$l = \frac{k}{2} [\varphi \sqrt{\varphi^2 + 1} + \ln (\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1})] = \frac{1}{2} \left[\frac{\rho \sqrt{\rho^2 + k^2}}{k} + k \ln \frac{\rho + \sqrt{\rho^2 + k^2}}{k} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} k[\operatorname{tg} \alpha \sec \alpha + \ln (\operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha)],$$

où α est l'angle aigu compris entre la tangente MT (fig. 494) et le rayon vecteur OM, ou $\alpha = \widehat{ONM}$.

9. Rayon de courbure

$$R = \frac{(\rho^2 + k^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2k^2} = k \frac{(\varphi^2 + 1)^{3/2}}{\varphi^2 + 2} = k \frac{(\operatorname{tg}^2\alpha + 1)^{3/2}}{\sec^2\alpha + 1}.$$

Au point O, $R_O = \frac{k}{2}$.

§ 512. Développante de cercle

1. Construction mécanique. La *développante de cercle* est une spirale fort proche de la spirale d'Archimède. C'est une courbe décrite par l'extrémité M (fig. 495) d'un fil tendu LM que l'on déroule d'une bobine circulaire D_0LL_1 (ou que l'on enroule sur cette bobine; dans ce dernier cas le point M se déplace dans le sens inverse).

La propriété mentionnée s'exprime géométriquement de la façon suivante.

2. Définition. Supposons que le point L situé à l'instant initial en D_0, décrive plusieurs fois le cercle de rayon k (k est le *paramètre* de la développante de cercle). Portons sur la tangente LH dans la direction opposée à celle de la rotation le segment LM égal à l'arc D_0L parcouru par le point L. La développante de cercle est la courbe décrite

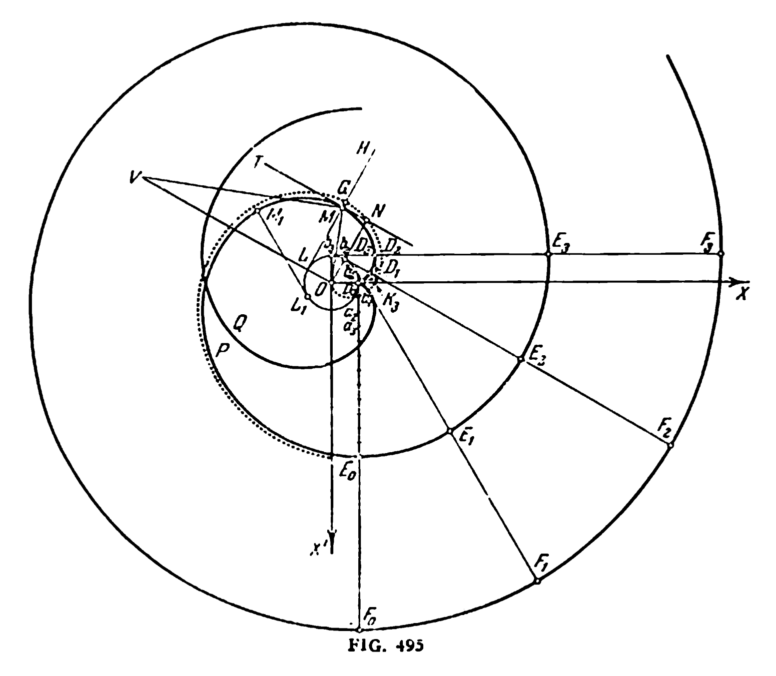


FIG. 495

par le point M. Un seul et même cercle possède une infinité de développantes (correspondant à toutes les positions possibles du point D_0).

Suivant que le mouvement du point L s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire, nous obtenons la développante de cercle de sens indirect (D_0Q sur la fig. 495) ou de sens direct (D_0MP). On considère habituellement les deux développantes du cercle donné comme les deux branches d'une même courbe.

3. Génération. Divisons la circonférence donnée en n arcs égaux $D_0b_1 = b_1b_2 = b_2b_3 = \ldots = b_{n-1}D_0$. Portons sur la tangente en D_0 le segment $D_0E_0 = 2\pi k$. Divisons-le en un même nombre de parties égales:

$$D_0a_1 = a_1a_2 = \ldots = a_{n-1}E_0.$$

Portons sur les tangentes aux points successifs $b_1, b_2, b_3, \ldots$ (dans la direction opposée au déplacement du point de contact) les segments $b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3, \ldots$ respectivement égaux aux segments $D_0a_1, D_0a_2, D_0a_3, \ldots$ Nous obtenons les points $D_1, D_2, D_3, \ldots$ de la première spire D_0PE_0 de la développante de cercle. Nous obtenons les points $E_1, E_2, E_3, \ldots$ de la seconde spire en portant sur les prolongements des segments $b_1D_1, b_2D_2, b_3D_3, \ldots$ les segments $D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3, \ldots$ égaux à D_0E_0. Nous obtenons de même les points des autres spires.

4. Particularités de la forme. La développante de cercle possède, en vertu des propriétés générales de la développante d'une courbe quelconque (cf. §§ 346, 347), les propriétés suivantes.

a) La développante d'un cercle coupe toutes les tangentes à ce cercle sous un angle droit. En particulier, la développante forme au point D_0 un angle droit avec la tangente D_0F_0.

b) Inversement la normale MH à la développante est la tangente au cercle. Le point de contact L est alors le centre de courbure de la développante, de sorte que le segment ML est le rayon de courbure de la développante:

$$R = ML. \quad (1)$$

En particulier, au point D_0 le rayon de courbure de la développante est nul:

$$R_0 = 0. \quad (2)$$

c) Le rayon de courbure R de la développante croît à mesure que le point M s'éloigne du point où il était à l'instant initial; son accroissement $R_1 - R = M_1L_1 - ML$ est égal à la longueur de l'arc correspondant LL_1 du cercle:

$$R_1 - R = \widehat{LL_1}. \quad (3)$$

En particulier, dans la partie D_0M de la développante l'accroissement du rayon de courbure est égal à $R_M - R_0 = R_M$, et

$$R_M = \widehat{D_0L} = kx, \quad (4$$

où $\alpha = \widehat{D_0OL}$ est l'angle de rotation du rayon OL à partir de sa position initiale OD_0.

d) D'après sa construction la développante ne pénètre pas à l'intérieur du cercle O. C'est pourquoi, quand le point M passe par le point D_0, la direction du mouvement est inversée, autrement dit, D_0 est un point de rebroussement de la développante.

5. Rapports avec la spirale d'Archimède. Comparons la branche de sens direct (indirect) de la développante de cercle avec la spirale d'Archimède de sens direct (indirect) de même paramètre $k = OD_0$ (c'est-à-dire de pas $2\pi a = D_0E_0$). Supposons que cette spirale (en pointillé sur la fig. 495) se déroule à partir du centre O de la circonférence donnée dans la direction du rayon OX' que l'on obtient par une rotation du rayon initial OD_0 d'un angle de $-90°$ $(+90°)$. Le point G décrivant la spirale se rapproche indéfiniment de la développante: la plus courte distance du point G à la développante (elle est mesurée par le segment GM de la normale LH à la développante) n'est plus, dès la fin de la première spire, que 1% du pas de la spirale.

D'autre part, le rayon vecteur ON de la spirale formant un angle de $-90°$ $(+90°)$ avec le rayon OL a la même longueur $k\alpha$ que le segment LM. Cela signifie que le *pied de la perpendiculaire abaissée du centre O sur la tangente MT à la développante décrit la spirale d'Archimède.*

6. Équation en coordonnées polaires de la développante de cercle (le pôle O est le centre du cercle donné; l'axe polaire OX est orienté suivant le rayon initial OD_0):

$$\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2}}{k} - \arc\cos\frac{k}{\rho}, \tag{5}$$

où k est le rayon du cercle.

7. Équations paramétriques

$$x = k(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha); \qquad y = k(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha), \tag{6}$$

où $\alpha = \widehat{D_0OL}$.

8. Longueur s de l'arc $\overset{\frown}{D_0M}$:

$$s = \frac{1}{2}k\alpha^2 = \frac{1}{2}\frac{(k\alpha)^2}{k} = \frac{1}{2}\frac{ML^2}{OL}. \tag{7}$$

Pour obtenir un segment de même longueur menons la droite $MV \perp OM$ jusqu'à son intersection au point V avec le prolongement du rayon OL. La moitié du segment OV est égale en longueur à l'arc $\overset{\frown}{D_0M}$:

$$s = \overset{\frown}{D_0M} = \frac{1}{2}OV. \tag{8}$$

9. L'AIRE S DU SECTEUR D_0OM décrit par le rayon vecteur, ainsi que l'aire S_1 du triangle mixtiligne LMD_0 dont la base est le segment LM et les côtés l'arc D_0L du cercle et l'arc D_0M de la développante, est trois fois plus petite que l'aire du triangle OMV (voir numéro 8):

$$S = S_1 = \frac{1}{3} \text{ aire } OMV = \frac{1}{6} k^2\alpha^3. \tag{9}$$

10. ÉQUATION INTRINSÈQUE DE LA DÉVELOPPANTE DE CERCLE. On appelle *équation intrinsèque* d'une courbe l'équation reliant la longueur s de son arc $\overset{\frown}{M_0M}$ compté à partir d'un point M_0 et le rayon de courbure R au point M. L'équation intrinsèque de la développante de cercle est:

$$R^2 = 2ks; \tag{10}$$

on l'obtient en éliminant α entre (4) et (7).

11. PROPRIÉTÉ CINÉMATIQUE. Dans le langage de la cinématique l'équation intrinsèque (10) exprime la propriété suivante: si l'arc de la développante de cercle roule (sans glisser) sur une droite, le centre de courbure L correspondant au point de contact parcourt une parabole de paramètre k.

12. HISTORIQUE. Les développantes de différentes courbes ont été étudiées pour la première fois par Huyghens dans son ouvrage sur le pendule (1673) (cf. § 514, 17). Les principales propriétés de la développante de cercle ont été découvertes par La Hire et exposées dans son ouvrage de 1706. En 1740, Clairaut découvrit la propriété 5. La propriété 9 ainsi que l'interprétation cinématique de l'équation intrinsèque (de toute courbe) ont été indiquées par Mannheim en 1859.

§ 513. Spirale logarithmique

1. DÉFINITION. Soit UV une droite (fig. 496) tournant uniformément autour d'un point immobile *O(pôle)*; si sur cette droite un point M se déplace en s'éloignant de O avec une vitesse proportionnelle à la distance OM, il décrit une courbe appelée *spirale logarithmique*.

2. PRINCIPALE PROPRIÉTÉ GÉOMÉTRIQUE. A la rotation de la droite UV à partir de n'importe laquelle de ses positions d'un angle $\omega(=\widehat{M_0OM_1})$ correspond un même rapport $OM_1 : OM_0$ des rayons vecteurs. En d'autres termes, si le couple de points M_0, M_1 de la spirale logarithmique apparaît du pôle sous un même angle qu'un autre couple de points N_0, N_1 de cette même spirale, les triangles OM_0M_1 et ON_0N_1 sont semblables.

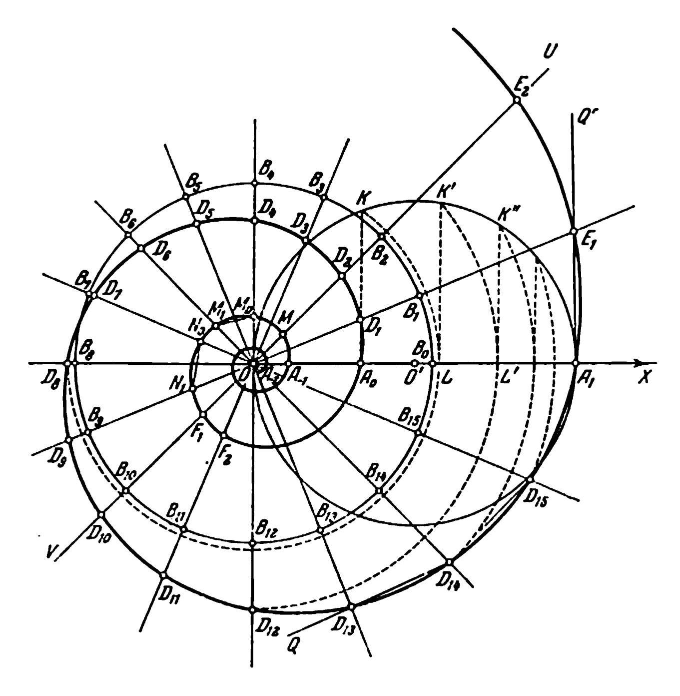


FIG. 496

Nous appellerons *indice de croissance* de la spirale logarithmique le rapport q du rayon vecteur terminal (OA_1) au rayon vecteur initial (OA_0) lors de la rotation de la droite UV d'un angle de $+2\pi$.

3. Spirales de sens direct et indirect. Si la droite UV tourne dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, la spirale logarithmique est dite *de sens direct*; elle est dite de sens indirect dans le cas contraire. Pour une spirale de sens direct $q > 1$; pour une spirale de sens indirect $q < 1$. Quand $q = 1$, la spirale dégénère en circonférence.

On peut faire coïncider les spirales de sens direct et indirect dont le produit des indices de croissance donne 1, mais pour cela il faut transformer le côté « face » de l'une d'elles en côté « dos ».

4. Génération. Pour construire une spirale logarithmique de sens direct d'indice de croissance q (*) divisons une circonférence de centre O en $n = 2^k$ parties égales par les points $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (**). Pour fixer les idées, posons $n = 2^4 = 16$. Prenons sur le rayon OB_0 un point arbitraire A_0 et portons le segment $OA_1 = qOA_0$. Sur le segment OA_1 comme diamètre construisons la circonférence O' et menons $A_0K \perp OA_1$ jusqu'à l'intersection avec cette circonférence au point K. La circonférence de rayon OK coupe le rayon OB_8 au point D_8 appartenant à la spirale considérée; la même circonférence coupe le rayon OA_1 en un certain point L. Menons $LK' \perp OA_1$ jusqu'à l'intersection avec la circonférence O' au point K'. La circonférence de rayon OK' coupe le rayon OB_{12} au point D_{12} appartenant à la spirale cherchée et le rayon OA_1 en un point L'. Menons par ce point $L'K'' \perp OA_1$, etc. Nous obtenons ainsi les points D_{14} et D_{15}.

On peut construire une infinité d'autres points de la spirale situés sur les droites B_0B_8, B_1B_9, etc., de la manière suivante. Au point D_{14} construisons l'angle $OD_{14}Q$ égal à l'angle $OD_{15}D_{14}$; à son intersection avec le rayon OB_{13} nous obtenons le point D_{13} de la spirale cherchée. Au point A_1 construisons $\widehat{OA_1Q'} = \widehat{OD_{15}A_1}$; à son intersection avec le rayon OB_1 nous obtenons le point E_1, etc.

5. Equation en coordonnées polaires (le pôle coïncide avec le pôle de la spirale; l'axe polaire passe par un point M_0 arbitraire de la spirale):

$$\rho = \rho_0 q^{\frac{\varphi}{2\pi}}, \tag{1}$$

où $\rho_0 = OM_0$ est le rayon vecteur du point M_0 et q l'indice de croissance.

Exemple. La spirale construite sur la fig. 496 ($q = 3$) est représentée par l'équation

$$\rho = \rho_0 3^{\frac{\varphi}{2\pi}}.$$

Si l'on prend pour axe polaire le rayon OB_0, on a $\rho_0 = OA_0$. Posant en particulier $\varphi = \pi$, nous obtenons $\rho = \rho_0\sqrt{3} = OD_8$; pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ nous avons $\rho = \rho_0\sqrt[4]{3} = OD_4$, etc.

(*) On construit de même la spirale de sens indirect d'indice de croissance $\frac{1}{q}$.

(**) Lors de la construction de la spirale de sens indirect, les points $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ se succèdent dans le sens des aiguilles d'une montre.

L'équation (1) s'écrit habituellement sous la forme

$$\rho = \rho_0 e^{k\varphi}, \tag{2}$$

où k est un paramètre s'exprimant en fonction de q à l'aide de la formule:

$$k = \frac{\ln q}{2\pi}. \tag{3}$$

Inversement

$$q = e^{2k\pi}. \tag{4}$$

Le sens géométrique du paramètre k découle de la relation

$$k = \operatorname{cotg} \alpha, \tag{5}$$

où $\alpha = \widehat{OMT}$ est l'angle compris entre la droite OM et la tangente MT (cf. ci-après fig. 497).

Pour les spirales de sens direct le paramètre k a des valeurs positives, pour les spirales de sens indirect des valeurs négatives.

6. Particularités de la forme. Si la droite UV fait une infinité de tours dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (dans le sens des aiguilles), le point M décrivant la spirale de sens direct (de sens indirect) s'éloigne indéfiniment du pôle et décrit un nombre infini de spires. Pour une infinité de tours dans le sens contraire le point M se rapproche indéfiniment du pôle O sans coïncider avec O quelle que soit la position de la droite UV. La courbe forme ainsi une infinité de spires autour du pôle. Toutefois, la longueur de l'arc décrit alors par le point M à partir d'un point A_0, bien que croissante, n'est pas infinie. Elle tend vers une certaine limite s que l'on appelle la *longueur de l'arc* OA_0. Cette appellation est conventionnelle, car le point O, rigoureusement parlant, n'appartient pas à la spirale logarithmique.

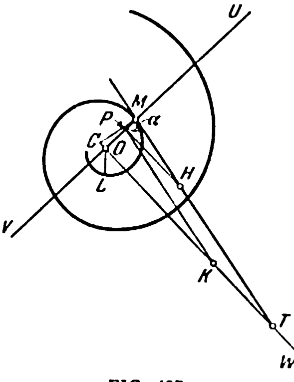


FIG. 497

7. Tangente et longueur de l'arc. L'angle α ($= \widehat{OMT}$), dont on doit faire tourner la droite UV autour du point M de la spirale logarithmique (fig. 497) pour que cette droite coïncide avec la tangente MT est le même pour tous les points de la spirale. Le segment MT de la tangente allant du point de contact jusqu'à l'intersection avec la droite OW menée par le pôle

O perpendiculairement au rayon vecteur OM a la même longueur s que l'arc OM de la spirale:

$$s = \overset{\frown}{OM} = MT = \frac{\rho}{\cos\alpha}, \tag{6}$$

où ρ est le rayon vecteur OM.

La longueur $\bar{s}$ d'un arc quelconque LM de la spirale logarithmique est:

$$\bar{s} = \overset{\frown}{LM} = \overset{\frown}{OM} - \overset{\frown}{OL} = \frac{\rho_M - \rho_L}{\cos\alpha}, \tag{7}$$

autrement dit, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{LM}$ est proportionnelle à la différence des rayons vecteurs à ses extrémités. Pour construire un segment de même longueur il suffit de porter sur le grand rayon OM un segment OP égal au petit rayon OL et de mener par P la droite PH perpendiculaire à OM. Elle coupe la tangente MT en un certain point H. MH est le segment cherché.

L'angle α s'exprime à l'aide de l'indice de croissance q par la formule

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\ln q}{2\pi}. \tag{8}$$

Pour la spirale représentée sur la fig. 496, où $q = OA_1 : OA_0 = 3$, nous avons:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\ln 3}{2\pi} \approx 0{,}1748,$$

$$\alpha \approx 80°5'.$$

8. Triangle caractéristique et aire sectorielle. L'aire balayée par le rayon vecteur OL (fig. 497), quand le point L part d'une certaine position initiale M et se rapproche indéfiniment du pôle O suivant la spirale logarithmique, tend vers une *limite finie* S (*l'aire sectorielle*). L'aire sectorielle au point M est deux fois plus petite que l'aire du *triangle caractéristique* OMT, formé par le rayon vecteur OM, la droite OW qui lui est perpendiculaire et la tangente MT:

$$S = \frac{1}{2} S_{OMT} = \frac{1}{4}\rho^2 \operatorname{tg}\alpha, \tag{9}$$

où ρ est le rayon vecteur du point M.

L'aire $\bar{S}$ de tout secteur LOM (nous supposons que OM est le grand rayon et que $\widehat{LOM}$ ne dépasse pas 2π en valeur absolue) est deux fois plus petite que l'aire du trapèze $PMTK$ (fig. 497) obtenu à partir du

triangle caractéristique OMT si l'on porte sur OM le segment $OP = OL$ et mène PK parallèlement à MT:

$$\bar{S} = S_{PMTK} = \frac{1}{4}(\rho_2^2 - \rho_1^2) \operatorname{tg} \alpha, \tag{10}$$

où ρ_1, ρ_2 sont les rayons vecteurs des points L, M.

9. Rayon et centre de courbure. Le centre de courbure C correspondant au point M de la spirale logarithmique (fig. 497)) est situé à l'intersection de la normale MC menée par M et de la droite OW menée par le pôle perpendiculairement au rayon vecteur OM. Le rayon de courbure est

$$R = \frac{\rho}{\sin \alpha}. \tag{11}$$

On démontre cette égalité en considérant le triangle COM.

10. Développée. Le lieu géométrique des centres de courbure C (développée) de la spirale logarithmique est une spirale logarithmique engendrée par la spirale initiale tournant autour du pôle d'un angle

$$\omega = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \alpha, \tag{12}$$

où n est un entier arbitraire. Ainsi, si la spirale initiale coupe les rayons vecteurs sous un angle $\alpha = 45°$, on peut alors la faire coïncider avec sa développée par une rotation autour du pôle d'un angle $\omega = \frac{\pi}{2}$ ou $\omega = 5\frac{\pi}{2}$ ou $\omega = -3\frac{\pi}{2}$, etc. En particulier, il existe une infinité de spirales logarithmiques qui sont leurs propres développées. Ce sont les spirales pour lesquelles l'angle α satisfait à l'une des équations

$$\operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} \alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{2},$$

où n est un nombre entier.

11. Équation intrinsèque (c'est-à-dire équation reliant la longueur de l'arc et le rayon de courbure; cf. § 512, 10)

$$R = ks (= s \operatorname{cotg} \alpha). \tag{13}$$

Elle découle de (6) et (11); on peut la déduire en considérant le triangle CMT.

12. Propriété cinématique. Dans le langage de la cinématique l'équation (13) exprime la propriété suivante: si l'arc de spirale logarithmique roule (sans glisser) sur la droite AB, le centre de courbure correspondant au point de contact se déplace suivant une droite formant un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avec AB.

13. PROPRIÉTÉ CARTOGRAPHIQUE. Projetée à partir du pôle de la sphère P sur le plan de l'équateur la courbe sphérique coupant les méridiens sous un angle constant α (cette courbe est appelée *loxodromie* (*)) est une spirale logarithmique; le pôle de cette dernière se trouve au centre de la sphère. Les méridiens sont alors les rayons orientés suivant les rayons vecteurs de la spirale; ces rayons coupent la spirale sous le même angle constant α sous lequel la loxodromie coupe les méridiens.

14. HISTORIQUE. En 1638, Descartes trouva que la tangente à une spirale dont l'arc croît proportionnellement au rayon vecteur forme un angle constant avec le rayon vecteur. A la même époque Torricelli étudia en détail la « spirale géométrique », nom qu'il donna à la courbe déterminée à l'aide de la construction exposée plus haut, p. 783 et démontra géométriquement certaines de ses propriétés (6 et 7). Jacques Bernoulli découvrit en 1692 d'autres propriétés (8-11) de la « spirale merveilleuse » *(spira mirabilis)*. L'appellation «spirale logarithmique» (l'angle des rayons vecteurs est proportionnel au logarithme de leur rapport) est due à Varignon (1704). Par la suite la spirale logarithmique fut l'objet de multiples études. Ainsi, sa propriété cinématique (12) fut découverte par Catalan en 1856.

§ 514. Cycloïdes

1. DÉFINITION. On appelle *cycloïde* la courbe décrite par un point (fig. 498) invariablement lié au cercle mobile *(cercle générateur)* qui roule (sans glisser) sur une droite KL *(directrice)*.

Si le point M engendrant la cycloïde est intérieur au cercle générateur (autrement dit, si la distance $CM = d$ au centre C est inférieure au rayon r), la cycloïde est dite *raccourcie* (fig. 498, *a*); s'il est extérieur (c'est-à-dire si $d > r$), elle est dite *allongée* (fig. 498, *b*); si le point M est situé sur la circonférence (autrement dit, $d = r$), la courbe décrite par ce point est appelée *cycloïde ordinaire* (fig. 498, *c*) ou cycloïde tout court (cf. § 253).

EXEMPLE. Quand un wagon se déplace sur les rails, le point intérieur de la roue décrit une cycloïde raccourcie, le point sur le bandage de la roue une cycloïde allongée et le point de la circonférence de la roue une cycloïde ordinaire.

On appelle *point de départ* de la cycloïde (A sur la fig. 498, *a-c*) un point situé sur la droite (C_0O), joignant le centre C_0 du cercle géné-

---

(*) Du gr. *loxodromos*, qui court obliquement. Un navire suivant constamment le même rumb du vent, se déplace suivant une loxodromie.

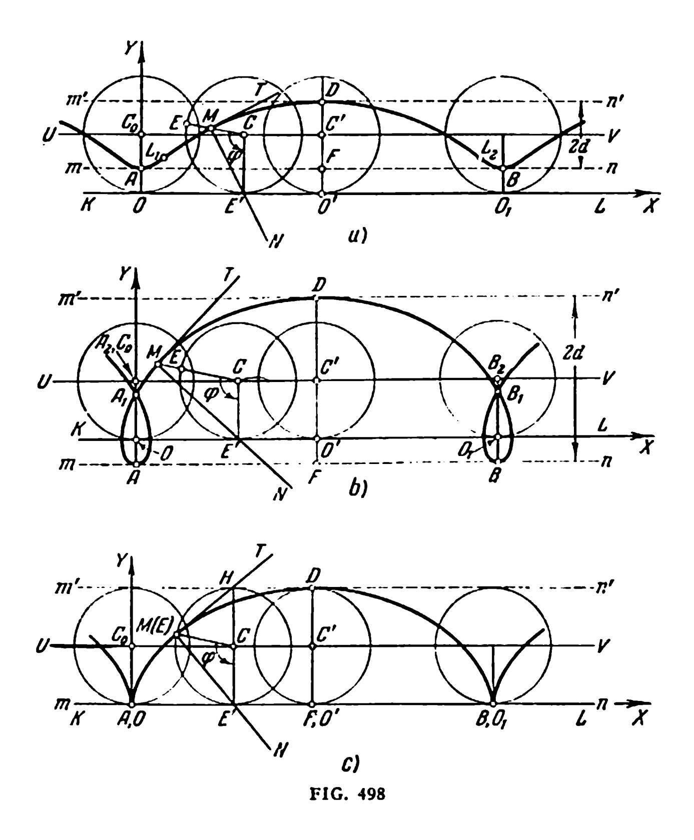


FIG. 498

rateur au point de contact O de la circonférence mobile et de la droite fixe, du même côté de ce centre que le point O. Le point B sur les fig. 498, *a-c* est aussi un point de départ.

Les points de départ de la cycloïde ordinaire (fig. 498, *c*) sont situés sur la directrice et coïncident avec les points de contact correspondants.

On appelle *sommet* de la cycloïde (D sur la fig. 498, *a-c*) un point appartenant à la droite $C'O'$ reliant le centre C' du cercle générateur avec le point de contact O' de la circonférence et de la droite, mais qui est situé sur le prolongement du segment $C'O'$ au-delà du point C'.

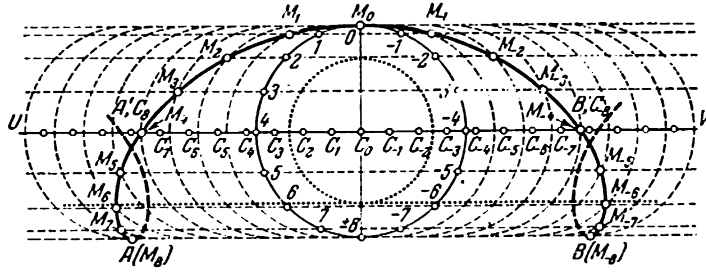


FIG. 499

Le segment AB reliant deux points de départ voisins est appelé la *base* de la cycloïde; la perpendiculaire DF abaissée du sommet de la cycloïde sur sa base est son *hauteur*. L'arc décrit par le point M entre deux points de départ voisins est appelé *arche* ou arcade de cycloïde; la droite UV décrite par le centre C du cercle générateur est dite *ligne des centres* de la cycloïde.

2. GÉNÉRATION. Pour construire la cycloïde d'après le rayon r du cercle générateur et la distance d du point M décrivant la cycloïde au centre C du cercle générateur, menons tout d'abord (fig. 499) la ligne des centres UV. D'un certain point C_0 de cette ligne comme centre traçons une circonférence de rayon d (*). Désignons par M_0 l'une des extrémités de son diamètre perpendiculaire à UV. C'est le sommet de la courbe cherchée.

Divisons la circonférence C_0 en un nombre pair $2n$ d'arcs égaux (nous avons pris $2n = 16$) de sorte que le point M_0 soit l'un des points de division et marquons les points de division par $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$ (les points $+n$ et $-n$ sont confondus). Portons sur la ligne des centres de part et d'autre du point C_0 les segments C_0A', C_0B' égaux à la demi-circonférence du cercle générateur:

$$C_0A' = C_0B' = \pi r,$$

et divisons chacun de ces segments en n parties égales. Désignons les points de division par $C_{\pm 1}, C_{\pm 2}, \ldots, C_{\pm n}$(les points C_n, C_{-n} coïncident respectivement avec les points A', B'; aux indices positifs sur la droite UV et sur la circonférence C_0 correspondent les points situés d'un même côté de la droite C_0M_0). Par les points 1, 2, 3, ... de la circonférence

(*) Dans le cas d'une cycloïde ordinaire, c'est la circonférence du cercle générateur. En fait, ni le cercle générateur, ni la directrice ne participent à la construction. Sur la fig. 499 ils ne sont représentés que pour des raisons de clarté.

C_0 menons des droites parallèles à la ligne des centres (elles passeront respectivement par les points -1, -2, -3, ...) et par les points $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$, ... les demi-circonférences de rayon d, dont les diamètres sont perpendiculaires à UV et qui tournent leur concavité vers le point C_0.

Marquons les points M_1, M_{-1}, où les demi-circonférences C_1, C_{-1} rencontrent la droite menée par les points $+1$, -1; marquons ensuite les points M_2, M_{-2}, où les demi-circonférences C_2, C_{-2} rencontrent la droite menée par les points $+2$, -2, etc. Tous les points M_1, M_{-1}, M_2, M_{-2}, etc., sont situés sur la cycloïde cherchée. Aux points M_n, M_{-n} se trouvent ses points de départ A, B.

On construit ainsi par points une arche de cycloïde. Pour construire les arches voisines, il faut prolonger la suite des points C comme l'indique la fig. 499. On renumérote ces points. Par contre il n'est pas nécessaire de tracer encore une fois la circonférence C_0, car les droites parallèles à la ligne des centres restent les mêmes.

3. Équations paramétriques [l'axe des abscisses est la directrice KL; l'origine des coordonnées est la projection de l'un des points de départ (A sur la fig. 498, *a-c*) sur la directrice KL]:

$$x = r\varphi - d \sin \varphi; \quad y = r - d \cos \varphi, \tag{1}$$

où $\varphi = \widehat{MCE'}$ est l'angle de rotation du cercle générateur compté à partir de la position où le point M coïncide avec A.

Pour une cycloïde ordinaire ($d = r$)

$$x = r(\varphi - \sin \varphi); \quad y = r(1 - \cos \varphi). \tag{1a}$$

4. Particularités de la forme. La cycloïde se reproduit sans fin suivant le droite KL. A n'importe quel arc de cycloïde compté à partir d'une position initiale quelconque A correspond un arc symétrique compté à partir du même point dans la direction opposée; AC_0 est l'axe de symétrie. La cycloïde est également symétrique par rapport à la droite DF menée par un sommet quelconque perpendiculairement à la directrice.

Lors d'une translation suivant la ligne des centres d'une distance multiple de $2\pi r$ (de la longueur de la circonférence génératrice), la nouvelle cycloïde coïncide avec l'ancienne. Par des translations successives de $\pm 2\pi r$ on peut obtenir toute la cycloïde à partir d'une arche quelconque correspondant à la variation du paramètre d'une certaine valeur $\varphi = \varphi_0$ jusqu'à la valeur $\varphi = \varphi_0 + 2\pi$, par exemple de $\varphi = -\pi$ à $\varphi = \pi$ ou de $\varphi = 0$ à $\varphi = 2\pi$.

La cycloïde est intérieure à la bande limitée par les droites $y = r + d$ et $y = r - d$. La première est tangente à la cycloïde en chacun de ses sommets. La seconde passe par tous les points de départ; elle est

tangente à la cycloïde quand celle-ci est raccourcie ou allongée. Pour une cycloïde ordinaire la seconde droite ($y = 0$) coïncide avec la directrice et est *perpendiculaire* aux tangentes (à droite ou à gauche) aux points de départ de la cycloïde.

5. NŒUDS. La cycloïde allongée possède toujours des nœuds. Le nombre et la disposition de ces derniers dépendent du rapport $d:r(=\lambda)$. Tant que ce rapport n'est pas supérieur au nombre $\lambda_0 = 4{,}60333$(*), tous les nœuds sont situés sur les droites $x = 2k\pi r$ (k est un nombre entier), et cela de sorte que chacune de ces droites présente un seul nœud: la droite $x = 0$ le point A_1 (fig. 498, *b*), la droite $x = 2\pi r$ le point B_1, etc.

On peut trouver ces points en résolvant l'équation

$$\varphi - \lambda \sin \varphi = 0, \tag{2}$$

qui dans le cas considéré $\lambda < \lambda_0$ possède une racine positive unique φ_1; cette dernière appartient à l'intervalle $(0, \pi)$. Les valeurs $\varphi = \varphi_1$ et $\varphi = -\varphi_1$ correspondent au point A_1 sur l'arche ADB $(0 < \varphi < 2\pi)$ et sur l'arche voisine $(-2\pi < \varphi < 0)$ (**).

EXEMPLE 1. Soit $d = 1{,}43r$, comme sur la fig. 498,*b*. Résolvant l'équation

$$\varphi - 1{,}43 \sin \varphi = 0 \tag{2a}$$

(par la méthode des §§ 288, 289), nous trouvons la valeur $\varphi_1 = 81°$ correspondant au point A_1 (sur l'arche ADB). Nous trouvons l'ordonnée y_1 du point A_1 de la seconde équation (1):

$$y_1 = OA_1 = r(1 - 1{,}43 \cos \varphi_1) \approx 0{,}78r.$$

Les nœuds de cette cycloïde sont:

$$(2\pi kr; \quad 0{,}78r).$$

Supposons maintenant que le rapport λ soit compris dans l'intervalle

$$\lambda_0 < \lambda \leqslant \lambda_1,$$

où $\lambda_1 = 7{,}78968\ldots$(***); dans ce cas, outre les nœuds considérés plus haut, apparaissent des nœuds sur les droites $x = (2k + 1)\pi r$ (un couple de points par droite): les points P_1, P_2 (fig. 500) sur la droite $x = \pi r$, les points Q_1, Q_2 sur la droite $x = -\pi r$, les points R_1, R_2 sur la droite $x = 3\pi r$, etc. On peut trouver ces points en résolvant l'équation

$$\varphi - \lambda \sin \varphi = \pi, \tag{3}$$

(*) Ce nombre irrationnel est égal à $\sec \alpha_0$, où α_0 est la plus petite racine positive de l'équation $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 0$.

(**) A la racine zéro de l'équation (2) correspond le point de départ A, qui n'est pas un nœud.

(***) Ce nombre irrationnel est égal à $\sec \alpha_1$, où α_1 est la plus petite racine positive de l'équation $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = \pi$.

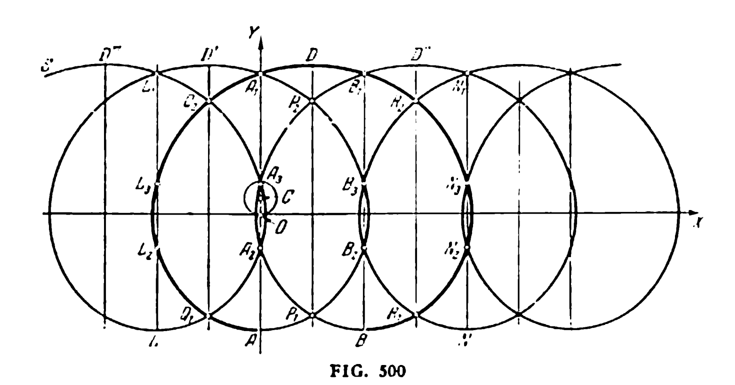


FIG. 500

qui dans le cas considéré possède deux racines positives φ_1, φ_2. Les deux racines sont comprises dans l'intervalle $(2\pi, 3\pi)$ et correspondent aux points P_1, P_2 sur l'arche $BD''N$, qui coupe ici l'arche $LD'A$ (*) séparée de $BD''N$ par l'arche ADB.

Dans le cas où λ est compris dans l'intervalle

$$\lambda_1 < \lambda \leqslant \lambda_2,$$

où $\lambda_2 = 14{,}102\ldots$, (**), la cycloïde acquiert de nouveaux nœuds sur les droites $x = 2k\pi r$ (un couple de points par droite): les points A_2, A_3 (cf. fig. 500) sur la droite $x = 0$, les points B_2, B_3 sur la droite $x = 2\pi r$, les points L_1, L_2 sur la droite $x = -2\pi r$, etc. On peut trouver ces points en résolvant l'équation (2) qui dans le cas considéré possède non pas une racine positive comme dans l'exemple 1, mais trois. La plus petite racine φ_1 appartient à l'intervalle $(0, \pi)$ et correspond au nœud A_1 (fig. 500) situé à l'intersection des arches voisines ADB et $LD'A$. Deux autres racines φ_2, φ_3 appartiennent à l'intervalle $(2\pi, 3\pi)$ et correspondent aux points A_2, A_3 situés à l'intersection des arches $BD''N$ et $LD''S$ séparées par les arches $LD'A$ et ADB.

Avec la croissance du rapport λ la cycloïde acquiert de nouveaux couples de nœuds: d'abord un couple de points sur les droites $x = (2k+1)\pi r$ (en ces points se coupent deux arches séparées par trois arches intermédiaires), ensuite un couple de points sur les droites $x = 2k\pi r$ (en

---

(*) Si $\lambda = \lambda_1$, les points P_1 et P_2 coïncident, de sorte que les arches $BD''N$ et $LD'A$ sont tangentes.

(**) Le nombre λ_2 est égal à $\sec \alpha_2$, où α_2 est la seconde (dans l'ordre des modules croissants) racine positive de l'équation $\operatorname{tg} \alpha - \alpha = 0$.

ces points se coupent deux arches séparées par quatre arches intermédiaires), etc., alternativement.

EXEMPLE 2. Soit $\lambda = 8$, comme sur la fig. 500. Comme cette valeur de λ appartient à l'intervalle (λ_1, λ_2), la cycloïde allongée considérée possède trois nœuds sur chacune des droites $x = 2k\pi r$ et deux sur chacune des droites $x = (2k + 1)\pi r$.

Nous trouvons les nœuds A_1, A_2, A_3 sur la droite $x = 0$ à partir de l'équation

$$\varphi - 8 \sin \varphi = 0. \tag{2b}$$

Ses racines sont

$$\varphi_1 = 159°40'; \quad \varphi_2 = 360° + 69°30'; \quad \varphi_3 = 360° + 95°54'.$$

Nous trouvons les ordonnées des points A_1, A_2, A_3 de la seconde équation (1):

$$y_1 = OA_1 = r(1 - 8 \cos \varphi_1) \approx 8{,}50r$$

et d'une manière analogue

$$y_2 = OA_2 \approx 1{,}80r; \quad y_3 = OA_3 \approx 1{,}83r.$$

Nous trouvons les nœuds P_1, P_2 sur la droite $x = \pi$ de l'équation

$$\varphi - 8 \sin \varphi = \pi. \tag{3a}$$

Ses racines sont

$$\varphi_1' = 360° + 26°49'; \quad \varphi_2' = 360° + 136°21'.$$

Les ordonnées des points P_1, P_2 sont

$$y_1' = OP_1 \approx -6{,}14r; \quad y_2' = OP_2 \approx 6{,}79r.$$

Chaque arche de notre cycloïde présente 10 nœuds (l'arche ADB les points Q_1, L_2, L_3, Q_2, A_1 et leurs symétriques R_1, N_2, N_2, R_2, B_1).

La cycloïde raccourcie et la cycloïde ordinaire ne possèdent pas de nœuds.

6. POINTS DE REBROUSSEMENT. Au fur et à mesure que le point M extérieur au cercle générateur se rapproche de la circonférence, la cycloïde allongée décrite par M (fig. 498,*b*) tend à coïncider avec la cycloïde ordinaire (fig. 498,*c*). La boucle comportant le nœud A_1 se réduit au point O qui devient un ***point de rebroussement*** de la cycloïde ordinaire: quand on passe de l'arche $(-2\pi, 0)$ à l'arche $(0, 2\pi)$, la direction du mouvement du point M est inversée. Les points de rebroussement sont tous les points $\varphi = 2k\pi$ de la cycloïde ordinaire et seulement eux. Les cycloïdes allongées et raccourcies ne possèdent pas de points de rebroussement.

7. POINTS D'INFLEXION. Chaque arche de la cycloïde raccourcie présente deux points d'inflexion (L_1 et L_2 sur la fig. 498, *a*): les valeurs correspondantes du paramètre φ sont déterminées de l'équation

$$\cos \varphi = \frac{d}{r}.$$

Pour la cycloïde représentée sur la fig. 498,*a*, où $d = 0{,}6r$, nous avons $\cos\varphi = 0{,}6$. Au point L_1 correspond la valeur $\varphi_1' \approx 52°25'$, au point L_2 la valeur $\varphi_2' \approx 127°35'$. Les coordonnées x_1, y_1 du point L_1 sont

$$x_1 = r\varphi - d\sin\varphi = r(\varphi - 0{,}6\sin\varphi) \approx 0{,}43r,$$

$$y_1 = r - d\cos\varphi = r(1 - 0{,}6\cos\varphi) \approx 0{,}63r.$$

Les coordonnées du point L_2 sont:

$$x_2 = 2\pi - x_1 \approx 5{,}85r; \qquad y_2 = y_1 \approx 0{,}63r.$$

8. Propriétés de la normale et de la tangente. La normale MN (fig. 498,*a-c*) à n'importe quelle cycloïde passe par le point de contact E' du cercle générateur et de la droite fixe. La tangente MT (fig. 498,*c*) à la cycloïde ordinaire passe par le point H diamétralement opposé au point de contact E'.

Il en découle le procédé de construction de la tangente.

9. Rayon de courbure. Pour n'importe quelle cycloïde on a

$$R = \frac{(r^2 + d^2 - 2dr\cos\varphi)^{3/2}}{d\,|d - r\cos\varphi|}. \tag{4}$$

En particulier, pour la cycloïde ordinaire

$$R = 2r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi} = 4r\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| = 2\sqrt{2ry} = 2ME' \tag{4a}$$

(fig. 498,*c*), autrement dit, le *rayon de courbure de la cycloïde ordinaire est égal au double de la portion de normale comprise entre la cycloïde et la directrice*. En d'autres termes, pour construire le centre de courbure il suffit de prolonger la corde ME' au-delà du point E' sur une distance égale à la longueur de cette corde.

10. Développée et développante de la cycloïde ordinaire. La développée de la cycloïde ordinaire (le lieu géométrique des centres de courbure) est une cycloïde égale à la première et placée comme l'indique la fig. 384.

En d'autres termes la développante de la cycloïde C_4BD (cf. fig. 384), dont le point de départ est le sommet B de cette cycloïde, est une cycloïde M_2BN égale à la première mais située comme l'indique la fig. 384.

11. Cycloïde et sinusoïde. Le lieu géométrique des pieds des perpendiculaires abaissées du point M de la cycloïde sur le diamètre du cercle générateur passant par le point de contact de ce dernier et de la droite fixe est une sinusoïde de longueur d'onde $2\pi r$ et d'amplitude d. L'axe de cette sinusoïde coïncide avec la ligne des centres de la cycloïde.

12. Cycloïde projection de l'hélice. notations: h pas de l'hélice; a son rayon; α pente; β angle compris entre l'axe de l'hélice et le plan des projections; σ pente des rayons effectuant la projection par rapport au plan des projections.

La projection OBLIQUE de l'hélice sur un plan perpendiculaire à l'axe est une cycloïde. Si $\sigma > \alpha$, cette cycloïde est allongée; si $\sigma < \alpha$, elle est raccourcie; si $\sigma = \alpha$, c'est une cycloïde ordinaire. La projection rectangulaire de l'hélice sur ce même plan est évidemment une circonférence.

La projection *rectangulaire* de l'hélice sur un plan non perpendiculaire à l'axe et non parallèle à ce dernier est une « cycloïde comprimée » (fig. 501, *a*-*c*), c'est-à-dire une courbe engendrée par la cycloïde qu'on comprime uniformément (§ 40) vers une droite quelconque perpendiculaire à la ligne des centres de la cycloïde.

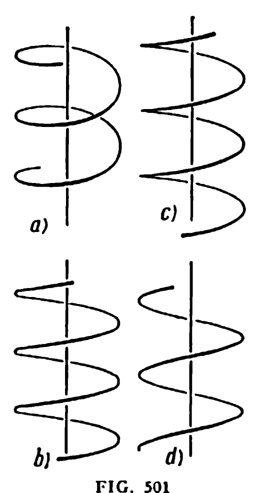
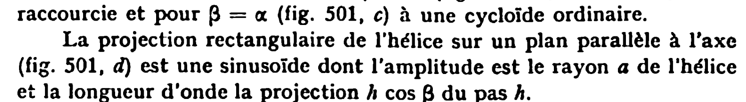


FIG. 501

Le coefficient de compression $k = \sin\beta$; les grandeurs r et d caractérisant la cycloïde (avant sa compression) s'expriment ainsi:

$$r = \frac{h}{2\pi}\operatorname{cotg}\beta\ (= a\operatorname{tg}\alpha\operatorname{cotg}\beta);\qquad d = a. \qquad (5)$$

Il en découle que pour $\beta > \alpha$ la projection de l'hélice (fig. 501, *a*) s'apparente à une cycloïde allongée; pour $\beta < \alpha$ (fig. 501, *b*) à une cycloïde raccourcie et pour $\beta = \alpha$ (fig. 501, *c*) à une cycloïde ordinaire.



La projection rectangulaire de l'hélice sur un plan parallèle à l'axe (fig. 501, *d*) est une sinusoïde dont l'amplitude est le rayon a de l'hélice et la longueur d'onde la projection $h\cos\beta$ du pas h.

13. La LONGUEUR DE L'ARC s de la cycloïde compris entre les points $\varphi = 0$ et $\varphi = \varphi_1$ est:

$$s = \int_0^{\varphi_1}\sqrt{r^2 + d^2 - 2rd\cos\varphi}\,d\varphi. \qquad (6)$$

La longueur de cet arc est égale à celle de l'arc de l'ellipse

$$x = 2(d + r)\cos\frac{\varphi}{2},\qquad y = 2(d - r)\sin\frac{\varphi}{2} \qquad (7)$$

compris entre les points correspondant aux mêmes valeurs du paramètre φ.

L'intégrale (6) ne s'exprime pas dans le cas général à l'aide des fonctions élémentaires de la variable φ. Nous avons toutefois pour

la cycloïde ordinaire [l'ellipse (7) dégénère en un segment de longueur $8r$]

$$s = 2r\int_0^{\varphi_1}\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi = 4r\left(1-\cos\frac{\varphi_1}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\varphi_1}{4} \quad (\varphi_1 \leqslant 2\pi). \tag{8}$$

En particulier la *longueur de l'arche de la cycloïde ordinaire est quatre fois le diamètre du cercle générateur*:

$$s = 4\cdot 2r. \tag{8a}$$

14. Équation intrinsèque de la cycloïde ordinaire (dans les limites d'une seule arche)

$$R^2 + (s-4r)^2 = (4r)^2 \quad (0 < s < 2\pi r). \tag{9}$$

Elle s'obtient en éliminant φ entre (8) et (4a). Les arcs sont comptés à partir du point de départ de la cycloïde. Si l'on prend le sommet comme origine des arcs, l'équation intrinsèque est

$$R^2 + s^2 = (4r)^2 \quad (-4r \leqslant s \leqslant 4r). \tag{9a}$$

15. Propriété cinématique de la cycloïde ordinaire. L'équation (9) exprime dans le langage cinématique la propriété suivante: si la cycloïde ordinaire roule (sans glisser) sur la droite AB, le centre de courbure du point de contact parcourt une circonférence. Le rayon de cette dernière est quatre fois le rayon du cercle générateur et son centre est situé au point de la droite AB par lequel passe le sommet de la cycloïde.

16. Aires et volumes. L'aire S_1 balayée par l'ordonnée quand φ varie de $\varphi = 0$ à $\varphi = \varphi_1$ est:

$$2S_1 = (2r^2 + d^2)\,\varphi - 4dr\sin\varphi + \frac{d^2\sin 2\varphi}{2}. \tag{10}$$

L'« aire totale » S (pour $\varphi_1 = 2\pi$) est:

$$S = 2\pi r^2 + \pi d^2. \tag{11}$$

Pour les cycloïdes ordinaire et raccourcie c'est l'aire $OADBO_1$ (fig. 498, *a*, *c*); pour la cycloïde allongée c'est l'aire que l'on obtient en enlevant le rectangle $OABO_1$ à la figure AA_1DB_1B (fig. 498, *b*).

Pour la cycloïde ordinaire ($d = r$)

$$S = 3\pi r^2, \tag{12}$$

autrement dit, l'aire limitée par une arche de la cycloïde et sa base est trois fois celle du cercle générateur [Roberval (1634), Torricelli (1643)].

L'aire F_1 engendrée par une cycloïde ordinaire tournant autour de sa base AB est:

$$F_1 = \frac{64}{3}\pi r^2 = \frac{64}{9}S, \tag{13}$$

où S est l'aire de la boucle de la cycloïde.

Le volume de révolution V_1 correspondant est

$$V_1 = 5\pi^2 r^3 = \frac{5}{8} V, \tag{14}$$

où V est le volume du cylindre circonscrit.

L'aire F_2 engendrée par une cycloïde ordinaire tournant autour de sa hauteur DF est:

$$F_2 = 8\pi \left(\pi - \frac{4}{3}\right) r^2. \tag{15}$$

Le volume de révolution V_2 correspondant est:

$$V_2 = \pi r^3 \left(\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{8}{3}\right) = \frac{3}{4} V' - 2V'', \tag{16}$$

où V' est le volume du cylindre circonscrit, V'' le volume de la sphère inscrite.

17. TAUTOCHRONISME. Un point matériel se déplaçant sous l'action de la force de pesanteur suivant un arc de la cycloïde ordinaire ADB (fig. 502) dont la concavité est tournée vers le haut atteint sa position inférieure D pendant l'intervalle de temps

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} \tag{17}$$

(r est le rayon du cercle générateur, g l'accélération de la pesanteur). Cet intervalle ne dépend pas de la position initiale du point (Huyghens, 1673).

C'est pourquoi la période d'oscillation T du pendule cycloïdal ($T = 4t$) ne dépend pas de son amplitude (le pendule circulaire ne possède pratiquement cette propriété que pour les petites oscillations). Le fil du pendule cycloïdal construit par Huyghens est fixé au point de départ K d'une autre cycloïde AKB qui est la développée de la cycloïde ADB (cf. 10).

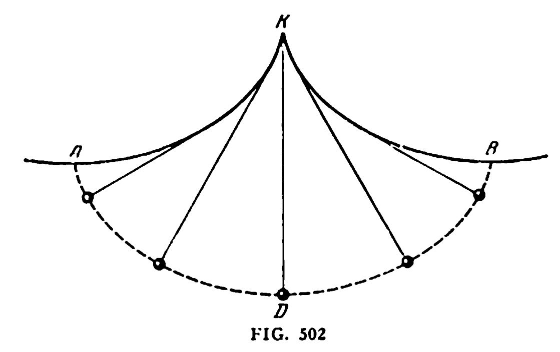


FIG. 502

18. Cycloïde en tant que brachistochrone (*). La brachistochrone d'un point se déplaçant sous l'action de la force de pesanteur (dans un milieu dont la résistance peut être négligée) d'un point donné A vers un point B situé plus bas (mais non sur la même verticale que A) est une cycloïde ordinaire. Elle tourne sa concavité vers le haut; le point A est son point de départ. La grandeur du cercle générateur est déterminée de la condition que la cycloïde passe par le point B.

Le temps le plus court possible pour passer d'un point à un autre est déterminé par la formule

$$t = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\varphi_B, \tag{18}$$

où φ_B est l'angle de rotation du cercle générateur correspondant au point B.

Exemple. Le point B est situé 0,83 m plus bas que le point A et en est distant de 1,54 m suivant l'horizontale. Trouver le temps le plus court pour aller de A à B.

Solution. Soit A l'origine des coordonnées. Orientons l'axe OX verticalement vers le bas et prenons pour plan XOY le plan vertical passant par A et B. Orientons l'axe OY de sorte que le point B ait une abscisse positive. Adoptons en qualité d'unité 1 m. Les coordonnées de B sont alors

$$x_1 = 1{,}54; \qquad y_1 = 0{,}83. \tag{19}$$

La cycloïde permettant d'aller le plus vite de A à B est représentée par les équations

$$x = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y = r(1 - \cos\varphi). \tag{20}$$

On peut trouver de la condition (19) le rayon r du cercle générateur et la valeur $\varphi = \varphi_B$ correspondant au point B.

Pour cela, éliminant r entre les équations, (20), résolvons l'équation

$$1{,}54\,(1 - \cos\varphi) = 0{,}83\,(\varphi - \sin\varphi)$$

par la méthode des §§ 288-289. Nous obtenons

$$\varphi \approx 195^\circ \ (\approx 3{,}40 \text{ radians}).$$

Nous trouvons maintenant de la seconde équation (20)

$$r \approx 0{,}42 \text{ (m)}.$$

Enfin, en vertu de la formule (18) en posant $g = 9{,}8$ (m/s^2), nous trouvons

$$t = \sqrt{\frac{0{,}42}{9{,}8}} \cdot 3{,}40 \approx 0{,}70 \text{ (s)}.$$

(*) La brachistochrone (du gr. *brakhus*, le plus court, et *khronos*, temps) est la courbe suivant laquelle un point passe le plus rapidement d'une position à une autre. Le terme a été introduit par Jean Bernoulli qui a posé le problème de recherche de cette courbe. En 1696, Jean et Jacques Bernoulli publièrent la solution du problème.

La descente de A à B suivant un plan incliné aurait duré 0,87 s, soit près de 25% plus longtemps.

19. Historique. Dans l'histoire des mathématiques supérieures la cycloïde a joué un rôle particulièrement important. Plusieurs de ses propriétés trouvées géométriquement ont confirmé la justesse des nouvelles méthodes analytiques, certaines autres n'ont pu être découvertes qu'à l'aide de ces nouvelles méthodes.

En 1590, Galilée étudiant la trajectoire du point d'un cercle roulant sans glisser construisit la cycloïde (on lui doit également ce terme même). Il essaya de déterminer l'aire limitée par l'arche de cycloïde et sa base. Ne disposant pas de moyens nécessaires pour la résolution théorique de ce problème, il voulut trouver le rapport de l'aire de la cycloïde à celle du cercle générateur par la méthode des pesées. Il pensait d'abord que ce rapport était égal à 3, puis remarqua que l'expérience donnait toujours un nombre inférieur à 3. Comme la différence était insignifiante, il semblait impossible d'exprimer le rapport cherché à l'aide de petits entiers et Galilée parvint à la conclusion que ce nombre était irrationnel.

Après la mort de Galilée, ses élèves Torricelli et Viviani entreprirent l'étude mathématique de la cycloïde. En appliquant des considérations cinématiques, Viviani découvrit la propriété de la tangente (5); Torricelli recourut aux artifices anticipant sur le calcul intégral pour déterminer l'aire de la cycloïde 14. Indépendamment de Torricelli et certainement avant lui, Roberval calcula lui aussi l'aire de la cycloïde. La méthode de Roberval est remarquable par sa finesse et sa simplicité (elle était basée sur la propriété 11 (*)).

Par la même méthode Roberval trouva les volumes engendrés par la cycloïde tournant autour de la base et de la hauteur. Le savant considéra non seulement une cycloïde ordinaire, mais aussi des cycloïdes

---

(*) Il est clair, à partir de considérations de symétrie, que la sinusoïde AQD (fig. 503) dont il s'agit dans la propriété 11 divise le rectangle $AFDK$ construit sur la demi-base de la cycloïde et sur sa hauteur en deux parties égales. Il en découle, à partir de considérations élémentaires, que l'aire de la figure $AFDQ$ formée par la hauteur, la demi-base et la sinusoïde est égale à celle du cercle générateur. Pour obtenir l'aire de la demi-cycloïde il faut ajouter l'aire de la « pétale » $AQDP$ comprise entre la demi-arche de cycloïde et la sinusoïde. Roberval démontre que l'aire de cette pétale est égale à la moitié de celle du cercle générateur. La démonstration consiste à appliquer le principe de Cavalieri (le demi-cercle est borné par un diamètre vertical, les sections sont réalisées parallèlement à la base)

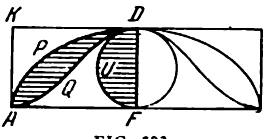


FIG 503

raccourcie et allongée et donna une méthode de construction des tangentes.

Aussi remarquables qu'elles aient été, ces découvertes se rapportaient aux problèmes qui étaient résolus depuis longtemps pour d'autres figures. D'autre part, toutes les tentatives de réaliser la rectification exacte des arcs curvilignes restèrent sans succès. La cycloïde fut la première courbe que l'on put rectifier. Cela fut réalisé par Wren dont le travail fut publié en 1658. Ce problème fut bientôt résolu par d'autres savants, dont Fermat, qui rectifia de plus pour la première fois une courbe algébrique (la parabole semi-cubique).

L'étude exhaustive des propriétés géométriques de la cycloïde fut réalisée par Pascal qui publia ses solutions en 1659.

Dans les quarante années suivantes les savants de premier ordre tels que Huyghens, Newton, Leibniz et les frères Bernoulli étudièrent les applications mécaniques de la cycloïde (cf. **15** et **16**). Le problème généralisé de la brachistochrone (18) constitua l'une des sources principales du calcul des variations créé au XVIII[e] siècle par les œuvres de Lagrange et d'Euler.

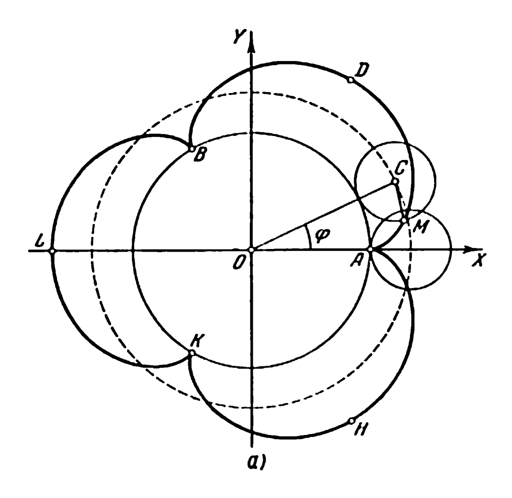
§ 515. Epicycloïdes et hypocycloïdes

1. Définition. Un point M marqué sur un cercle mobile C de rayon r (cercle générateur) qui roule sans glisser sur un cercle fixe de rayon R (directrice) décrit une courbe L. L est appelée *épicycloïde* (fig. 504,*a*) quand le contact est extérieur et *hypocycloïde* (fig. 504,*b*) quand le contact est intérieur.

L'épicycloïde et l'hypocycloïde de la fig. 504 sont décrites par le point M de la circonférence du cercle générateur. De telles épicycloïdes et hypocycloïdes sont dites *ordinaires* à la différence de leurs homologues raccourcies ou allongées. L'épicycloïde (fig. 505,*a*) et l'hypocycloïde (fig. 505,*b*) sont dites *raccourcies*, quand le point M est intérieur au cercle générateur, c'est-à-dire quand $d < r$ ($d = CM$ est la distance du point M au centre C du cercle générateur) et *allongées* (fig. 506, *a* et *b*) quand M est extérieur au cercle générateur, c'est-à-dire quand $d > r$.

On appelle point de départ de l'épicycloïde ou de l'hypocycloïde (A sur les fig. 504-506) un point qui est situé sur la droite (C_1E_1) reliant le centre (C_1) du cercle générateur avec le point de contact (E_1) et se trouve du même côté du centre C_1 que E_1. Les points A', B, B' sur la fig. 505, *a* et *b* sont aussi des points de départ.

Les points de départ des épicycloïdes et hypocycloïdes ordinaires (A, B, K sur les fig. 504, *a* et *b*) sont situés sur la directrice et coïncident avec les points de contact correspondants.



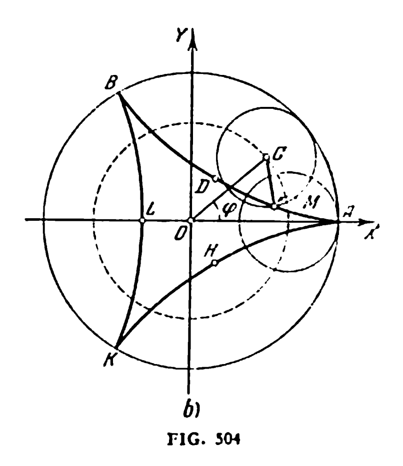
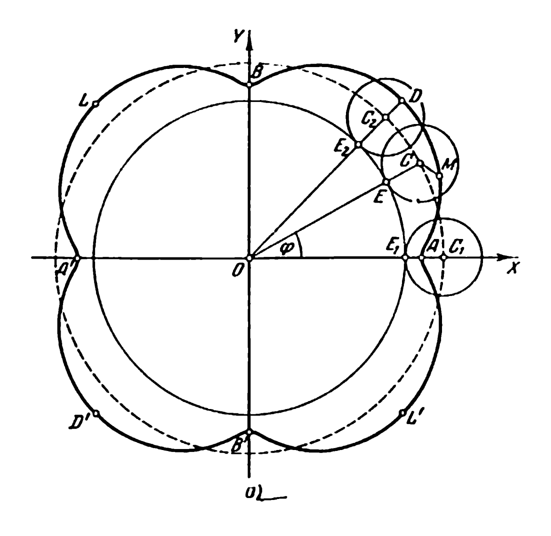


FIG. 504



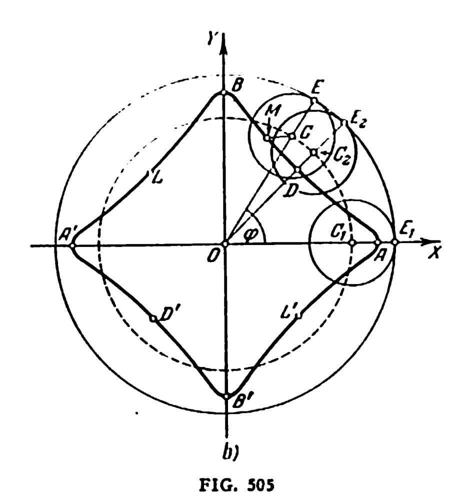


FIG. 505

On appelle sommet de l'épicycloïde ou de l'hypocycloïde (D sur les fig. 505, *a* et *b*) un point qui est situé sur la droite C_2E_2 reliant le centre C_2 du cercle générateur avec le point de contact E_2, mais se trouve sur le prolongement du segment C_2E_2 au-delà du point C_2.

Les points D', L, L' sur les fig. 505, *a* et *b* sont aussi des sommets.

La circonférence décrite par le centre du cercle générateur est appelée la *ligne des centres* de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde). Le rayon OC de la ligne des centres est égal à

$$OC = OE + EC = R + r \qquad \text{pour l'épicycloïde,}$$

$$OC = |OE - EC| = |R - r| \qquad \text{pour l'hypocycloïde.}$$

2. Génération. Etant donnés R (rayon de la directrice), r (rayon du cercle générateur) et d (distance du point M décrivant l'épicycloïde ou l'hypocycloïde au centre C du cercle générateur), traçons deux circonférences $O(R)$ et $C_0(r)$ (en ponctué sur la fig. 506, *a* et *b*) dont le point de contact V est extérieur pour l'épicycloïde (fig. 506 *a*) et intérieur pour l'hypocycloïde (fig. 506,*b*).

De C_0 comme centre menons une circonférence de rayon d et désignons par M_0 celui de ses points d'intersection avec la droite OC_0 qui est situé sur le prolongement du segment C_0V au-delà du point C_0. Le point M_0 est l'un des sommets de la courbe cherchée.

Divisons la circonférence $C_0(d)$ en un nombre pair $2n$ d'arcs égaux (nous avons pris $2n = 16$) de sorte que le point M_0 soit l'un des points de division. Marquons les cotes 0, ± 1, ± 2, ..., $\pm n$ (0 correspond au point M_0, n et $-n$ à un même point). Convenons, pour fixer les idées, que le sens de croissance des cotes est celui du parcours de la circonférence C_0 dans le sens des aiguilles d'une montre.

De O comme centre traçons ensuite une circonférence de rayon OC_0, la ligne des centres de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde) cherchée, et portons du point C_0 l'arc C_0C_n dont la valeur en degrés est déterminée de la proportion

$$\overset{\frown}{C_0C_n} : 180° = r : R \tag{1}$$

et qui est orienté dans le sens des aiguilles d'une montre si l'on construit une épicycloïde et dans le sens opposé si l'on construit une hypocycloïde. A partir de ce même point C_0 portons l'arc C_0C_{-n} symétrique de C_0C_n[*]. Sur les fig. 506, *a* et *b*, où $r : R = 1 : 4$, les arcs C_0C_8 et C_0C_{-8} comportent 90° chacun et peuvent être exactement construits à l'aide de la règle et du compas. En d'autres cas une telle construction peut s'avérer difficile ou même impossible. On effectue alors une construction approchée avec le degré de précision désiré.

---

[*] Si $r > R$, les arcs C_0C_n et C_0C_{-n} se recouvrent, et si $r > 2R$, chacun des arcs C_0C_n, C_0C_{-n} se recouvre de plus lui-même.

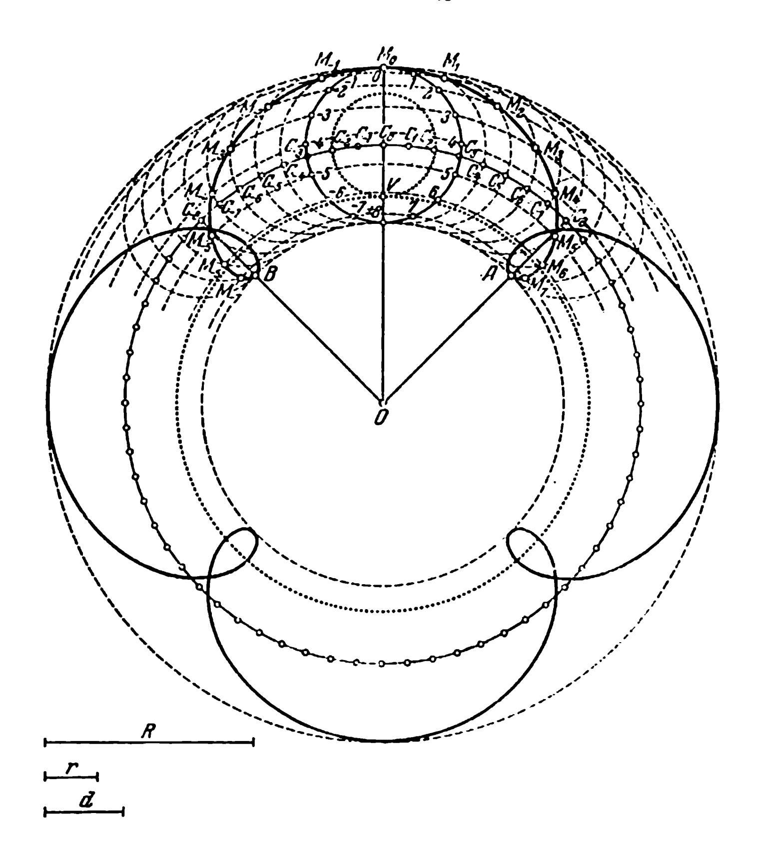


FIG. 506 *a*

Divisons chacun des arcs C_0C_n, C_0C_{-n} en n parties égales et désignons les points de division par $C_{\pm 1}$, $C_{\pm 2}$, ..., $C_{\pm n}$ à partir du point C_0.

Traçons maintenant du point O comme centre plusieurs circonférences concentriques passant successivement par le point M_c de cote 0, par deux points de cote ± 1, par deux points de cote ± 2, etc. La

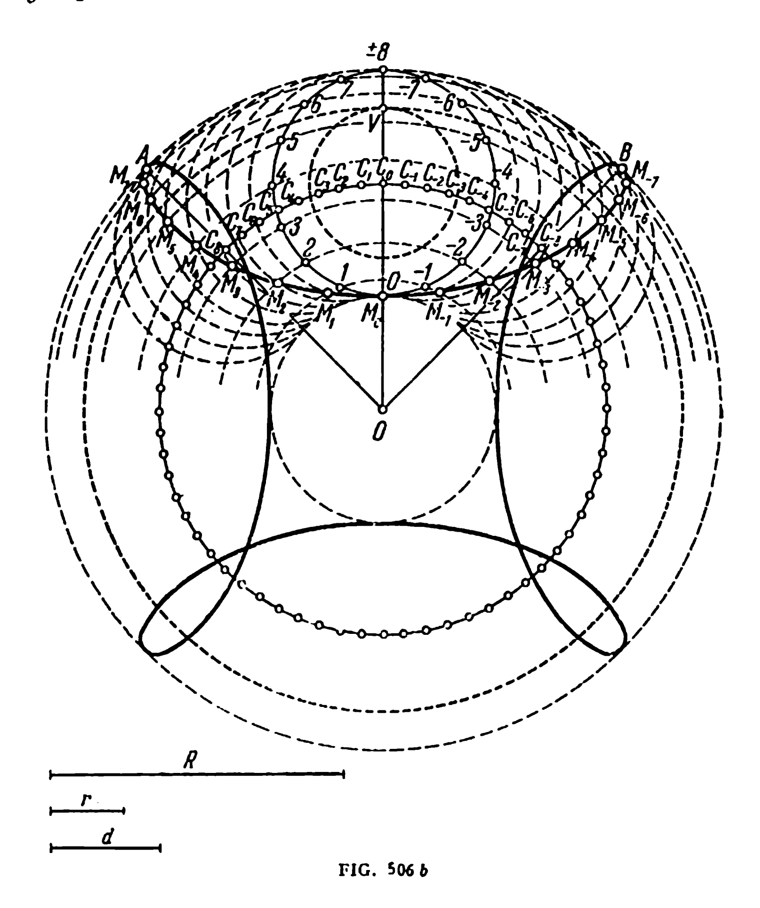


FIG. 506 *b*

première de ces circonférences présente tous les sommets et la dernière tous les points de départ.

Des points C_1, C_2, ..., C_n comme centres menons des demi-circonférences de rayon d telles que leurs extrémités soient situées sur la première et la dernière circonférence concentrique et que l'on puisse

les faire coïncider par une rotation autour du point O avec la demi-circonférence portant les cotes 1, 2, 3, ... On mène ensuite de la même manière des centres C_{-1}, C_{-2}, C_{-3}, ... des demi-circonférences qui par une rotation autour du point O viennent coïncider avec la demi-circonférence de cotes -1, -2, -3, ...

Marquons les points, M_1, M_{-1} où les demi-circonférences $C_1(d)$, $C_{-1}(d)$ rencontrent celle des circonférences concentriques qui passe par les points ± 1 ; marquons ensuite les points M_2, M_{-2} où les demi-circonférences C_2, C_{-2} rencontrent la circonférence passant par les points ± 2, etc. Tous les points $M_{\pm 1}$, $M_{\pm 2}$, $M_{\pm 3}$, ... sont situés sur la courbe cherchée et les points M_8, M_{-8} coïncident avec les points de départ A, B (on aurait pu obtenir préalablement ces derniers en menant les droites OC_n, OC_{-n}).

On construit ainsi par points une branche de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde). Pour construire les branches voisines il suffit de prolonger la suite de points C, comme l'indiquent les fig. 506, *a* et *b*. On doit alors renuméroter ces points. Par contre, il est inutile de tracer de nouveau C_0, car elle ne sert que pour construire les circonférences concentriques qui restent inchangées.

3. ÉQUATIONS PARAMÉTRIQUES (l'origine des coordonnées O coïncide avec le centre de la directrice ; l'axe OX est orienté vers l'un des points de départ, φ est l'angle de rotation du rayon OC à partir de sa position initiale (*)).

Pour l'épicycloïde

$$\left.\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\varphi - d\cos\frac{R+r}{r}\varphi, \\ y &= (R+r)\sin\varphi - d\sin\frac{R+r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2a)$$

Pour l'hypocycloïde

$$\left.\begin{aligned} x &= (R-r)\cos\varphi + d\cos\frac{R-r}{r}\varphi, \\ y &= (R-r)\sin\varphi - d\sin\frac{R-r}{r}\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (2b)$$

(*) Cet angle est égal à $\widehat{XOC}$ pour toutes les épicycloïdes et pour les hypocycloïdes dont le rayon du cercle générateur est inférieur au rayon de la directrice ($r < R$). Si, par contre, $r > R$, alors $\varphi = \widehat{XOC} + \pi$. Remarquons qu'il n'existe pas d'hypocycloïde pour laquelle $r = R$, car dans ce cas le cercle générateur ne peut rouler sans glisser intérieurement sur la directrice.

Les équations (2b) s'obtiennent de (2a) en remplaçant r par $-r$ et d par $-d$ (*).

4. Particularités de la forme Toute épicycloïde est tracée dans la couronne circulaire déterminée par les circonférences de rayons $R+r+d$ et $|R+r-d|$. Sur la première sont situés les sommets et sur la seconde les points de départ de l'épicycloïde. Ainsi, les sommets de l'épicycloïde sont toujours plus loin du centre que les points de départ, comme cela apparaît des fig. 504,*a*, 505,*a* et 506,*a*.

Toute hypocycloïde est tracée dans la couronne circulaire déterminée par les circonférences de rayons $|R-r-d|$ et $|R-r+d|$. Sur la première sont situés les sommets et sur la seconde les points de départ de l'hypocycloïde. Ainsi, dans le cas où $R > r$, les sommets de l'hypocycloïde sont plus proches du centre que les points de départ, comme cela apparaît sur les fig. 504,*b*, 505,*b* et 506,*b*. Le contraire a lieu quand $R < r$. Les hypocycloïdes de ce second type sont appelées *péricycloïdes*. Nous ne donnons pas les figures représentant ces courbes, car toute péricycloïde est identique à une certaine épicycloïde et n'en diffère que par la génération. Nous reviendrons la-dessus (cf. 7).

Par une rotation d'un angle multiple de $\frac{2\pi r}{R}$ autour du centre O, l'épicycloïde (l'hypocycloïde) coïncide avec elle-même. Ainsi, la courbe de la fig. 504,*a*, où $R = 3r$, vient coïncider avec elle-même par une rotation d'un angle $\pm\frac{2\pi}{3}$, $\pm\frac{4\pi}{3}$, $\pm 2\pi$, etc., autour de O. Il en est de même pour la fig. 504,*b*. Sur les fig. 505,*a*, *b* et 506,*a*, *b*, où $R = 4r$, les courbes viennent coïncider par une rotation d'un angle multiple de $\frac{\pi}{2}$.

Les points de départ de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde) ordinaire sont des points de rebroussement (cf. fig. 504,*a* et *b*).

Si le rapport $R : r$ est un entier m, alors l'épicycloïde (ordinaire, allongée ou raccourcie) est une courbe algébrique fermée d'ordre $2(m+1)$ et l'hypocycloïde une courbe algébrique fermée d'ordre $2(m-1)$. Ainsi, l'épicycloïde de la fig. 504,*a* (où $R : r = 3 : 1$) est une courbe du 8ième ordre et l'hypocycloïde de la fig. 504,*b* (ici $R : r = 3 : 1$) une courbe du 4ième ordre. L'épicycloïde, ainsi que l'hypocycloïde, est formée de m branches égales.

(*) Pour le choix adopté de la direction de l'axe OX et du paramètre φ l'équation (2b) est valable également pour les hypocycloïdes pour lesquelles $r > R$ (de telles hypocycloïdes sont appelées *péricycloïdes*). Si, comme cela arrive souvent, on prend pour paramètre φ l'angle XOC, les équations paramétriques de la péricycloïde sont différentes des équations des autres hypocycloïdes.

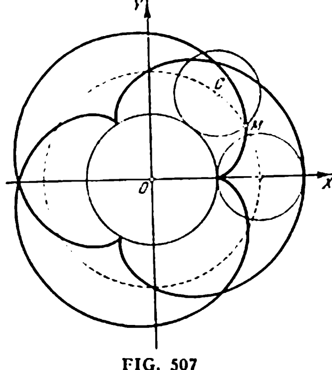


FIG. 507

Si le rapport $R : r$ est une fraction qui sous sa forme irréductible est de la forme $\frac{p}{q}$ ($q \neq 1$), alors l'épicycloïde (l'hypocycloïde) est aussi une courbe algébrique [d'ordre $2|p \pm q|$] et se compose de p branches égales. Ainsi, l'épicycloïde de la fig. 507 ($R : r = 3 : 2$) est une courbe du $10^{\text{ième}}$ ordre et se compose de trois branches égales.

Si le rapport $R : r$ est un nombre irrationnel, alors l'épicycloïde (l'hypocycloïde) n'est pas une courbe fermée, elle possède un nombre infini de branches qui se coupent.

5. Formes particulières.

1) Quand $R : r = 2 : 1$, les hypocycloïdes tant allongées que raccourcies représentent des ellipses de centre au point O. Les demi-axes des ellipses sont $a = r + d$; $b = |r - d|$; les extrémités du grand axe sont les points de départ, les extrémités du petit axe sont les sommets de l'hypocycloïde. Cette génération de l'ellipse est à la base du mécanisme de l'instrument servant à dessiner les ellipses.

1a) Si pour des valeurs constantes de R et r liées par la relation $R:r = 2:1$, la différence $r - d$ tend vers zéro, alors le petit axe de l'ellipse diminue indéfiniment et le grand axe tend à coïncider avec le diamètre de la circonférence immobile. L'hypocycloïde ordinaire que l'on obtient dans le cas limite ($d = r$) représente un segment de droite, précisément celui des diamètres de la circonférence immobile qui relie les points de départ. Lorsque le cercle générateur effectue le tour complet, ce diamètre est décrit dans un sens, et il est décrit dans le sens opposé lors du tour suivant. Ainsi, dans ce cas limite également les points de départ de l'hypocycloïde ordinaire sont des points de rebroussement.

2) Quand $R = r$, chacune des épicycloïdes représente un limaçon de Pascal (§ 508); en particulier, l'épicycloïde ordinaire du type considéré n'est autre qu'une cardioïde.

3) Quand $R : r = 4 : 1$, l'hypocycloïde ordinaire représente une *astroïde* (fig. 508), une courbe telle que la portion EF de tangente comprise entre deux droites orthogonales (passant par deux couples de points de départ opposés) a une même longueur R. L'équation de l'as-

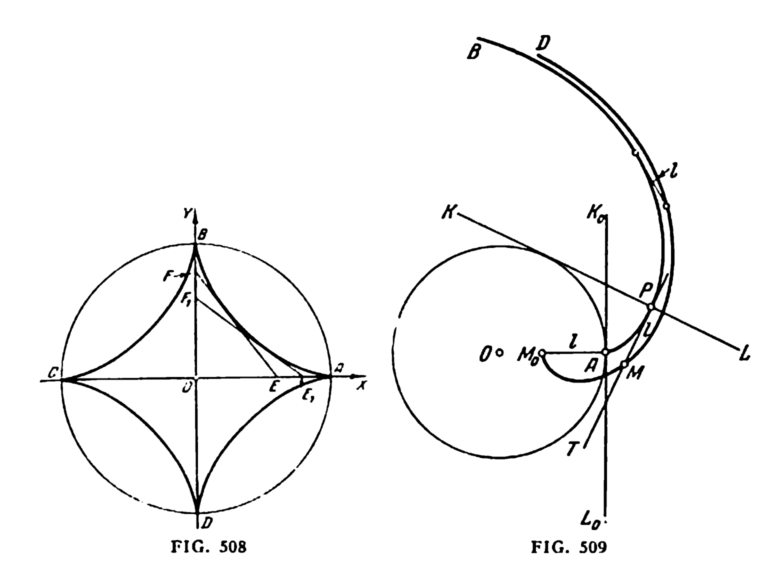


FIG. 508 FIG. 509

troïde dans le système de coordonnées rectangulaires représenté sur a fig. 508 est

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3},$$

ou, sous forme paramétrique,

$$x = R\cos^3 u, \qquad y = R\sin^3 u.$$

6. Cas limites.

Cas 1. Pour un rayon infini de la circonférence immobile et un rayon donné du cercle générateur, l'épicycloïde (l'hypocycloïde) se transforme en cycloïde (§ 514, 1) dont le cercle générateur est de même rayon.

Cas 2. Pour un rayon infini du cercle générateur ce dernier se transforme en droite (KL sur la fig. 509) qui roule sans glisser sur la circonférence immobile O; l'épicycloïde (l'hypocycloïde) devient alors la courbe décrite par le point M invariablement lié à la droite KL.

Si le point M se trouve sur la droite KL elle-même (comme le point P sur la fig. 509), alors la courbe décrite (AB sur la fig. 509) est la développante de la circonférence immobile (§ 512, 1 et 2).

Si le point lié à la droite KL est situé du même côté que la directrice (comme le point M sur la fig. 509), alors la projection P de ce

point décrit la développante AB et le point M lui-même une *développante raccourcie* de circonférence. Cette courbe est le lieu géométrique de l'extrémité du segment PM de longueur donnée l porté sur la tangente PT à la développante AB ; le sens du segment PM coïncide alors avec le sens des arcs AP décroissants.

Si, par contre, le point lié à la droite KL est situé de l'autre côté de cette droite, il décrit une *développante allongée*. Cette courbe est construite de façon analogue avec cette seule différence que le segment de longueur donné est porté sur la tangente PT dans le sens des arcs AP croissants.

7. DOUBLE GÉNÉRATION DE L'HYPOCYCLOÏDE ET DE L'ÉPICYCLOÏDE. L'hypocycloïde ordinaire obtenue à l'aide du cercle générateur de rayon r qui roule sans glisser sur la circonférence de rayon R est identique à l'« hypocycloïde » obtenue à l'aide du cercle générateur de rayon

$$r_1 = R - r, \tag{3}$$

qui roule sans glisser sur cette même circonférence de rayon R.

Nous avons mis le mot « hypocycloïde » entre guillemets, car dans le cas où $r > R$ on obtient une épicycloïde dont le rayon du cercle générateur est $r - R$.

EXEMPLE 1. L'astroïde inscrite dans un cercle de rayon R, que l'on obtient (5) en faisant rouler un cercle de rayon $\frac{1}{4} R$ sur une circonférence de rayon R peut être obtenue de la même façon que l'hypocycloïde pour laquelle $R_1 = R$, $r_1 = R - \frac{1}{4} R = \frac{3}{4} R$.

EXEMPLE 2. L'hypocycloïde ordinaire que l'on obtient en faisant rouler un cercle de rayon $r = 4$ m sur une circonférence de rayon $R = 2$ m est identique à l'« hypocycloïde » obtenue en faisant rouler un cercle de rayon $r_1 = 2$ m $- 4$ m $= -2$ m sur une circonférence de rayon $R_1 = 2$ *m*, autrement dit à une épicycloïde pour laquelle $R_1 = 2$ m, $r_1 = 2$ m. Cette épicycloïde est une cardioïde (5).

Il découle de ce que nous venons de dire que toute épicycloïde ordinaire (R, r) est identique à l'hypocycloïde (*) $(R, R + r)$. Ainsi, l'épicycloïde ordinaire de la fig. 504, *a* $\left(r = \frac{1}{3} R\right)$ peut être obtenue comme une hypocycloïde correspondant aux valeurs $R_1 = R$, $r_1 = \frac{4}{3} R$.

(*) Appartenant au type des péricycloïdes; cf. 4.

La double génération peut être également appliquée à l'hypocycloïde (l'épicycloïde) de la forme générale: l'hypocycloïde correspondant aux valeurs données de R, r, d peut être obtenue de même que l'« hypocycloïde » (R_1, r_1, d_1), où R_1, r_1, d_1 s'expriment en fonction de R, r, d à l'aide des formules:

$$R_1 = \frac{d}{r} R, \quad r_1 = \frac{d}{r}(R - r), \quad d_1 = R - r. \tag{4}$$

Dans le cas où $R < r$ (*) la courbe (R_1, r_1, d_1) est une épicycloïde pour laquelle $R_1 = \frac{d}{r} R$, $r_1 = \frac{d}{r}(r - R)$, $d_1 = r - R$.

Par contre, toute épicycloïde (R, r, d) est identique à l'hypocycloïde

$$R_1 = \frac{d}{r} R, \quad r_1 = \frac{d}{r}(R + r), \quad d_1 = R + r \tag{4a}$$

appartenant au type des péricycloïdes.

Remarque. L'hypocycloïde (l'épicycloïde) qui pour un mode de génération était allongée s'avère raccourcie pour l'autre (et inversement).

Exemple 3. L'hypocycloïde allongée $\left(R, \frac{1}{4} R, \frac{3}{8} R\right)$ construite sur la fig. 506,*b* peut être obtenue comme une hypocycloïde (raccourcie) (R_1, r_1, d_1), où

$$R_1 = \frac{3}{2} R, \quad r_1 = \frac{9}{8} R, \quad d_1 = \frac{3}{4} R$$

(en vertu des formules (4)).

Exemple 4. L'épicycloïde allongée $\left(R, \frac{1}{4} R, \frac{3}{8} R\right)$ construite sur la fig. 506,*a* peut être obtenue comme une hypocycloïde (raccourcie) (R_1, r_1, d_1), où (en vertu des formules (4a))

$$R_1 = \frac{3}{2} \bar{R}, \quad r_1 = \frac{15}{8} R, \quad d_1 = \frac{5}{4} R.$$

8. Propriété de la normale et de la tangente. La normale menée par le point M de n'importe quelle épicycloïde (hypocycloïde) passe par le point de contact correspondant E du cercle générateur et de la directrice. La tangente à l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire passe par le point E' du cercle générateur diamétralement opposé au point E (cf. § 514, 8).

Le procédé de construction de la tangente en découle immédiatement.

(*) Autrement dit, quand l'hypocycloïde initiale est une péricycloïde.

9. Le rayon de courbure $\bar{R}$ de toute épicycloïde est:

$$\bar{R} = (R + r)\frac{\left(r^2 + d^2 - 2dr\cos\frac{R\varphi}{r}\right)^{3/2}}{\left|r^2 + d^2(R + r) - dr(R + 2r)\cos\frac{R\varphi}{r}\right|}. \tag{5}$$

La formule correspondante pour l'hypocycloïde s'obtient de (5) en remplaçant r par $-r$ et d par $-d$.

Pour l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire nous obtenons

$$\bar{R} = \frac{4r\,|R \pm r|}{|R \pm 2r|}\sin\frac{R\varphi}{2r}, \tag{5a}$$

où le signe plus correspond à l'épicycloïde et le signe moins à l'hypocycloïde.

La formule (5a) peut s'écrire ainsi:

$$\bar{R} = 2l\left|\frac{R \pm r}{R \pm 2r}\right|. \tag{5b}$$

Ici l est la corde ME du cercle générateur reliant le point M de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde) avec le point de contact correspondant E. La formule (5b) donne un procédé simple de construction du centre de courbure.

Aux points de départ de l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire $\bar{R} = 0$.

Aux sommets

$$\bar{R} = \frac{4r\,|R \pm r|}{|R \pm 2r|}.$$

10. Développée. La développée de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde) ordinaire (c'est-à-dire le lieu géométrique de ses centres de courbure) est une courbe semblable à la courbe initiale. Le rapport de similitude pour l'épicycloïde est $R : (R + 2r)$ et pour l'hypocycloïde $R : (R - 2r)$. La développée possède le même centre que l'épicycloïde (l'hypocycloïde) initiale. Les sommets de la développée coïncident avec les points de départ de la courbe initiale (cf. § 514, 10), de sorte que l'on peut obtenir l'une de ces courbes à partir de l'autre par une rotation d'un angle de $\pi \cdot \frac{r}{R}$ suivie d'une variation proportionnelle des distances au centre.

Exemple. La développée de l'astroïde $ABCD$ (fig. 508), c'est-à-dire de l'hypocycloïde pour laquelle $R = 4r$, est aussi une astroïde que l'on obtient de la première par une rotation d'un angle de 45° autour du centre et par une variation proportionnelle des distances au centre dans le rapport $R : (R - 2r) = 4 : 2 = 2 : 1$. Les points de départ A, B, C, D sont les sommets de la développée.

11. La LONGUEUR s DE L'ARC de l'épicycloïde compris entre les points $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_1$ est:

$$s = \frac{R+r}{r} \int_0^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + d^2 - 2rd \cos \frac{R\varphi}{2r}}\, d\varphi. \tag{6}$$

La longueur de cet arc est égale à celle de l'arc de l'ellipse

$$x = 2(d+r)\frac{R+r}{r}\cos\frac{R\varphi}{2r}, \qquad y = 2(d-r)\frac{R+r}{r}\sin\frac{R\varphi}{2r}$$

compris entre les points correspondant aux mêmes valeurs du paramètre φ.

L'intégrale (6) ne s'exprime pas dans le cas général à l'aide des fonctions élémentaires de la variable φ_1. Or, pour une épicycloïde ordinaire (l'ellipse dégénère en segment de longueur $8r$) nous avons

$$s = \frac{8r(R+r)}{R}\sin^2\frac{R\varphi_1}{4r}. \tag{8}$$

En particulier, l'arc compris entre deux points de départ voisins est

$$8r\left(1+\frac{r}{R}\right). \tag{9}$$

Tout ce que nous avons dit reste vrai pour l'hypocycloïde si l'on remplace d, r respectivement par $-d$, $-r$.

12. ÉQUATION INTRINSÈQUE de l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire:

$$\frac{\bar{R}^2}{a^2} + \frac{(s-b)^2}{b^2} = 1 \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2b), \tag{10}$$

où $a = \dfrac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r}$, $b = \dfrac{4r(R \pm r)}{R}$, $\bar{R}$ est le rayon de courbure, s la longueur de l'arc comptée à partir de l'un des points de départ. Dans les expressions pour a, b les signes supérieurs se rapportent au cas de l'épicycloïde, les signes inférieurs au cas de l'hypocycloïde. L'équation (10) s'obtient en éliminant le paramètre φ entre (8) et (5a).

Si l'on prend pour origine des arcs l'un des sommets, l'équation intrinsèque sera

$$\frac{\bar{R}^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1 \qquad (-b \leqslant s \leqslant b). \tag{10a}$$

Cf. § 514, 13.

13. PROPRIÉTÉ CINÉMATIQUE. L'équation (10) ou (10a) exprime dans le langage de la cinématique la propriété suivante: si l'arc d'une épicycloïde (d'une hypocycloïde) ordinaire roule sans glisser sur la

droite AB, alors le centre de courbure du point de contact décrit une ellipse; le centre de cette dernière coïncide avec le point de la droite AB par lequel passe le sommet de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde); l'un des demi-axes coïncide avec la droite AB et est égal en longueur à la demi-branche de l'épicycloïde (de l'hypocycloïde) $\left|\frac{4r(R \pm r)}{R}\right|$, l'autre demi-axe est le rayon de courbure au sommet et est égal à $\left|\frac{4r(R \pm r)}{R \pm 2r}\right|$. Cf. § 514, 14.

14. L'AIRE SECTORIELLE S balayée par le rayon vecteur OM, dont l'extrémité coïncide dans sa position initiale avec le point de départ de l'épicycloïde s'exprime par la formule

$$S = \frac{R+r}{2}\left\{\left(R + r + \frac{d^2}{r}\right)\varphi - \frac{d(R+2r)}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\}. \qquad (11)$$

En particulier, pour l'épicycloïde ordinaire nous avons

$$S = \frac{(R+r)(R+2r)}{2}\left\{\varphi - \frac{r}{R}\sin\frac{R\varphi}{r}\right\} \qquad (12)$$

(NEWTON).

Dans le cas de l'hypocycloïde on doit remplacer dans les formules (11) et (12) r par $-r$.

Dans les formules (11) et (12) l'aire est considérée comme une grandeur orientée, c'est-à-dire que l'on convient que dans les intervalles de variation du paramètre φ où le rayon vecteur tourne dans le sens négatif il balaye une aire négative.

L'aire S_1 du secteur balayé par le rayon vecteur OM de l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire, quand M parcourt une branche, s'exprime par la formule

$$S_1 = \frac{\pi r(R \pm r)(R \pm 2r)}{R}, \qquad (13)$$

où l'on prend les signes supérieurs pour l'épicycloïde et les signes inférieurs pour l'hypocycloïde.

L'aire S_2 du secteur correspondant du cercle immobile est alors

$$S_2 = \pi R r. \qquad (14)$$

C'est pourquoi l'aire $\overline{S}$ de la figure limitée par une branche de l'épicycloïde (l'hypocycloïde) ordinaire et l'arc correspondant de la circonférence immobile s'exprime par la formule

$$S = |S_1 - S_2| = \pi r^2\left|3 \pm 2\frac{r}{R}\right|. \qquad (15)$$

EXEMPLE. Considérons l'hypocycloïde ordinaire pour laquelle $r : R = 1 : 4$, c'est-à-dire l'astroïde $ABCD$ (fig. 508). Nous trouvons en vertu de la formule (15):

$$\bar{S} = \pi r^2 \left| 3 - 2 \cdot \frac{1}{4} \right| = \frac{5}{2} \pi r^2 = \frac{5}{32} \pi R^2. \qquad (15a)$$

C'est l'aire limitée par une branche de l'astroïde, par exemple, la branche AB_1 et l'arc correspondant $\widehat{AB}$ de la circonférence immobile $O(\widehat{AB} = 90°)$.

On peut aussi considérer la même astroïde comme une hypocycloïde pour laquelle $r : R = 3 : 4$ (7). Nous trouvons alors en appliquant la formule (15):

$$\bar{S} = \pi r^2 \left| 3 - 2 \cdot \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{2} \pi r^2 = \frac{27}{32} \pi R^2. \qquad (15b)$$

Ce résultat peut sembler aberrant. Toutefois, il faut tenir compte du fait que maintenant, pour la branche AB de l'astroïde, l'arc correspondant n'est pas $\widehat{AB}$ contenant 90°, mais l'autre arc ($\widehat{BCDA}$) contenant 270°, de sorte que la formule (15b) exprime l'aire qui avec l'aire (15a) remplit tout le cercle O. En effet, en ajoutant (15a) et (15b) nous obtenons

$$\frac{27}{32} \pi R^2 + \frac{5}{32} \pi R^2 = \pi R^2.$$

15. HISTORIQUE. Pour expliquer les mouvements rétrogrades des planètes les astronomes de la Grèce antique suivaient Hipparque et leur conféraient un mouvement uniforme suivant une circonférence *(épicycle)* dont le centre se déplace uniformément sur une autre circonférence *(déférent)*. La courbe décrite par le point dans ces conditions est une épicycloïde. Nous ne savons toutefois pas quelles propriétés géométriques de cette courbe étaient connues des savants de l'Antiquité. Au milieu du XIIIe siècle Nassir Eddin Tusi établit que le point d'une circonférence roulant intérieurement sur une circonférence immobile de rayon deux fois plus grand décrit le diamètre de la circonférence immobile (5). Cette propriété fut découverte indépendamment de Nassir Eddin par Nicolas Copernic qui la consigna dans son célèbre ouvrage « Des révolutions des orbites célestes » publié en 1543. Le théorème de Nassir Eddin-Copernic est largement utilisé en mécanique appliquée.

L'étude systématique de l'épicycloïde et de l'hypocycloïde débuta en 1525 avec les ouvrages théoriques d'Albrecht Dürer qui appliqua largement les méthodes géométriques dans la peinture. Toutefois, les recherches de Dürer restèrent inconnues des mathématiciens.

Au milieu du XVII[e] siècle, Desargues, chez lequel la profondeur des idées mathématiques s'accompagnait d'un réel talent de constructeur étudia les propriétés de l'épicycloïde en relation avec le problème des engrenages à frottement minimal. Les résultats de ces recherches de Desargues ainsi que de nombreuses autres de ce savant ne furent connus que de ses amis.

La Hire poursuivant les recherches de Desargues publia en 1675 un traité des épicycloïdes. Il y établissait de nombreuses propriétés importantes de ces courbes, en particulier les propriétés 7, 8, 10, 14 et 15.

Dans ses « Principes mathématiques de la philosophie naturelle » (1687) Newton généralisa les recherches de Huyghens sur le pendule cycloïdal (§ 514, 17) et établit que dans un champ d'attraction sphérique la courbe d'oscillations isochrones du pendule est l'épicycloïde.

Généralisation naturelle des cycloïdes, les épicycloïdes et les hypocycloïdes n'ont cessé par la suite d'éveiller l'attention des chercheurs dont Leibniz, Euler et Daniel Bernoulli.

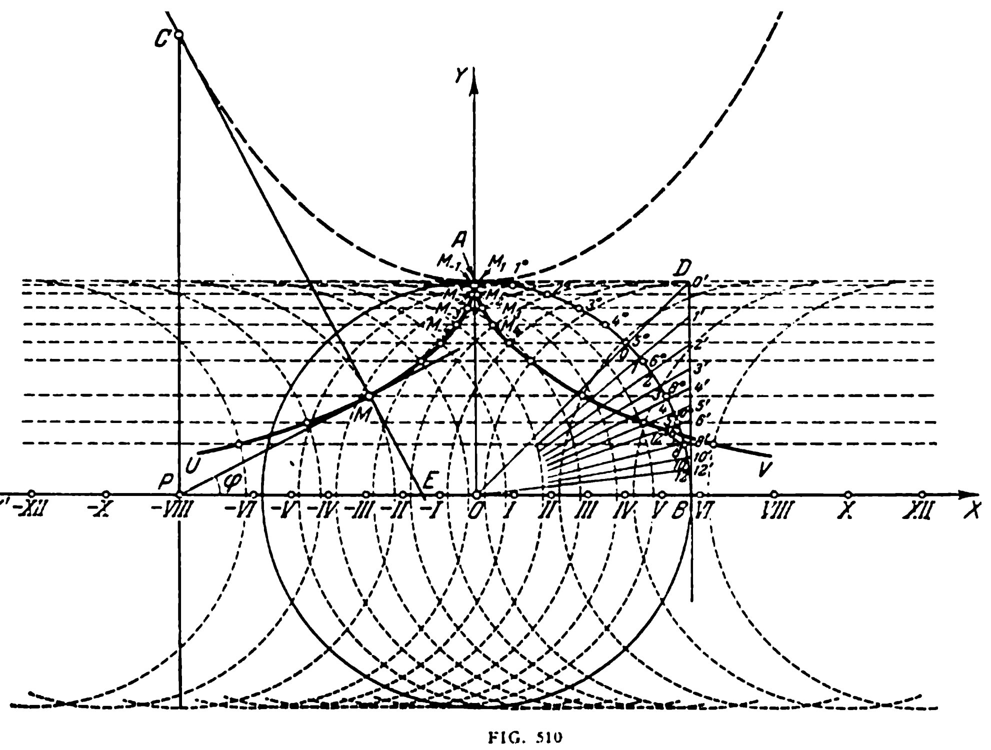
§ 516. Tractrice

1. Historique. En 1693 Claude Perrault proposa le problème suivant: l'extrémité d'un fil inextensible est fixée à un point matériel M situé dans le plan horizontal et l'autre extrémité se déplace suivant une droite $X'X$ située dans ce même plan. Quelle courbe décrit le point matériel entraîné par le fil tendu?

Ce problème fut résolu par Leibniz qui établit l'équation différentielle de la courbe cherchée en se basant sur le fait que la portion de sa tangente comprise entre le point de contact M et la droite fixe $X'X$ doit avoir une longueur constante (égale à la longueur du fil). Indépendamment de Leibniz le problème fut résolu simultanément par Huyghens qui appela la courbe cherchée *tractoria* (*). On l'appelle aujourd'hui *tractrice* ou *tractoire* (**).

2. Définition. On appelle *tractrice* (fig. 510) le lieu géométrique des points tels que la portion MP de tangente comprise entre le point de contact M et la droite donnée $X'X$ (directrice) a une longueur donnée a. Le point A le plus éloigné de la directrice est appelé le *sommet* de la tractrice et la perpendiculaire AO abaissée du sommet sur la directrice sa *hauteur*.

(*) Du lat. *trahere*, tirer.
(**) Voir également la fin de ce paragraphe.



C
Y
A
D
M
U
V
P
E
O
B
X'
X
φ
-XII
-X
-VIII
-VI
-V
-IV
-III
-II
-I
I
II
III
IV
V
VI
VIII
X
XII

FIG. 510

3. Équations paramétriques (l'axe des abscisses est la directrice de la tractrice, l'axe des ordonnées est orienté suivant la hauteur dans le sens du sommet A):

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi + a\ln \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \\ y &= a\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

où $\varphi = \widehat{XPM}$ est l'angle formé par le rayon PM et la direction positive de l'axe des abscisses $(0 < \varphi < \pi)$.

4. Particularités de la forme. La tractrice est symétrique par rapport à la hauteur AO (cette dernière est égale à la longueur donnée a). La droite AO est tangente à la tractrice au point A, qui est un point de rebroussement de la tractrice. La tractrice est située d'un seul côté de la directrice et s'éloigne à l'infini des deux côtés du sommet. La directrice est l'asymptote de la tractrice.

5. Génération. Pour construire la tractrice d'après la hauteur a, menons la droite $X'X$ (la directrice); d'un point arbitraire O de cette droite comme centre traçons une circonférence de rayon a. Son intersection avec le rayon $OY \perp X'X$ donne le point A, le sommet de la tractrice. Menons par le point A et aussi par l'un des points où la circonférence O coupe $X'X$, par exemple par B, les tangentes AD, BD à la circonférence; D est leur point de rencontre. Portons sur le segment $BD = a$ une suite de points $1'$, $2'$, $3'$, ... de sorte que les segments BD, $B1'$, $B2'$, $B3'$, ... forment une progression géométrique

$$BD : B1' = B1' : B2' = B2' : B3' = \ldots = q.$$

La raison q de la progression peut être choisie arbitrairement. Pour éviter l'accumulation des erreurs il est commode de procéder ainsi: divisons le segment BD en deux parties égales par le point $4'$, le segment $B4'$ par le point $8'$, etc.; affectant pour unifier le point D du numéro $0'$ nous aurons la suite de segments $B0'$, $B4'$, $B8'$, $B16'$,..., formant une progression de raison $\frac{1}{2}$. Construisons maintenant entre les points $0'$, $4'$ les points intermédiaires $1'$, $2'$, $3'$ (*) dans l'ordre suivant: trouvons d'abord le point $2'$ de sorte que le segment $B2'$ soit la moyenne proportionnelle de $B0'$ et $B4'$. Marquons par ailleurs le point $6'$, le milieu du segment $B2'$, et le point $10'$, le milieu du segment $B6'$ (**). Nous obtenons alors la suite de segments $B0'$, $B2'$, $B4'$,

---

(*) Ayant en vue de diviser le segment $0'4'$ en quatre parties égales, nous avons affecté à l'avance son extrémité inférieure du chiffre $4'$; pour plus de précision on peut diviser ce segment en 8, en 16, etc. parties, et modifier respectivement la numération.

(**) Les numéros 2, 6, 10 forment une progression arithmétique de même raison 4 que celle de numéros 0, 4, 8, 12, ...

$B6'$, $B8'$, $B10'$, ... qui constituent une progression géométrique de raison $1 : 2^{1/2}$.

Construisons ensuite le point $1'$ de façon que le segment $B1'$ soit la moyenne proportionnelle de $B0'$ et $B2'$, puis marquons le point $5'$, le milieu du segment $B1'$, le point $9'$, le milieu du segment $B5'$, etc. Nous construisons de même le point $3'$ (l'extrémité du segment $B3'$, la moyenne proportionnelle de $B2'$ et $B4'$), puis nous marquons le point $7'$ (le milieu de $B3'$), le point $11'$ (le milieu de $B7'$), etc. (*).

Nous obtenons ainsi une suite de segments $B0'$, $B1'$, $B2'$, ..., $B12'$, ... formant une progression de raison $1 : 2^{1/4}$.

Procédant de même nous pouvons construire une progression de segments de raison $1 : 2^{1/8}$, $1 : 2^{1/16}$, etc.

Portons maintenant sur la directrice $X'X$ de part et d'autre du point O une suite de segments égaux

$$OI = I\ II = II\ III = III\ IV = \ldots = d.$$

La valeur théoriquement exacte de d est déterminée de la proportion

$$d : a = \ln (a : B1'). \tag{2}$$

Toutefois, si le rapport $a : B1'$ est proche de 1, il suffit pratiquement de prendre

$$d = 0'1' \text{ (**)}. \tag{2a}$$

La construction se poursuit de la façon suivante: nous joignons les points $1'$, $2'$, $3'$, ... avec le centre O et à l'intersection des rayons $O1'$, $O2'$, $O3'$, ... avec la circonférence marquons les points 1, 2, 3 ... (sur la fig. 510 ces numéros sont à l'intérieur de la circonférence; pour unifier les notations le point d'intersection de la circonférence avec le rayon OD est affecté du numéro 0).

Portons sur l'arc BA à partir du point B les arcs $B1° = 2 \cdot B1$, $B2° = 2 \cdot B2$, etc. Par les extrémités 1°, 2°, 3°, ... des arcs doubles (les

---

(*) Les points $7'$, $9'$, $11'$ ne sont pas montrés sur la fig. 510 pour ne pas alourdir la construction. Par ailleurs, il n'est pas nécessaire de marquer les points qui tombent à l'intérieur des segments trop petits déjà construits. De toute façon ces points ne contribuent pas à la précision de la construction.

(**) Dans notre cas, quand $a: B1' = 2^{1/4}$, la proportion (2) donne

$$d = a \ln (2^{1/4}) = \frac{1}{4} a \ln 2 \approx 0{,}173a,$$

alors qu'en posant $d = 0'1'$ nous obtenons

$$d = 0'1' = B0' - B1' = a \left(1 - \frac{1}{2^{1/4}}\right) \approx 0{,}160a.$$

L'erreur est ainsi de 7,5%.

numéros correspondants sont sur la fig. 510 à l'extérieur de la circonférence) menons les droites parallèles à la directrice $X'X$ (*) et des points $\pm I$, $\pm II$, $\pm III$ comme centres des demi-circonférences de rayon a, comme indiqué sur la fig. 510 (les demi-circonférences I, II, III tournent leur concavité vers les numéros des centres croissants, et les demi-circonférences $-I$, $-II$, $-III$ dans le sens opposé).

Marquons enfin le couple de points où les demi-circonférences $\pm I$ coupent la droite menée par 1°, le couple de points où les demi-circonférences $\pm II$ coupent la droite menée par 2°, etc. Tous ces points deux à deux symétriques appartiennent à la courbe cherchée.

6. Tractrice en tant que trajectoire orthogonale; construction approchée. La trajectoire orthogonale d'une famille des circonférences de rayon a et de centres sur la droite donnée $X'X$ (c'est-à-dire la courbe qui coupe toutes ces circonférences sous un angle droit) est la tractrice. La famille considérée de circonférences possède un ensemble infini de trajectoires orthogonales: par chaque point de l'une des circonférences passe une tractrice orthogonale à cette circonférence. L'une des trajectoires est représentée sur la fig. 510; l'autre lui est symétrique par rapport à $X'X$. Les autres s'obtiennent par une translation de ce couple de tractrices suivant $X'X$.

Cette propriété permet de construire la tractrice avec une bonne précision de la manière suivante. Traçons des demi-circonférences de rayon a et de centres sur la droite $X'X$ et choisissons sur l'une des circonférences un point arbitraire distant d'environ $\frac{1}{3}a$ de la droite $X'X$ Menons au jugé par ce point la courbe qui coupe une suite de demi-circonférences voisines sous un angle droit, c'est-à-dire orientée chaque fois le long du rayon correspondant. On peut procéder également de la manière suivante: marquons le point d'intersection du rayon de la circonférence choisie (ou du prolongement de ce rayon) avec la demi-circonférence voisine; relions le centre de cette dernière avec le point trouvé et marquons le point d'intersection du nouveau rayon avec la demi-circonférence suivante, etc. Nous obtenons une ligne polygonale qui pour une densité suffisante de répartition des centres s'apparente pratiquement à la tractrice cherchée. La précision de la construction diminue à mesure que l'on s'approche du sommet.

7. Construction de la tangente. Pour construire la tangente en un point M donné à la tractrice de sommet A et de directrice $X'X$

(*) Pour cela le mieux est de porter sur la circonférence O à partir du point A les arcs symétriques des arcs $A1°$, $A2°$ et de relier chacun des points 1°, 2° avec le point symétrique.

il suffit d'intercepter sur $X'X$ un point P par un arc mené du centre M le rayon $AO = a$. La droite MP est la tangente cherchée.

8. Rayon de courbure

$$R = a \operatorname{cotg} \varphi. \tag{3}$$

Géométriquement, cette formule signifie (cf. fig. 510) que *le rayon de courbure de la tractrice au point M est la portion MC de normale comprise entre le point M et la perpendiculaire PC, élevée sur $X'X$ par P, son point d'intersection avec la tangente au point M.*

Le point C ainsi construit est le centre de courbure de la tractrice au point M.

Le rayon de courbure au sommet A est

$$R_A = a. \tag{3a}$$

Le rayon de courbure MC et la portion ME de normale (comprise entre le point M et la directrice) sont liés par la relation

$$MC \cdot ME = a^2, \tag{4}$$

autrement dit, *le rayon de courbure MC et la portion ME de normale sont inversement proportionnels.*

9. Développée. La développée LAN de la tractrice (fig. 510), c'est-à-dire le lieu géométrique de ses centres de courbure C, est la *chaînette* (§ 517). Dans le système de coordonnées OXY de la fig. 510 l'équation de la développée est de la forme

$$\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{5}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}. \tag{5a}$$

10. La longueur s de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ s'exprime par la formule

$$s = a \ln \operatorname{cosec} \varphi = a \ln \frac{a}{y}.$$

La différence $s - |x|$ entre la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ et la longueur de sa projection sur la directrice, quand le point M s'éloigne indéfiniment du sommet A, tend vers la limite $a(1 - \ln 2)$

$$\lim_{x \to \infty} (s - |x|) = a(1 - \ln 2) \approx 0{,}307a. \tag{6}$$

11. ÉQUATION INTRINSÈQUE

$$s = a \ln\sqrt{\frac{R^2}{a^2}+1}\,. \tag{7}$$

12. L'AIRE S de la bande infinie comprise entre la tractrice et son asymptote $X'X$ est deux fois inférieure à l'aire du cercle dont le rayon est la hauteur AO de la tractrice:

$$S = \frac{1}{2}\pi a^2. \tag{8}$$

13. La tractrice tournant autour de son asymptote $X'X$ engendre un CORPS DE RÉVOLUTION (s'étirant à l'infini le long de $X'X$) dont l'aire finie S_1 est égale à l'aire de la sphère de rayon R et le volume fini V à la moitié du volume de cette sphère:

$$S_1 = 4\pi a^2, \tag{9}$$

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3. \tag{10}$$

14. TRACTRICE ET PSEUDOSPHÈRE. La surface (fig. 511) engendrée par la rotation de la tractrice autour de son asymptote est appelée *pseudosphère*. En effet, une analogie profonde existe entre cette surface et celle de la sphère. Ainsi, si trois points B, C, D de la surface de la sphère sont reliés deux à deux par les arcs les plus courts, la somme des angles intérieurs du triangle sphérique obtenu BCD sera toujours supérieure à π et la grandeur $(B + C + D) - \pi$ est égale au rapport de l'aire S du triangle sphérique au carré du rayon a de la sphère:

$$(B + C + D) - \pi = \frac{S}{a^2}\,.$$

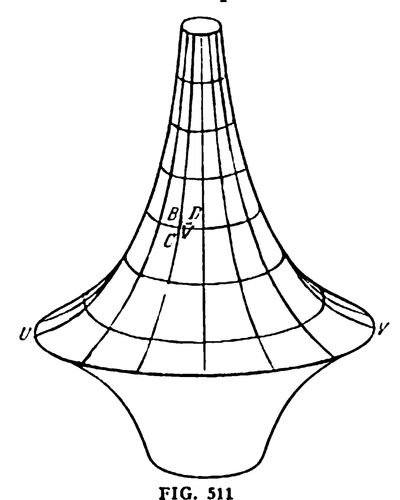


FIG. 511

Si l'on prend trois points B, C, D (fig. 511) de la pseudosphère (d'un seul côté de la parallèle UV décrite par le sommet de la tractrice) et si on les relie de même par les arcs les plus courts, la somme des angles intérieurs du triangle pseudosphérique ainsi obtenu sera toujours inférieure à π et la grandeur $\pi -$

— $(B + C + D)$ est égale au rapport de l'aire S du triangle pseudosphérique au carré du rayon a de la parallèle UV:

$$\pi - (B + C + D) = \frac{S}{a^2}. \qquad (12)$$

Chose remarquable, les triangles *rectilignes* en géométrie de Lobatchevski jouissent de la propriété 12. Et d'ailleurs, toutes les propriétés qu'une portion de surface possède en géométrie de Lobatchevski sont généralement vérifiées pour n'importe quelle portion de pseudosphère ne contenant pas de points de la parallèle UV. Cette découverte de Beltrami (1863) mit fin au scepticisme quasi universel des mathématiciens, voire les plus grands, envers la géométrie de Lobatchevski.

§ 517. Chaînette

1. Définition. On appelle *chaînette* la courbe que prend un fil homogène inextensible attaché à ses deux extrémités et qui pend sous l'action de son poids.

Remarque 1. Dans la position initiale du problème il s'agissait de la chaîne, et non du fil, d'où l'appellation « chaînette ». Remplaçant la chaîne par un fil, nous faisons abstraction de certaines circonstances (dimension des maillons, leur frottement, etc.) qui compliquent l'étude. L'intensité du champ terrestre est supposée constante en grandeur et en direction.

Remarque 2. Suivant la position des points P, Q où le fil est attaché et la longueur l du fil ($l > PQ$) l'arc PQ prend des formes différentes. Toutefois, l'étude montre qu'on peut faire coïncider l'arc PQ représenté à l'échelle adéquate et un certain arc P_0Q_0 (fig. 512) d'une courbe infinie bien déterminée LAN. C'est précisément à cette courbe infinie toute entière (et non à son arc) que se rapporte le terme « chaînette ».

Le point A le plus bas de la chaînette est appelé son *sommet*.

2. Équation. Si l'on prend comme origine des coordonnées le sommet de la chaînette (ce qui semble assez naturel) et si l'on oriente l'axe des ordonnées verticalement vers le haut, la chaînette est représentée par l'équaiton

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) - a, \qquad (1)$$

où a (le *paramètre* de la chaînette) est la longueur d'un élément du fil dont le poids est égal à la composante horizontale de la tension (cette composante est constante pour tout l'arc).

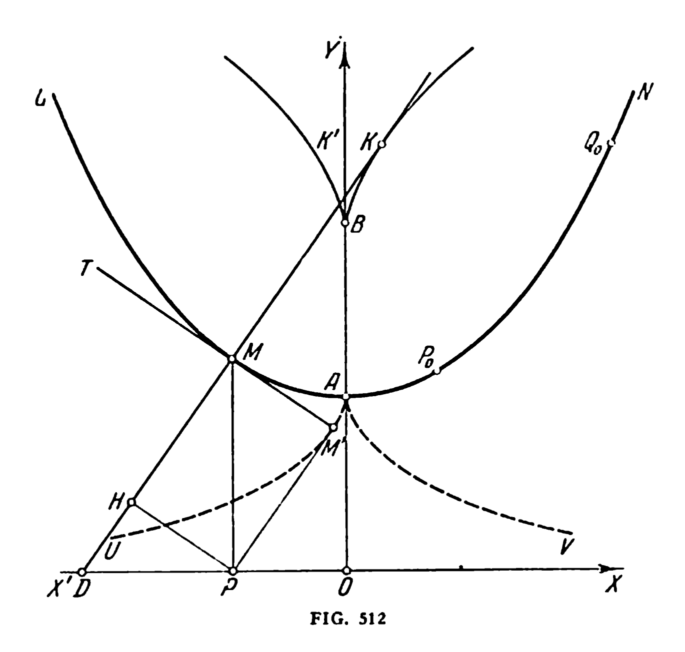


FIG. 512

Toutefois, on prend habituellement l'origine des coordonnées au point O situé plus bas que A à une distance a. L'équation de la courbe prend alors la forme plus simple

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{2}$$

ou, en utilisant les notations des fonctions hyperboliques (§ 403),

$$\frac{y}{a} = \operatorname{ch}\frac{x}{a}. \tag{2a}$$

La chaînette est ainsi la courbe représentative de la fonction ch x (si a est l'unité d'échelle).

L'axe des abscisses $X'X$, c'est-à-dire la droite parallèle à la tangente au sommet A et située plus bas que ce sommet à une distance a, est appelé *directrice* de la chaînette.

3. CHAÎNETTE ET TRACTRICE. La chaînette (LAN sur la fig. 512) est la développée de la tractrice UAV dont la hauteur est égale au paramètre a de la chaînette. La tractrice UAV est la développante de la chaînette, dont le point de départ est le sommet A de la chaînette. En d'autres termes, la longueur de la portion MM' de la tangente MT comprise entre le point de contact M et le point M' de la tractrice UAV est égale à celle de l'arc MA de la chaînette.

4. GÉNÉRATION. Pour construire la chaînette de paramètre donné a, trouvons au préalable une suite de points de la tractrice de hauteur a (§ 516, 5). Relions chaque point M' (fig. 512) avec le centre P de la demi-circonférence correspondante. La droite $M'P$ est la tangente à la tractrice. Menons maintenant la normale $M'M$ à la tractrice ($MM' \perp M'P$) qui rencontre au point M la perpendiculaire PM élevée sur $X'X$ par P. Le point M (le centre de courbure de la tractrice) appartient à la chaînette cherchée LAN.

REMARQUE. La normale $M'M$ à la tractrice est la tangente à sa développée LAN (§ 346, 1). Cette propriété facilite le tracé d'une courbe régulière reliant les divers points construits M. Elle permet par ailleurs de contrôler la précision de la construction.

5. LONGUEUR DE L'ARC. La longueur s de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ de la chaînette comptée à partir du sommet A est égale à la projection MM' de l'ordonnée PM sur la tangente MT et s'exprime par la formule

$$s = \overset{\frown}{AM} = MM' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) \tag{3}$$

ou

$$s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}. \tag{3a}$$

L'arc s est lié avec l'ordonnée $PM = y$ par la relation

$$s^2 + a^2 = y^2. \tag{4}$$

Cette dernière découle de (2) et (3) et peut être facilement établie en examinant le triangle $PM'M$, où $PM = y$, $MM' = s$ et $PM' = a$ (en vertu de la propriété principale de la tractrice).

6. PROJECTION DE L'ORDONNÉE SUR LA NORMALE. La projection MH de l'ordonnée MP de la chaînette sur la normale MD a une longueur constante a:

$$HM = OA = a. \tag{5}$$

Cette relation apparaît immédiatement de l'étude du rectangle $MM'PH$, où $MH = M'P = a$ (en vertu de la propriété principale de la tractrice).

7. Rayon de courbure. Le rayon de courbure $MK = R$ de la chaînette est égal à la portion MD de normale entre le point M et la directrice $X'X$ et s'exprime par la formule

$$R = MD = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 \tag{6}$$

ou

$$R = a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}. \tag{6a}$$

8. Construction du centre de courbure; développée de la chaînette. Pour construire le centre de courbure de la chaînette en un point donné M, prolongeons la normale MD au-delà du point M et portons le segment $MK = MD$. Le point K est le centre de courbure cherché. On construit ainsi par points la courbe $K'BK$ décrite par le centre de courbure, c'est-à-dire la développée de la chaînette. Ses équations paramétriques sont:

$$\left.\begin{aligned} x_K &= a\left[\operatorname{ch}\frac{x}{a}\operatorname{sh}\frac{x}{a} + \ln\left(\operatorname{ch}\frac{x}{a} - \operatorname{sh}\frac{x}{a}\right)\right], \\ y_K &= 2a \operatorname{ch}\frac{x}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Le point B (le centre de courbure pour le sommet A) est un point de rebroussement de la développée (7).

9. Equation intrinsèque de la chaînette:

$$R = \frac{s^2}{a} + a. \tag{8}$$

Elle s'obtient en éliminant x entre (3a) et (6a). Dans le langage de la cinématique l'équation (8) a la signification suivante: si la chaînette roule sans glisser sur une droite, le centre de courbure au point de contact décrit une parabole; l'axe de cette dernière est vertical; le sommet est au point B; le paramètre de la parabole est égal au demi-paramètre $\frac{a}{2}$ de la chaînette.

10. L'aire S du trapèze mixtiligne $OAMP$ ($OA = a$ est l'ordonnée du sommet, PM l'ordonnée de l'extrémité M de l'arc $AM = s$) est égale à l'aire du rectangle de côtés a, s, de sorte que

$$S = as = a^2 \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}. \tag{9}$$

11. Historique. Quand les points d'attache d'une chaîne sont à la même hauteur et si la chaîne n'est guère plus longue que la portée, l'arc de chaînette semble être identique à un arc de parabole. C'est ce

que l'on pensait longtemps. Les études de Galilée dans le domaine de la mécanique firent douter de la justesse de cette hypothèse, mais Galilée lui-même ne put la confirmer, ni la réfuter. En 1669, Jungius établit théoriquement et expérimentalement que la courbe de la chaîne n'est pas une parabole. Or, la science mathématique de l'époque ne disposait pas de moyens nécessaires pour en trouver la forme véritable. En élaborant les méthodes d'analyse des infiniment petits, Newton et Leibniz lui fournirent ces moyens. Le problème fut formulé en 1690 par Jacques Bernoulli et immédiatement résolu par son frère Jean Bernoulli, Huyghens et Leibniz.

Jacques Bernoulli posa également un autre problème: négligeant le poids de la voile gonflée par le vent, trouver la courbe du profil de la voile. Le savant ne put qu'établir l'équation différentielle que Jean Bernoulli arriva à résoudre. Il s'avéra que le profil cherché est la chaînette.

En 1744 Euler posa et résolut le problème suivant: on donne dans le plan une droite AB et deux points C, D (non situés sur AB). Mener par A et B une courbe telle que la surface engendrée par sa rotation autour de l'axe AB ait une aire minimale. Il s'avéra que cette courbe est la chaînette (la droite AB est sa directrice).

La surface engendrée par la rotation de la chaînette autour de sa directrice (la caténoïde (*)) possède une propriété plus générale: l'aire de sa portion quelconque est inférieure à celle de toute autre surface limitée par le même contour. Cette propriété de la caténoïde fut découverte en 1776 par Meusnier. Elle est caractéristique de toute une classe de surfaces (les surfaces *minimales* (**)). Mais parmi les surfaces de révolution, la caténoïde est la seule surface de cette classe.

L'importance de la chaînette pour la technique s'explique entre autres par le fait que le poids propre d'un arc ayant la forme d'une chaînette n'influe pas sur la flèche.

(*) Du lat. *catena*, chaîne.

(**) Meusnier indiqua une autre surface minimale, l'hélicoïde (cette dernière est formée par le mouvement hélicoïdal d'une droite horizontale coupant l'axe vertical).

Tables

I. Logarithmes népériens (*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,0	0,0000	0,0100	0,0198	0,0296	0,0392	0,0488	0,0583	0,0677	0,0770	0,0862
1,1	0,0953	0,1044	0,1133	0,1222	0,1310	0,1398	0,1484	0,1570	0,1655	0,1740
1,2	0,1823	0,1906	0,1989	0,2070	0,2151	0,2231	0,2311	0,2390	0,2469	0,2546
1,3	0,2624	0,2700	0,2776	0,2852	0,2927	0,3001	0,3075	0,3148	0,3221	0,3293
1,4	0,3365	0,3436	0,3507	0,3577	0,3646	0,3716	0,3784	0,3853	0,3920	0,3988
1,5	0,4055	0,4121	0,4187	0,4253	0,4318	0,4383	0,4447	0,4511	0,4574	0,4637
1,6	0,4700	0,4762	0,4824	0,4886	0,4947	0,5008	0,5068	0,5128	0,5188	0,5247
1,7	0,5306	0,5365	0,5423	0,5481	0,5539	0,5596	0,5653	0,5710	0,5766	0,5822
1,8	0,5878	0,5933	0,5988	0,6043	0,6098	0,6152	0,6206	0,6259	0,6313	0,6366
1,9	0,6419	0,6471	0,6523	0,6575	0,6627	0,6678	0,6729	0,6780	0,6831	0,6881
2,0	0,6931	0,6981	0,7031	0,7080	0,7129	0,7178	0,7227	0,7275	0,7324	0,7372
2,1	0,7419	0,7467	0,7514	0,7561	0,7608	0,7655	0,7701	0,7747	0,7793	0,7839
2,2	0,7885	0,7930	0,7975	0,8020	0,8065	0,8109	0,8154	0,8198	0,8242	0,8286
2,3	0,8329	0,8372	0,8416	0,8459	0,8502	0,8544	0,8587	0,8629	0,8671	0,8713
2,4	0,8755	0,8796	0,8838	0,8879	0,8920	0,8961	0,9002	0,9042	0,9083	0,9123
2,5	0,9163	0,9203	0,9243	0,9282	0,9322	0,9361	0,9400	0,9439	0,9478	0,9517
2,6	0,9555	0,9594	0,9632	0,9670	0,9708	0,9746	0,9783	0,9821	0,9858	0,9895
2,7	0,9933	0,9969	1,0006	1,0043	1,0080	1,0116	1,0152	1,0188	1,0225	1,0260
2,8	1,0296	1,0332	1,0367	1,0403	1,0438	1,0473	1,0508	1,0543	1,0578	1,0613
2,9	1,0647	1,0682	1,0716	1,0750	1,0784	1,0818	1,0852	1,0886	1,0919	1,0953
3,0	1,0986	1,1019	1,1053	1,1086	1,1119	1,1151	1,1184	1,1217	1,1249	1,1282
3,1	1,1314	1,1346	1,1378	1,1410	1,1442	1,1474	1,1506	1,1537	1,1569	1,1600
3,2	1,1632	1,1663	1,1694	1,1725	1,1756	1,1787	1,1817	1,1848	1,1878	1,1909
3,3	1,1939	1,1969	1,2000	1,2030	1,2060	1,2090	1,2119	1,2149	1,2179	1,2208
3,4	1,2238	1,2267	1,2296	1,2326	1,2355	1,2384	1,2413	1,2442	1,2470	1,2499

(*) Le logarithme népérien d'un nombre ne figurant pas parmi les arguments de la table est trouvé de la manière suivante. Supposons que l'on cherche ln 753. Nous avons: $\ln 753 = \ln (7{,}53 \cdot 10^2) = \ln 7{,}53 + 2 \ln 10$. Nous trouvons le premier terme dans la table des logarithmes népériens, le second dans la table III. Nous obtenons: $\ln 753 = 2{,}0189 + 4{,}6052 = 6{,}6241$.

Nous trouvons de même $\ln 0{,}00753 = \ln (7{,}53 \cdot 10^{-3}) = 2{,}0189 - 6{,}9078 = -4{,}8889$.

Suite

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,5	1,2528	1,2556	1,2585	1,2613	1,2641	1,2669	1,2698	1,2726	1,2754	1,2782
3,6	1,2809	1,2837	1,2865	1,2892	1,2920	1,2947	1,2975	1,3002	1,3029	1,3056
3,7	1,3083	1,3110	1,3137	1,3164	1,3191	1,3218	1,3244	1,3271	1,3297	1,3324
3,8	1,3350	1,3376	1,3403	1,3429	1,3455	1,3481	1,3507	1,3533	1,3558	1,3584
3,9	1,3610	1,3635	1,3661	1,3686	1,3712	1,3737	1,3762	1,3788	1,3813	1,3838
4,0	1,3863	1,3888	1,3913	1,3938	1,3962	1,3987	1,4012	1,4036	1,4061	1,4085
4,1	1,4110	1,4134	1,4159	1,4183	1,4207	1,4231	1,4255	1,4279	1,4303	1,4327
4,2	1,4351	1,4375	1,4398	1,4422	1,4446	1,4469	1,4493	1,4516	1,4540	1,4563
4,3	1,4586	1,4609	1,4633	1,4656	1,4679	1,4702	1,4725	1,4748	1,4770	1,4793
4,4	1,4816	1,4839	1,4861	1,4884	1,4907	1,4929	1,4951	1,4974	1,4996	1,5019
4,5	1,5041	1,5063	1,5085	1,5107	1,5129	1,5151	1,5173	1,5195	1,5217	1,5239
4,6	1,5261	1,5282	1,5304	1,5326	1,5347	1,5369	1,5390	1,5412	1,5433	1,5454
4,7	1,5476	1,5497	1,5518	1,5539	1,5560	1,5581	1,5602	1,5623	1,5644	1,5665
4,8	1,5686	1,5707	1,5728	1,5748	1,5769	1,5790	1,5810	1,5831	1,5851	1,5872
4,9	1,5892	1,5913	1,5933	1,5953	1,5974	1,5994	1,6014	1,6034	1,6054	1,6074
5,0	1,6094	1,6114	1,6134	1,6154	1,6174	1,6194	1,6214	1,6233	1,6253	1,6273
5,1	1,6292	1,6312	1,6332	1,6351	1,6371	1,6390	1,6409	1,6429	1,6448	1,6467
5,2	1,6487	1,6506	1,6525	1,6544	1,6563	1,6582	1,6601	1,6620	1,6639	1,6658
5,3	1,6677	1,6696	1,6715	1,6734	1,6752	1,6771	1,6790	1,6808	1,6827	1,6845
5,4	1,6864	1,6882	1,6901	1,6919	1,6938	1,6956	1,6974	1,6993	1,7011	1,7029
5,5	1,7047	1,7066	1,7084	1,7102	1,7120	1,7138	1,7156	1,7174	1,7192	1,7210
5,6	1,7228	1,7246	1,7263	1,7281	1,7299	1,7317	1,7334	1,7352	1,7370	1,7387
5,7	1,7405	1,7422	1,7440	1,7457	1,7475	1,7492	1,7509	1,7527	1,7544	1,7561
5,8	1,7579	1,7596	1,7613	1,7630	1,7647	1,7664	1,7681	1,7699	1,7716	1,7733
5,9	1,7750	1,7766	1,7783	1,7800	1,7817	1,7834	1,7851	1,7867	1,7884	1,7901
6,0	1,7918	1,7934	1,7951	1,7967	1,7984	1,8001	1,8017	1,8034	1,8050	1,8066
6,1	1,8083	1,8099	1,8116	1,8132	1,8148	1,8165	1,8181	1,8197	1,8213	1,8229
6,2	1,8245	1,8262	1,8278	1,8294	1,8310	1,8326	1,8342	1,8358	1,8374	1,8390
6,3	1,8405	1,8421	1,8437	1,8453	1,8469	1,8485	1,8500	1,8516	1,8532	1,8547
6,4	1,8563	1,8579	1,8594	1,8610	1,8625	1,8641	1,8656	1,8672	1,8687	1,8703
6,5	1,8718	1,8733	1,8749	1,8764	1,8779	1,8795	1,8810	1,8825	1,8840	1,8856
6,6	1,8871	1,8886	1,8901	1,8916	1,8931	1,8946	1,8961	1,8976	1,8991	1,9006
6,7	1,9021	1,9036	1,9051	1,9066	1,9081	1,9095	1,9110	1,9125	1,9140	1,9155
6,8	1,9169	1,9184	1,9199	1,9213	1,9228	1,9242	1,9257	1,9272	1,9286	1,9301
6,9	1,9315	1,9330	1,9344	1,9359	1,9373	1,9387	1,9402	1,9416	1,9430	1,9445

Suite

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,0	1,9459	1,9473	1,9488	1,9502	1,9516	1,9530	1,9544	1,9559	1,9573	1,9587
7,1	1,9601	1,9615	1,9629	1,9643	1,9657	1,9671	1,9685	1,9699	1,9713	1,9727
7,2	1,9741	1,9755	1,9769	1,9782	1,9796	1,9810	1,9824	1,9838	1,9851	1,9865
7,3	1,9879	1,9892	1,9906	1,9920	1,9933	1,9947	1,9961	1,9974	1,9988	2,0001
7,4	2,0015	2,0028	2,0042	2,0055	2,0069	2,0082	2,0096	2,0109	2,0122	2,0136
7,5	2,0149	2,0162	2,0176	2,0189	2,0202	2,0215	2,0229	2,0242	2,0255	2,0268
7,6	2,0281	2,0295	2,0308	2,0321	2,0334	2,0347	2,0360	2,0373	2,0386	2,0399
7,7	2,0412	2,0425	2,0438	2,0451	2,0464	2,0477	2,0490	2,0503	2,0516	2,0528
7,8	2,0541	2,0554	2,0567	2,0580	2,0592	2,0605	2,0618	2,0631	2,0643	2,0656
7,9	2,0669	2,0681	2,0694	2,0707	2,0719	2,0732	2,0744	2,0757	2,0769	2,0782
8,0	2,0794	2,0807	2,0819	2,0832	2,0844	2,0857	2,0869	2,0882	2,0894	2,0906
8,1	2,0919	2,0931	2,0943	2,0956	2,0968	2,0980	2,0992	2,1005	2,1017	2,1029
8,2	2,1041	2,1054	2,1066	2,1078	2,1090	2,1102	2,1114	2,1126	2,1138	2,1150
8,3	2,1163	2,1175	2,1187	2,1199	2,1211	2,1223	2,1235	2,1247	2,1258	2,1270
8,4	2,1282	2,1294	2,1306	2,1318	2,1330	2,1342	2,1353	2,1365	2,1377	2,1389
8,5	2,1401	2,1412	2,1424	2,1436	2,1448	2,1459	2,1471	2,1483	2,1494	2,1506
8,6	2,1518	2,1529	2,1541	2,1552	2,1564	2,1576	2,1587	2,1599	2,1610	2,1622
8,7	2,1633	2,1645	2,1656	2,1668	2,1679	2,1691	2,1702	2,1713	2,1725	2,1736
8,8	2,1748	2,1759	2,1770	2,1782	2,1793	2,1804	2,1815	2,1827	2,1838	2,1849
8,9	2,1861	2,1872	2,1883	2,1894	2,1905	2,1917	2,1928	2,1939	2,1950	2,1961
9,0	2,1972	2,1983	2,1994	2,2006	2,2017	2,2028	2,2039	2,2050	2,2061	2,2072
9,1	2,2083	2,2094	2,2105	2,2116	2,2127	2,2138	2,2148	2,2159	2,2170	2,2181
9,2	2,2192	2,2203	2,2214	2,2225	2,2235	2,2246	2,2257	2,2268	2,2279	2,2289
9,3	2,2300	2,2311	2,2322	2,2332	2,2343	2,2354	2,2364	2,2375	2,2386	2,2396
9,4	2,2407	2,2418	2,2428	2,2439	2,2450	2,2460	2,2471	2,2481	2,2492	2,2502
9,5	2,2513	2,2523	2,2534	2,2544	2,2555	2,2565	2,2576	2,2586	2,2597	2,2607
9,6	2,2618	2,2628	2,2638	2,2649	2,2659	2,2670	2,2680	2,2690	2,2701	2,2711
9,7	2,2721	2,2732	2,2742	2,2752	2,2762	2,2773	2,2783	2,2793	2,2803	2,2814
9,8	2,2824	2,2834	2,2844	2,2854	2,2865	2,2875	2,2885	2,2895	2,2905	2,2915
9,9	2,2925	2,2935	2,2946	2,2956	2,2966	2,2976	2,2986	2,2996	2,3006	2,3016

II. Table de passage des logarithmes népériens aux logarithmes décimaux.
(table de multiplication par $M = \log e = 0{,}4342945\ldots$)

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	4,3430	8,6859	13,0288	17,3718	21,7147	26,0577	30,4006	34,7436	39,0865
1	0,4343	4,7772	9,1202	13,4631	17,8061	22,1490	26,4920	30,8349	35,1779	39,5208
2	0,8686	5,2115	9,5545	13,8974	18,2404	22,5833	26,9263	31,2692	35,6122	39,9551
3	1,3029	5,6458	9,9888	14,3317	18,6747	23,0176	27,3606	31,7035	36,0464	40,3894
4	1,7372	6,0801	10,4231	14,7660	19,1090	23,4519	27,7948	32,1378	36,4807	40,8237
5	2,1715	6,5144	10,8574	15,2003	19,5433	23,8862	28,2291	32,5721	36,9150	41,2580
6	2,6058	6,9487	11,2917	15,6346	19,9775	24,3205	28,6634	33,0064	37,3493	41,6923
7	3,0401	7,3830	11,7260	16,0689	20,4118	24,7548	29,0977	33,4407	37,7836	42,1266
8	3,4744	7,8173	12,1602	16,5032	20,8461	25,1891	29,5320	33,8750	38,2179	42,5609
9	3,9086	8,2516	12,5945	16,9375	21,2804	25,6234	29,9663	34,3093	38,6522	42,9952

III. Table de passage des logarithmes décimaux aux logarithmes népériens $\left(\text{table de multiplication par } \frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}302585\right)$

	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
0	0,0000	23,026	46,052	69,073	92,103	115,129	138,155	161,181	184,207	207,233
1	2,3026	25,328	48,354	71,380	94,406	117,431	140,458	163,484	186,509	209,535
2	4,6052	27,631	50,657	73,683	96,709	119,734	142,760	165,786	188,812	211,838
3	6,9078	29,934	52,959	75,985	99,011	122,037	145,062	166,089	191,115	214,140
4	9,2103	32,236	55,262	78,288	101,314	124,340	147,365	170,391	193,417	216,443
5	11,513	34,539	57,565	80,590	103,616	126,642	149,668	172,694	195,720	218,746
6	13,816	36,841	59,867	82,893	105,919	128,945	151,971	174,997	198,022	221,048
7	16,118	39,144	62,170	85,196	108,221	131,247	154,273	177,299	200,325	223,351
8	18,421	41,447	64,472	87,498	110,524	133,550	156,576	179,602	202,627	225,653
9	20,723	43,749	66,775	89,801	112,827	135,853	158,878	181,904	204,930	227,956

IV. Fonction exponentielle e^x (antilogarithmes népériens)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	1,0101	1,0202	1,0305	1,0408	1,0513	1,0618	1,0725	1,0833	1,0942
0,1	1,1052	1,1163	1,1275	1,1388	1,1503	1,1618	1,1735	1,1853	1,1972	1,2092
0,2	1,2214	1,2337	1,2461	1,2586	1,2712	1,2840	1,2969	1,3100	1,3231	1,3364
0,3	1,3499	1,3634	1,3771	1,3910	1,4049	1,4191	1,4333	1,4477	1,4623	1,4770
0,4	1,4918	1,5068	1,5220	1,5373	1,5527	1,5683	1,5841	1,6000	1,6161	1,6323
0,5	1,6487	1,6653	1,6820	1,6989	1,7160	1,7333	1,7507	1,7683	1,7860	1,8040
0,6	1,8221	1,8404	1,8589	1,8776	1,8965	1,9155	1,9348	1,9542	1,9739	1,9937
0,7	2,0138	2,0340	2,0544	2,0751	2,0959	2,1170	2,1383	2,1598	2,1815	2,2034
0,8	2,2255	2,2479	2,2705	2,2933	2,3164	2,3396	2,3632	2,3869	2,4109	2,4351
0,9	2,4596	2,4843	2,5093	2,5345	2,5600	2,5857	2,6117	2,6379	2,6645	2,6912
1,0	2,7183	2,7456	2,7732	2,8011	2,8292	2,8577	2,8864	2,9154	2,9447	2,9743
1,1	3,0042	3,0344	3,0649	3,0957	3,1268	3,1582	3,1899	3,2220	3,2544	3,2871
1,2	3,3201	3,3535	3,3872	3,4212	3,4556	3,4903	3,5254	3,5609	3,5966	3,6328
1,3	3,6693	3,7062	3,7434	3,7810	3,8190	3,8574	3,8962	3,9354	3,9749	4,0149
1,4	4,0552	4,0960	4,1371	4,1787	4,2207	4,2631	4,3060	4,3492	4,3929	4,4371
1,5	4,4817	4,5267	4,5722	4,6182	4,6646	4,7115	4,7588	4,8066	4,8550	4,9037
1,6	4,9530	5,0028	5,0531	5,1039	5,1552	5,2070	5,2593	5,3122	5,3656	5,4195
1,7	5,4739	5,5290	5,5845	5,6407	5,6973	5,7546	5,8124	5,8709	5,9299	5,9895
1,8	6,0496	6,1104	6,1719	6,2339	6,2965	6,3598	6,4237	6,4883	6,5535	6,6194
1,9	6,6859	6,7531	6,8210	6,8895	6,9588	7,0287	7,0993	7,1707	7,2427	7,3155
2,0	7,3891	7,4633	7,5383	7,6141	7,6906	7,7679	7,8460	7,9248	8,0045	8,0849
2,1	8,1662	8,2482	8,3311	8,4149	8,4994	8,5849	8,6711	8,7583	8,8463	8,9352
2,2	9,0250	9,1157	9,2073	9,2999	9,3933	9,4877	9,5831	9,6794	9,7767	9,8749
2,3	9,9742	10,074	10,176	10,278	10,381	10,486	10,591	10,697	10,805	10,913
2,4	11,023	11,134	11,246	11,359	11,473	11,588	11,705	11,822	11,941	12,061
2,5	12,182	12,305	12,429	12,554	12,680	12,807	12,936	13,066	13,197	13,330
2,6	13,464	13,599	13,736	13,874	14,013	14,154	14,296	14,440	14,585	14,732
2,7	14,880	15,029	15,180	15,333	15,487	15,643	15,800	15,959	16,119	16,281
2,8	16,445	16,610	16,777	16,945	17,116	17,288	17,462	17,637	17.814	17,993
2,9	18,174	18,357	18,541	18,728	18,916	19,106	19,298	19,492	19,688	19,886
3,0	20,086	20,287	20,491	20,697	20,905	21,115	21,328	21,542	21,758	21,977
3,1	22,198	22,421	22,646	22,874	23.104	23,336	23,571	23,807	24,047	24,288
3,2	24,533	24,779	25,028	25,280	25,534	25,790	26,050	26,311	26,576	26,843
3,3	27,113	27,385	27,660	27,938	28,219	28,503	28,789	29,079	29,371	29,666
3,4	29,964	30,265	30,569	30,877	31,187	31,500	31,817	32,137	32,460	32,786
3,5	33,115	33,448	33,784	34,124	34,467	34,813	35,163	35,517	35,874	36,234
3,6	36,598	36,966	37,338	37,713	38,092	38,475	38,861	39,252	39,646	40,045
3,7	40,447	40,854	41,264	41,679	42,098	42,521	42,948	43,380	43,816	44,256
3,8	44,701	45,150	45,604	46,063	46,525	46,993	47.465	47,942	48,424	48,911
3,9	49,402	49,899	50,400	50,907	51,419	51.935	52,457	52,985	53,517	54.055

V. Table des intégrales indéfinies

1. Fonctions contenant $a + bx$ à une puissance entière

1) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln (a+bx) + C.$$

2) $$\int (a+bx)^n \, dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} + C, \qquad n \neq -1.$$

3) $$\int \frac{x\,dx}{1+bx} = \frac{1}{b^2} [a + bx - a \ln (a+bx)] + C.$$

4) $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3} \left[\frac{1}{2} (a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2 \ln (a+bx) \right] + C.$$

5) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$$

6) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$$

7) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2} \left[\ln (a+bx) + \frac{a}{a+bx} \right] + C.$$

8) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3} \left[a + bx - 2a \ln (a+bx) - \frac{a^2}{a+bx} \right] + C.$$

9) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2} \ln \frac{a+bx}{x} + C.$$

10) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2} \left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2} \right] + C.$$

2. Fonctions contenant $a^2 + x^2$, $a^2 - x^2$, $a + bx^2$

11) $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

12) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C.$$

13) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$$

ou

14) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C.$$

15) $$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}} + C \text{ où } a > 0 \text{ et } b > 0.$$

Si a et b sont négatifs, le signe (—) peut être sorti de sous le signe $\int$ et si a et b sont de signes différents, on utilise le n° 16.

16) $\int \frac{dx}{a - bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} + C.$

17) $\int \frac{x\,dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} \ln \left(x^2 + \frac{a}{b}\right) + C.$

18) $\int \frac{x^2\,dx}{a + bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{a + bx^2},$

ensuite nº 15 ou nº 16.

19) $\int \frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{a + bx^2} + C.$

20) $\int \frac{dx}{x^2(a + bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{a + bx^2},$

ensuite nº 15 ou nº 16.

21) $\int \frac{dx}{(a + bx^2)^2} = \frac{x}{2a(a + bx^2)} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{a + bx^2},$

ensuite nº 15 ou nº 16.

3. Fonctions contenant $\sqrt{a + bx}$

22) $\int \sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2}{3b} \sqrt{(a + bx)^3} + C.$

23) $\int x\sqrt{a + bx}\,dx = -\frac{2(2a - 3bx)\sqrt{(a + bx)^3}}{15b^2} + C.$

24) $\int x^2\sqrt{a + bx}\,dx = \frac{2(8a^2 - 12abx + 15b^2x^2)\sqrt{(a + bx)^3}}{105b^3} + C.$

25) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx}} = -\frac{2(2a - bx)}{3b^2} \sqrt{a + bx} + C.$

26) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a + bx}} = \frac{2(8a^2 - 4abx + 3b^2x^2)}{15b^3} \sqrt{a + bx} + C.$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \frac{\sqrt{a + bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + bx} + \sqrt{a}} + C$ où $a > 0$.

28) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{a + bx}{-a}} + C$ où $a < 0$.

29) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a + bx}} = \frac{-\sqrt{a + bx}}{ax} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}},$

ensuite nº 27 ou nº 28.

30) $\int \frac{\sqrt{a + bx}\,dx}{x} = 2\sqrt{a + bx} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx}},$

ensuite nº 27 ou nº 28.

4. Fonctions contenant $\sqrt{x^2 + a^2}$

31) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

32) $\int \sqrt{(x^2 + a^2)^3}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 + 5a^2)\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

33) $\int x\sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}}{3} + C.$

34) $\int x^2\sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{8}(2x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

35) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

36) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2 + a^2}} + C.$

37) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sqrt{x^2 + a^2} + C.$

38) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

39) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

40) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} + C.$

41) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a^2 x} + C.$

42) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$

43) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}\, dx}{x} = \sqrt{x^2 + a^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} + C.$

44) $\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}\, dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C.$

5. Fonctions contenant $\sqrt{a^2 - x^2}$

45) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C.$

46) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

47) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

48) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + C.$

49) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

50) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

51) $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

52) $\displaystyle\int \sqrt{(a^2 - x^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(5a^2 - 2x^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

53) $\displaystyle\int x\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}{3} + C.$

54) $\displaystyle\int x\sqrt{(a^2 - x^2)^3}\,dx = -\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)^5}}{5} + C.$

55) $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

56) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

57) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a}\ln\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

58) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a^2 x} + C.$

59) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\frac{x}{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$

60) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C.$

61) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx = -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$

6. Fonctions contenant $\sqrt{x^2 - a^2}$

62) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C.$

63) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2 - a^2}} + C.$

64) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2} + C.$

65) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

66) $\displaystyle\int \sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-5a^2)\sqrt{x^2-a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

67) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}{3} + C.$

68) $\displaystyle\int x\sqrt{(x^2-a^2)^3}\,dx = \frac{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}{5} + C.$

69) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

70) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

71) $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$

72) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\ \text{arc sec}\, x + C.$

73) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} + C.$

74) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C.$

75) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\,\text{arc sec}\,\frac{x}{a} + C.$

76) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x} = \sqrt{x^2-a^2} - a\,\text{arc cos}\,\frac{a}{x} + C.$

77) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C.$

7. Fonctions contenant $\sqrt{2ax-x^2}$, $\sqrt{2ax+x^2}$

La fonction contenant $\sqrt{2ax-x^2}$ peut être intégrée par la substitution $t = x - a$. Dans ce cas $\sqrt{2ax-x^2}$ s'écrit $\sqrt{a^2-t^2}$, et l'intégrale est trouvée dans la partie 5 de cette table. Si elle ne figure pas dans la table on s'efforce de la ramener à une intégrale se trouvant dans la table.

Il en est de même pour la fonction contenant l'expression $\sqrt{2ax+x^2}$. Dans ce cas la substitution $t = x + a$ ramène le radical à la forme $\sqrt{t^2-a^2}$ (partie 6 de cette table).

8. Fonctions contenant $a + bx + cx^2$ $(c > 0)$

78) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + C, & \text{si } b^2 < 4ac. \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \dfrac{2cx+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2cx+b+\sqrt{b^2-4ac}} + C, & \text{si } b^2 > 4ac. \end{cases}$$

79) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

80) $$\int \sqrt{a+bx+cx^2}\, dx = \frac{2cx+b}{4c} \sqrt{a+bx+cx^2} - \frac{b^2-4ac}{8\sqrt{c^3}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

81) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{a+bx+cx^2}}{c} - \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \ln (2cx + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bx+cx^2}) + C.$$

9. Fonctions contenant $a + bx - cx^2$ $(c > 0)$

82) $$\int \frac{dx}{a+bx-cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2+4ac}} \ln \frac{\sqrt{b^2+4ac}+2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}-2cx+b} + C.$$

83) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

84) $$\int \sqrt{a+bx-cx^2}\, dx = \frac{2cx-b}{4c} \sqrt{a+bx-cx^2} + \frac{b^2+4ac}{8\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

85) $$\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = -\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{c} + \frac{b}{2\sqrt{c^3}} \arcsin \frac{2cx-b}{\sqrt{b^2+4ac}} + C.$$

10. Autres fonctions algébriques

86) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\, dx = \sqrt{(a+x)(b+x)} + (a-b) \ln (\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x}) + C.$$

87) $$\int \sqrt{\frac{a-x}{b+x}}\, dx = \sqrt{(a-x)(b+x)} + (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{x+b}{a+b}} + C.$$

88) $$\int \sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\, dx = -\sqrt{(a+x)(b-x)} - (a+b) \arcsin \sqrt{\frac{b-x}{a+b}} + C.$$

89) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = -\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$

90) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$

11. Fonctions exponentielles et trigonométriques

91) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

92) $\int e^x\, dx = e^x + C.$

93) $\int e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$

94) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C.$

95) $\int \cos x\, dx = \sin x + C.$

96) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \cos x + C.$

97) $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln \sin x + C.$

98) $\int \sec x\, dx = \ln (\sec x + \operatorname{tg} x) + C = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$

99) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \ln (\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x) + C = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

100) $\int \sec^2 x\, dx = \operatorname{tg} x + C.$

101) $\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\operatorname{cotg} x + C.$

102) $\int \sec x \operatorname{tg} x\, dx = \sec x + C.$

103) $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C.$

104) $\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

105) $\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$

106) $$\int \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

On applique cette formule plusieurs fois jusqu'à ce qu'elle nous ramène à l'intégrale $\int \sin x\,dx$ ou $\int \sin^2 x\,dx$ (suivant que n est pair ou impair). et pour ces intégrales cf. nos 94 et 104.

107) $$\int \cos^n x\,dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

(cf. la remarque pour l'intégrale précédente et nos 95 et 105).

108) $$\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{1}{n-1}\cdot\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}.$$

On l'applique plusieurs fois jusqu'à ce qu'on la ramène à l'intégrale $\int dx$ si n est pair ou à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sin x}$ si n est impair (cette dernière intégrale est donnée au no 99).

109) $$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin x}{\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cos^{n-2} x}$$

(cf. la remarque pour l'intégrale précédente et no 98).

110) $$\int \sin x \cos^n x\,dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + C.$$

111) $$\int \sin^n x \cos x\,dx = \frac{\sin^{n+1} x}{n+1} + C.$$

112) $$\int \cos^m x \sin^n x\,dx = \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \cos^{m-2} x \sin^n x\,dx.$$

On l'applique plusieurs fois jusqu'à ce que le degré du cosinus devienne nul (si m est pair) ou égal à l'unité (si m est impair). Dans le premier cas cf. no 106, dans le second cf. no 111. Cette formule peut être utilisée si $m < n$. Si $m > n$, il est préférable d'utiliser la formule suivante:

113) $$\int \cos^m x \sin^n x\,dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \cos^m x \sin^{n-2} x\,dx$$

(cf. la remarque pour l'intégrale précédente et nos 107 et 110).

$$\left.\begin{aligned}
&114)\ \int \sin mx \sin nx\,dx = -\frac{\sin (m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)\,x}{2(m-n)} + C.\\
&115)\ \int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin (m+n)\,x}{2(m+n)} + \frac{\sin (m-n)}{2(m-n)} + C.\\
&116)\ \int \sin mx \cos nx\,dx = -\frac{\cos (m+n)\,x}{2(m+n)} - \frac{\cos (m-n)\,x}{2(m-n)} + C.
\end{aligned}\right\}\ (m \neq n)$$

117) $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C,$ si $a > b.$

118) $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\operatorname{tg}\frac{x}{2} - \sqrt{b+a}} + C,$ si $a < b.$

119) $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + C,$ si $a > b.$

120) $\displaystyle\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b - \sqrt{b^2 - a^2}}{a\operatorname{tg}\frac{x}{2} + b + \sqrt{b^2 - a^2}} + C,$ si $a < b.$

121) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{ab} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b\operatorname{tg} x}{a}\right) + C.$

122) $\displaystyle\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + C.$

123) $\displaystyle\int e^{ax} \sin nx\, dx = \frac{e^{ax}(a\sin nx - n\cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$

124) $\displaystyle\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2} + C.$

125) $\displaystyle\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{e^{ax}(n\sin nx + a\cos nx)}{a^2 + n^2} + C.$

126) $\displaystyle\int x e^{ax}\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1) + C.$

127) $\displaystyle\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1} e^{ax}\, dx.$

On applique la formule plusieurs fois jusqu'à ce que le degré de x devienne égal à l'unité; on trouve alors cette intégrale au n° 126.

128) $\displaystyle\int x a^{mx}\, dx = \frac{x a^{mx}}{m \ln x} - \frac{a^{mx}}{m(\ln a)^2} + C.$

129) $\displaystyle\int x^n a^{mx}\, dx = \frac{a^{mx} x^n}{n \ln a} - \frac{n}{m \ln a}\int a^{mx} x^{n-1}\, dx.$

On applique la formule jusqu'à ce que le degré de x devienne égal à l'unité; on trouve alors cette intégrale au n° 128.

130) $$\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\,dx.$$

On applique la formule jusqu'à ce que le cosinus disparaisse (dans le cas de n pair) ou que son degré devienne égal à l'unité (dans le cas de n impair). Dans ce dernier cas cf. n° 122.

131) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

132) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

133) $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x + C.$

134) $\int \operatorname{coth} x\,dx = \ln \operatorname{sh} x + C.$

135) $\int \operatorname{sech} x\,dx = 2 \operatorname{arc\,tg} e^x + C.$

136) $\int \operatorname{cosech} x\,dx = \ln \operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$

137) $\int \operatorname{sech}^2 x\,dx = \operatorname{th} x + C.$

138) $\int \operatorname{cosech}^2 x\,dx = -\operatorname{coth} x + C.$

139) $\int \operatorname{sech} x \operatorname{th} x\,dx = \operatorname{sech} x + C.$

140) $\int \operatorname{cosech} x \operatorname{coth} x\,dx = -\operatorname{cosech} x + C.$

141) $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = -\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + C.$

142) $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}^2 2x + C.$

12. Fonctions logarithmiques

On donne des fonctions ne contenant que des logarithmes népériens. Si l'on doit trouver l'intégrale d'une fonction contenant le logarithme à une autre base, on le ramène au préalable au logarithme népérien d'après la formule $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$, puis on utilise la table.

143) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C.$

144) $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) + C.$

145) $\int x^n \ln x \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] + C.$

146) $\int \ln^n x \, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x \, dx.$

On applique la formule jusqu'à ce que l'on obtienne l'intégrale $\int \ln x \, dx$ que l'on trouve d'après la formule du n° 143.

147) $\int x^m \ln^n x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x \, dx.$

On applique la formule jusqu'à ce que l'on ramène l'intégrale à l'intégrale du n° 145.

Index des noms

Index des matières

A NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur le contenu de ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:

2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

AIDE-MÉMOIRE DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

par G.PISSARENKO, A.YAKOVLEV, V.MATVÉEV

L'aide-mémoire de G.Pissarenko, de l'Académie des Sciences de l'Ukraine, A.Yakovlev, candidat ès sciences techniques et V.Matvéev, docteur ès sciences physiques et mathématiques, contient des renseignements sur des questions fondamentales de la théorie de résistance des matériaux ainsi que des données de référence indispensables pour les calculs de résistance dans la pratique de l'ingénieur.
Les auteurs se sont assigné pour tâche de mettre sur pied un aide-mémoire qui, étant suffisamment complet et universel, puisse refléter l'état actuel de la résistance en tant que science, tout en se basant pour cela sur une approche unique dans la présentation du sujet. Chaque chapitre du guide s'ouvre par un exposé condensé de la théorie du problème en question, suivi d'une présentation, sous forme de tableaux correspondants, des formules toutes prêtes, des chiffres et des graphiques se rapportant au chapitre donné. Pour faciliter l'usage des données de référence, l'ouvrage contient une liste de tous les tableaux contenus dans le livre.

L'aide-mémoire se destine aux élèves des écoles techniques supérieures, aux ingénieurs des bureaux d'études, ayant affaire à des calculs pratiques à la résistance; il sera également utile aux boursiers de thèse, aux professeurs ainsi qu'aux chercheurs qui s'occupent des problèmes de la résistance.